

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ КАНАЛОВ МАЛОЙ ГЛУБИНЫ И ОРОСИТЕЛЕЙ

БЕРЕСЛАВСКИЙ Э. Н., МАТВЕЕВ В. В.

В гидродинамической постановке рассматриваются два случая плоской установившейся фильтрации в однородном изотропном грунте из широких каналов и оросителей бороздового типа через почвенный слой в сильнопроницаемый напорный водоносный горизонт при наличии капиллярности грунта. Дается единообразный метод решения, при котором решение задачи фильтрации из оросителя может быть получено из решения для широкого канала. Отмечены частные и предельные случаи, изученные ранее в [1–3] и др. По результатам вычислений, проведенных на ЭВМ, анализируется характер зависимости фильтрационного расхода из каналов и оросителей, а также капиллярного растекания воды от очертания русла, ширины каналов и оросителей, мощности слоя, величины подпора и капиллярности грунта.

Влияние капиллярного поднятия на фильтрацию жидкости из каналов горизонтального поперечного сечения с малым уровнем воды (широких каналов) изучалось в [1, 2]. Однако предложенный здесь метод пригоден лишь для задач, в которых свободная поверхность сопрягается с непроницаемыми границами.

В [3, 4] доказана необходимость введения зон выхода капиллярных вод на поверхность земли, выделены участки выхода с испарением, инфильтрацией и участки капиллярного тока, а для эффективного решения задач предложена новая аналитическая функция [4]. Тем самым была создана теория фильтрации в капиллярных грунтах при любых видах внешних границ.

В [3] исследовано влияние капиллярности грунта из каналов малого, близкого к полукругу поперечного сечения (оросителей бороздового типа). Следует отметить, что в [1–3], а затем в [5] рассматривалась свободная фильтрация, при которой водопроницаемый слой грунта на большой глубине подстилается слоем грунта значительно большей проницаемости, не содержащим напорных грунтовых вод. Как отмечается в [3], применить результаты, полученные для широких каналов, при расчете оросителей представляется затруднительным. Случай фильтрации из широкого канала с подпором, когда на некоторой конечной глубине от дна канала находится сильнопроницаемый напорный горизонт, рассмотрен в [6], а также в [7], где такой горизонт удален на бесконечность. Однако влиянием капиллярного поднятия в [6, 7] пренебрегалось.

1. Широкий канал. На фиг. 1 схематично представлена правая половина области движения из канала через слой грунта толщиной T в подстилающей его сильно водопроницаемый горизонт с напором H , считая от границы раздела между ним и слоем, фильтрация в котором изучается. Канал моделируется горизонтальным отрезком длины l ; глубина воды в канале предполагается бесконечно малой.

Примем $\varphi=0$ вдоль дна канала AB и $\psi=0$ вдоль линии симметрии AF , где $\omega=\varphi+i\psi$ — комплексный потенциал, отнесенный к коэффициенту фильтрации грунта. На участке BC положим $\psi=Q/2$, где Q — искомый фильтрационный расход из канала (на единицу его длины), также отнесенный к коэффициенту фильтрации. Таким образом, участок BC считается непроницаемой линией выхода капиллярных вод на поверхность земли [3, 4]. Тогда на свободной поверхности CE должны выполняться условия $\varphi=-y+h_n$, $\psi=Q/2$, где $z=x+iy$ — комплексная координата точек области фильтрации, h_n — статическая высота капиллярного поднятия грунтовой воды. На подошве пласта FE выполняется условие $\varphi=T-H$. Кроме расхода Q интерес представляет ширина капиллярного растекания воды L .

Произведем конформное отображение области комплексного потенциала ω (фиг. 2, *a*) и области $dz/d\omega$ — инверсии годографа скорости

(фиг. 2, б) на верхнюю полуплоскость переменной ζ (фиг. 2, в). По формуле Кристоффеля — Шварца найдем

$$\omega = \frac{iQ}{2} \left[1 - \frac{F(\lambda, k)}{K} \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -\frac{2i}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} + A \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \right) \quad (1.2)$$

$$k = \sqrt{\frac{(1-b)a}{(1-a)b}}, \quad \lambda = \arcsin \sqrt{\frac{(1-a)\zeta}{(1-\zeta)a}}, \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Здесь $F(\lambda, k)$ — эллиптический интеграл первого рода при модуле k ; λ, a, b ($0 < a < b < 1$), d ($1 \leq d < \infty$), $A = d - 1$ — параметры конформного отображения (фиг. 2, в).

Из условия соответствия точек F и C при конформном отображении (фиг. 2, а, в) и формулы (1.1) получаем следующие выражения для расхода Q и модуля k через параметры a и b :

$$Q = \frac{2h_*K}{F(\alpha, k')} \quad (1.3)$$

$$\frac{2(T-H)}{Q} = \frac{K'}{K} \quad (1.4)$$

Непосредственное исключение параметра ζ из соотношений (1.1) и (1.2) не позволяет полностью решить задачу¹.

Введем новую переменную τ , полагая

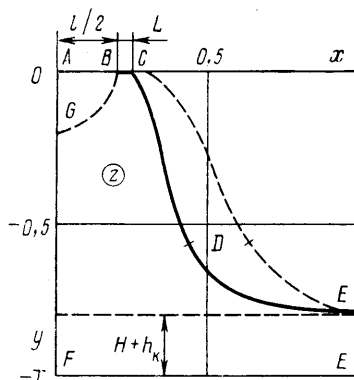
$$\zeta = \sin^2 \tau \quad (1.5)$$

Подстановка (1.5) переводит полуплоскость ζ в полуполосу τ (фиг. 2, з), а дифференцирование (1.1) по τ с учетом (1.5) дает

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{iQ\sqrt{(1-a)b}}{2K\sqrt{(a-\sin^2 \tau)(b-\sin^2 \tau)}} \quad (1.6)$$

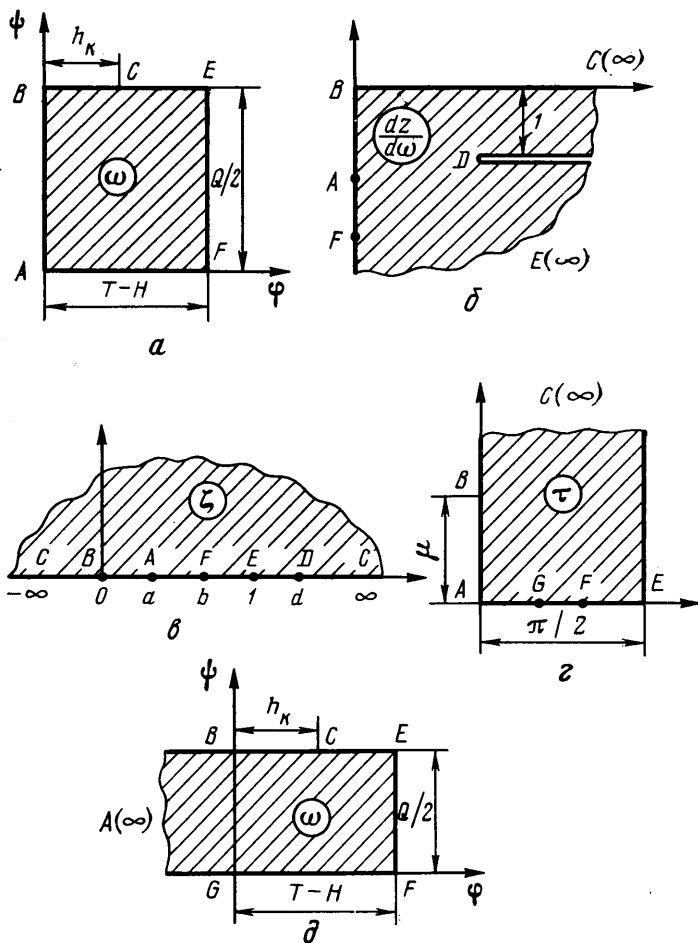
$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{Q\sqrt{(1-a)b}(\tau + A \operatorname{tg} \tau)}{\pi K\sqrt{(a-\sin^2 \tau)(b-\sin^2 \tau)}} \quad (1.7)$$

Выражения (1.6) и (1.7) содержат три неизвестные постоянные a, b и A , определяющие мощность слоя, ширину канала l и величину подпора H . Запись представления (1.7) для различных участков границы области τ с последующим интегрированием приводит к параметрическим уравнениям соответствующих участков схемы. В результате после устранения особенностей на концах некоторых интегралов подобно тому, как



Фиг. 1

¹ Это же относится к задаче об оросителе в разд. 2. Отметим, что в [8] прямое исключение параметра ζ привело к формулам (30)–(32), (35)–(37), содержащим неустранимые особенности.



Фиг. 2

это сделано в [9], получаем

$$A = 2\sqrt{1-b} \left\{ \frac{KT}{\sqrt{b}Q} - \frac{\sqrt{1-a}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\arcsin \sqrt{a + (b-a)\sin^2 t} dt}{\sqrt{[a + (b-a)\sin^2 t][1 - a - (b-a)\sin^2 t]}} \right\} \quad (1.8)$$

$$\frac{l}{2} = \frac{Q\sqrt{(1-a)b}}{\pi K} \int_0^{\pi/2} \frac{\arcsin(\sqrt{a}\sin t) + A\sqrt{a}\sin t(1 - a\sin^2 t)^{-1/2}}{\sqrt{(1 - a\sin^2 t)(b - a\sin^2 t)}} dt \quad (1.9)$$

Численно проверяется монотонность функций, входящих в правые части уравнений (1.8) и (1.9), а также в уравнение $h_k/(T-H) = F(\lambda, k)/K'$, вытекающее из (1.3) и (1.4); таким способом устанавливается однозначная разрешимость задачи относительно неизвестных постоянных.

После нахождения параметров a, b и A и расхода Q по формуле (1.3) определению подлежат величина капиллярного растекания воды

$$L = \frac{4Q\sqrt{(1-a)b}}{\pi K} \int_0^1 \frac{t[-\ln t + A(1-t^2)(1+t^2)^{-1}] dt}{\sqrt{[1 + (4a-2)t^2 + t^4][1 + (4b-2)t^2 + t^4]}} \quad (1.10)$$

а также координаты точек кривой депрессии

$$x = \frac{l}{2} + L + \frac{4Q\sqrt{(1-a)b}}{\pi K} \int_0^t \frac{t[-\ln t + A(1+t^2)(1-t^2)^{-1}] dt}{\sqrt{[1+(2-4a)t^2+t^4][1+(2-4b)t^2+t^4]}} \quad (1.11)$$

$$y = \frac{-Q}{2K} [F(\beta, k') - F(\gamma, k')] \quad (1.12)$$

$$\beta = \arctg \sqrt{b/(1-b)}, \quad \gamma = \arctg [(1-t^2)(1+t^2)^{-1} \sqrt{b/(1-b)}], \quad 0 \leq t \leq 1$$

Из выражения для y (1.12) при $t=1$, соответствующем точке E , вытекает, что

$$T-H-h_k = \frac{Q}{2K} F(\beta, k') \quad (1.13)$$

Из (1.13) и (1.3) следует тогда, что

$$\frac{2(T-H)}{Q} = \frac{F(\alpha, k') + F(\beta, k')}{QK}$$

Так как $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = k$, то, используя известный результат $F(\alpha, k') + F(\beta, k') = K'$ [10], приходим снова к соотношению (1.4).

На фиг. 1 сплошной линией изображена кривая депрессии, рассчитанная при $T=1$; $l=0,4$; $h_k=0,1$; $H=0,1$.

Отметим некоторые случаи, связанные с предельными значениями параметров отображения. При $d=1$ имеем $A=0$; этот случай соответствует фильтрации без подпора, когда $H=0$ [11].

Если $b=1$, то модуль $k=0$ и, следовательно, нижний сильнопроницаемый слой находится на бесконечной глубине ($T=\infty$). Тогда из (1.3) приходим к выражению $Q = \pi h_k / \operatorname{arsh}[\sqrt{(1-a)/a}]$, т. е. $a = 1/\operatorname{ch}^2(\pi h_k/Q)$, которое совпадает с формулой (4.3) [12]. Далее различаем следующие два случая: свободную фильтрацию и фильтрацию с подпором. Первому случаю соответствует значение $A=0$ [2, 12], во втором случае в решении содержится одна неизвестная постоянная $A \neq 0$, которая может быть определена, если задать координаты одной точки кривой депрессии [12, 13].

2. Ороситель бороздового типа. Заменим сначала ороситель точечным источником, расположенным в точке A (фиг. 1). Далее примем одну из линий равных напоров, скажем BG , показанную на фиг. 1 штриховой линией, за полукруглое поперечное сечение русла оросителя с диаметром l и положим на этой линии $\varphi=0$. Примем также, что $\psi|_{AF}=0$, $\psi|_{FE}=T-H$, $\psi|_c=Q/2$.

Область комплексного потенциала изображена на фиг. 2, ∂ ; область $dz/d\omega$ имеет тот же вид, что и в разд. 1. Совершая конформное отображение области ω (фиг. 2, ∂) на верхнюю полуплоскость ζ (фиг. 2, ε), получим

$$\omega = T-H - \frac{Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{b-\zeta}{(1-b)\zeta}}$$

В данном случае снова $A=d-1$ и

$$b = \operatorname{th}^2 \frac{\pi(T-H-h_k)}{Q}$$

Преобразование (1.5) приводит к решению задачи в параметрическом виде

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{Q\sqrt{b}}{\pi \sin \tau \sqrt{b - \sin^2 \tau}} \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{2iQ\sqrt{b}(\tau + A \operatorname{tg} \tau)}{\pi^2 \sin \tau \sqrt{b - \sin^2 \tau}} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) содержат две неизвестные постоянные b и A . Сопоставляя решение для источника (2.1) с решением (1.6), (1.7) для широкого канала, видим, что оно получается из последнего при $a=0$, т. е. когда точка B на фиг. 1 сливается с точкой A . Формулы для постоянной A , радиуса капиллярного растекания воды L и абсцисс точек кривой депрессии x получаются соответственно из формул (1.8), (1.10) и (1.11), если в них положить $a=0$. Так как при этом $k=0$, $k'=1$, то для ординат точек кривой депрессии получаем формулу

$$y = -(T - H - h_k) + \frac{Q}{\pi} \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{b}(1-t^2)}{\sqrt{1-b}(1+t^2)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Выражения для радиуса оросителя и расхода принимают вид

$$\frac{l}{2} = \frac{2Q\sqrt{b}}{\pi^2} \int_0^{\mu} \frac{t + A \operatorname{th} t}{\operatorname{sh} t \sqrt{b + \operatorname{sh}^2 t}} dt$$

$$Q = \pi h_k \left[\operatorname{arth} \frac{(\operatorname{ch} \mu - \sqrt{b + \operatorname{sh}^2 \mu}) \sqrt{b}}{\sqrt{b + \operatorname{sh}^2 \mu} - b \operatorname{ch} \mu} \right]^{-1} \quad (2.2)$$

где μ — ордината точки B в плоскости τ (фиг. 2, z), также подлежащая определению.

На фиг. 1 штриховой линией изображена кривая депрессии, рассчитанная при тех же значениях параметров, что и в разд. 1. Отметим здесь частные и предельные случаи. Так же, как и в разд. 1, при $d=1$ имеем $A=0$; этот случай соответствует фильтрации без подпора [14]. Если $b=1$, то тогда $T=\infty$ и после раскрытия соответствующей неопределенности в (2.2) приходим к выражению $Q = \pi h_k / \ln \operatorname{ctg} \mu$, которое совпадает с формулой (15) в [3].

3. Анализ численных результатов. В таблице приведены результаты расчетов фильтрационных характеристик L и Q для широких каналов (верхняя строка) и оросителей (нижняя строка) при различных значениях l , h_k и H . Таблица состоит из двух серий, соответствующих случаям $h_k > H$ (верхняя часть таблицы) и $h_k < H$, а каждая серия — из трех разделов, в которых варьируется один из параметров l , H и h_k (два последних таким образом, чтобы $H + h_k < T$), а остальные принимают фиксированные значения $T=1$, $l=0, 4$; для первой серии $H=0,1$; $h_k=0,3$, а для второй — $H=0, 3$; $h_k=0, 1$.

Проанализируем влияние формы поперечного сечения русла источника питания. В случае оросителя капиллярное растекание и расход больше, чем в случае широкого канала, причем различие может достигать 1,5–2 раз при относительно малых ($<0,01$) и больших ($>0,9$) значениях l . Наиболее существенное отличие (более чем в 2 раза) наблюдается для почв со структурным грунтом, обладающих слабой капиллярностью ($h_k \leq 0,1$). Что касается величин разностей ΔL и ΔQ между соответствующими значениями для широкого канала и оросителя, то они растут с увеличением l . Так, при возрастании l от 0,3 до 1 величина $\Delta L/l$ уменьшается более чем вдвое.

Увеличение ширины канала l в 3,3 раза приводит к незначительному увеличению радиуса капиллярного растекания воды L (в 1,1–1,3 раза), расход воды Q при этом увеличивается приблизительно на 100%.

l	L	Q	H	L	Q	h_k	L	Q
0,3	0,1404	0,8487	0,1	0,1464	0,9612	0,1	0,0440	0,7006
	0,2364	1,1707		0,2563	1,3701		0,0999	1,1042
0,5	0,1504	1,0659	0,3	0,1907	0,8079	0,5	0,3149	1,0680
	0,2716	1,5692		0,3175	1,1275		0,4640	1,4795
0,7	0,1551	1,2631	0,6	0,5857	0,4910	0,8	1,0833	1,1072
	0,2933	1,9834		0,7589	0,6745		1,2669	1,5202
0,9	0,1575	1,4516	0,65	0,9168	0,4306	0,85	1,5112	1,1077
	0,3077	2,4368		1,0986	0,5912		1,6969	1,5207
1,0	0,1582	1,5442	0,69	1,8494	0,3816	0,89	1,9423	1,1078
	0,3131	2,6832		2,0348	0,5238		2,7131	1,5208
0,3	0,0456	0,5508	0,1	0,0440	0,7006	0,1	0,0469	0,6417
	0,0996	0,8067		0,0999	1,1042		0,1088	0,9618
0,5	0,0478	0,7254	0,5	0,0566	0,5279	0,3	0,1907	0,8079
	0,1161	1,1150		0,1308	0,7571		0,3175	1,1275
0,7	0,0489	0,8814	0,8	0,2099	0,2433	0,6	0,9264	0,6809
	0,1267	1,4306		0,3472	0,3350		1,1308	1,1821
0,9	0,0495	1,0293	0,85	0,4113	0,1842	0,65	1,3520	0,8615
	0,1338	1,7731		0,5748	0,2530		1,5372	1,1927
1,0	0,0496	1,1016	0,89	1,1919	0,1354	0,69	2,3590	0,8619
	0,1365	1,9585		1,3765	0,1859		2,5532	1,1828

При изменении H от 0,1 до $T-h_k$ величины L и Q изменяются соответственно в 12,6 и 2,5 раза в случае широкого канала или в 8 и 2,6 раза в случае оросителя. Для второй серии изменения более значительны — 27 и 5,2 раза для широкого канала или 13,8 и 6 раз для оросителей; наибольшие увеличения радиуса капиллярного растекания воды L наблюдаются при значениях H , близких к $T-h_k$. Так, изменение H от 0,85 до 0,89, т. е. на 4,7%, приводит к увеличению L на 189%. Чем ближе уровень грунтовых вод к поверхности земли, т. е. чем больше величина H , тем меньше расход воды на фильтрацию [1]. При $H=0$ для первой серии $L=0,1336$ и $Q=1,0188$ в случае широкого канала, $L=0,2400$ и $Q=1,4713$ — для оросителя.

В случае $h_k > H$ при изменении параметра h_k от 0,1 до 0,89 величина L увеличивается в 44 раза для широких каналов и в 27,2 раза — для оросителей, что говорит о существенном влиянии на фильтрацию капиллярности грунта.

При $h_k \approx 0$ и $h_k \approx T-H$ радиус капиллярного растекания воды превышает высоту капиллярного поднятия h_k , причем наибольшая разница достигается для значений h_k , близких к $T-H$. Так, в случае широкого канала при $h_k=0,89$ имеем $L=1,942$ и, следовательно, $L/h_k=2,2$. Таким образом, подтверждается отмеченное в [3] существенное значение горизонтального всасывания воды (в том числе и для слабокапиллярных грунтов), которое, как видно из таблицы, является еще более значительным для оросителей.

Результаты расчетов L и Q при переменной мощности слоя T , удовлетворяющей условию $T-H-h_k=0,8$, для $l=0,3$ и $h_k=0,1$ представлены ниже:

T	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
L	0,0433	0,0445	0,0455	0,0464	0,0472	0,0480	0,0487	0,0495	0,0499
	0,0923	0,0980	0,1025	0,1061	0,1092	0,1119	0,1143	0,1165	0,1185
Q	0,5881	0,5675	0,5520	0,5397	0,5295	0,5208	0,5133	0,5043	0,5006
	0,9079	0,8244	0,7735	0,7378	0,7108	0,6894	0,6714	0,6565	0,6438

Видно, что присутствие нижележащего пласта существенно сказывается на величинах L и Q лишь при $T < 3,0$. При больших T различия между соответствующими значениями L и Q не превышают 1,7 и 1,9% для широкого канала и 2,9 и 3,6% — для оросителя.

Авторы благодарят Н. Н. Веригина за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ведерников В. В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Л.; М.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
2. *Ризенкамф Б. К.* Гидравлика грунтовых вод // Уч. зап. Саратов. ун-та. 1940. Т. 15. № 5. С. 3–93.
3. *Веригин Н. Н.* Фильтрация воды из оросителя ирригационной системы // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 4. С. 589–592.
4. *Веригин Н. Н.* Некоторые случаи подъема грунтовых вод при общей и местной усиленной инфильтрации // Инж. сб. 1950. Т. 7. С. 21–34.
5. *Нумеров С. Н.* Об одном способе решения фильтрационных задач // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 4. С. 133–139.
6. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
7. *Дицкишвили А. Р.* Фильтрация из канала трапецеидального сечения // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 3. С. 125–133.
8. *Васильев В. А.* Фильтрация из канала с малой глубиной воды при учете капиллярности // Тр. Среднеазиат. ун-та. 1958. Т. 83. № 14. С. 43–57.
9. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969. 414 с.
10. *Журавский А. М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1941. 236 с.
11. *Береславский Э. Н., Матвеев В. В.* О режиме грунтовых вод в почвенном слое при фильтрации из канала с учетом капиллярности грунта // Вычислительная и прикладная математика. Киев, 1987. Вып. 61. С. 43–47.
12. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
13. *Ильинский Н. Б., Касимов А. Р.* Обратная задача фильтрации из канала при наличии подпора // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1983. Вып. 20. С. 104–115.
14. *Береславский Э. Н.* К задаче о фильтрации из оросителя ирригационной системы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 105–109.

Ленинград
Киев

Поступила в редакцию
10.XII.1987