

УДК 532.591

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН
В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ**

ИЛЬИЧЕВ А. Т., МАРЧЕНКО А. В.

Распространение слабонелинейных волн в различных дисперсных средах описывается уравнением

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \quad \alpha = \pm 1 \quad (0.1)$$

Физическая природа переменной u может быть совершенно различной. Так, (0.1) моделирует распространение капиллярных волн в мелкой жидкости, волн в мелкой жидкости, находящейся под ледяным покровом, магнитоакустических волн во внешнем магнитном поле и др. (см., например, [1-3]).

В [1, 3] указано, что в системах, описываемых (0.1), при $\alpha=1$ могут осуществляться нелинейные взаимодействия между первой и n -й гармониками. При этом волновой вектор и частота первой гармоники должны удовлетворять соотношению

$$\omega(nk_n) = n\omega(k_n) \quad (0.2)$$

В [1] изучались стационарные периодические решения (0.1) в окрестности k_3 . Показано, что разложение Стокса [4] для периодической волны в окрестности k_3 теряет смысл. Стационарные периодические решения в этом случае представляют собой сумму первой и третьей гармоник, причем для каждой фиксированной амплитуды первой гармоники существует три значения амплитуды третьей гармоники. Амплитуды первой и третьей гармоник имеют одинаковый порядок малости. В [3] изучен процесс нелинейного взаимодействия трех периодических волн. Частным случаем этого взаимодействия является взаимодействие первой и второй гармоник при выполнении (0.2) при $n=2$.

Свойства стационарных решений (0.1) имеют важное значение для изучения процессов эволюции широкого класса данных Коши. Эти решения, как правило, представляют собой конечный продукт эволюции. В [2] на основании соображений качественного характера численно получены примеры симметричных и несимметричных периодических и уединенных волн. При этом все солитоны, являющиеся гомоклиническими кривыми нулевой особой точки в фазовом пространстве, реализуются как пределы орбит, порождаемых другой особой точкой при увеличении периода. В [3] найдены точные решения (0.1) в виде солитонов и периодических волн.

В разд. 1 настоящей статьи исследуется устойчивость стационарных периодических решений малой амплитуды уравнения (0.1) в окрестности $k=k_n$. Результаты исследований согласуются с [1]. В разд. 2 исследована устойчивость периодических волн, не лежащих в окрестности резонанса. Показано, что в области неустойчивости при $\alpha=1$ могут существовать стационарные решения типа солитонов с осциллирующей структурой. В разд. 3 изучены свойства некоторых точных решений, представляющих собой периодические волны и солитоны в зависимости от характера особых точек динамической системы, вытекающей из (0.1). В разд. 4 рассмотрена эволюция быстро убывающих данных Коши.

1. Распространение длинных нелинейных волн в мелкой жидкости под ледяным покровом описывается следующим уравнением [3]:

$$\eta_t + \frac{3}{2}\varepsilon\eta\eta_x + \frac{1}{2}\kappa\eta_{xxx} + \frac{1}{2}\gamma\eta_{xxxxx} = 0 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{H}, \quad \kappa = \frac{h}{\rho_w g \lambda^2} (\sigma_0 - \sigma_{xx})$$

$$\gamma = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho_w g \lambda^4}, \quad \sigma_0 \equiv gH \left(\frac{\rho_w H}{3h} + \rho_i \right)$$

Здесь η — обезразмеренная амплитуда колебаний подледной поверхности жидкости около горизонтального положения равновесия, a — харак-

терная амплитуда волн, H — глубина жидкости, $2\pi\lambda$ — характерная длина волн, ρ_w, ρ_i — плотности жидкости и льда, h, E, ν — толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда, σ_{xx} — компонента тензора напряжений ледяного покрова. Считается, что σ_{xx} появляется за счет внешних усилий (например, воздействие ветра или давление со стороны окружающих льдов).

Для удобства исследования сделаем в (1.1) следующую замену переменных:

$$\eta \rightarrow \frac{3\gamma}{\kappa^2} \eta, \quad t \rightarrow \frac{|\kappa|}{2\gamma\sqrt{\gamma}} t, \quad x \rightarrow \sqrt{\frac{|\kappa|}{\gamma}} x \quad (1.2)$$

$$\eta_t + \varepsilon \eta \eta_x + \alpha \eta_{xxx} + \eta_{xxxx} = 0, \quad \alpha = \text{sign } \kappa$$

Решения (1.2) будем искать в виде периодических нелинейных волн Стокса [4]

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^{n-1} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}), \quad \theta = kx - \omega t \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем следующую систему уравнений:

$$a_N (-N\omega + \omega_0(Nk)) + k \sum_{N-n>1} a_n a_{N-n} n + \\ + k \sum_{n-N>1} a_n a_{n-N} n \varepsilon^{2(n-N)} - k \sum_{n>1} a_n a_{n+N} n \varepsilon^{2n} = 0 \quad (1.4)$$

$$N=1: \quad \omega(k) = \omega_0(k) + \frac{k}{a_1} \sum_{n=2}^{\infty} a_n a_{n-1} \varepsilon^{2(n-1)} \\ \omega_0(k) = -\alpha k^3 + k^5 \quad (1.5)$$

$$N>1: \quad a_N = k \Delta_N^{-1} \sum_{N-n>1} a_n a_{N-n} n + O(\varepsilon^2) \quad (1.6)$$

$$\Delta_N = N\omega_0(k) - \omega_0(Nk)$$

Из (1.6) видно, что если $\Delta_N = O(\varepsilon^{N-1})$, то $a_N = O(a_1)$ и решение в форме (1.3) теряет смысл. Разрешая это соотношение относительно k , находим

$$k = k_N = \sqrt[3]{\frac{1}{N^2 + 1}}, \quad \alpha = 1 \quad (1.7)$$

В окрестности $k = k_N$ решение (1.2) будем искать в виде

$$\eta = a_1 e^{i\theta_N} + \varepsilon a_2 e^{2i\theta_N} + \varepsilon^2 a_3 e^{3i\theta_N} + \dots + \varepsilon^2 a_{N-2} e^{i(N-2)\theta_N} + \varepsilon a_{N-1} e^{i(N-1)\theta_N} + a_N e^{iN\theta_N} + \\ + \varepsilon a_{N+1} e^{i(N+1)\theta_N} + \varepsilon^2 a_{N+2} e^{i(N+2)\theta_N} + \dots + \varepsilon^2 a_{2N-1} e^{i(2N-1)\theta_N} + \\ + \varepsilon a_{2N} e^{i2N\theta_N} + \dots + c.c. \quad (1.8)$$

$$a_i = a_i(T), \quad T = \varepsilon^2 t, \quad \theta_N = k_N x - \omega_0(k_N) t, \quad N > 2$$

Подставляя (1.9) в (1.2) с точностью до $O(\varepsilon^2)$, получаем систему уравнений, описывающую взаимодействие первой и N -й гармоник

$$\begin{aligned} ia_{1T} &= k_N^2 \left[\frac{|a_1|^2}{\Delta_2} + |a_N|^2 \left(\frac{N-1}{\Delta_{N-1}} + \frac{N+1}{\Delta_{N+1}} \right) \right] a_1 \\ ia_{NT} &= k_N^2 N \left[\frac{N-1}{\Delta_{N-1}} + \frac{N+1}{\Delta_{N+1}} \right] |a_1|^2 a_N, \quad N > 3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что $|a_1|^2 = C_1^2 = \text{const}$ и $|a_N|^2 = C_N^2 = \text{const}$. Отсюда следует, что решение (1.10) можно искать в виде

$$a_1 = C_1 \exp if_1(T), \quad a_N = C_N \exp if_N(T) \quad (1.10)$$

Из (1.10), (1.11) получаем

$$\begin{aligned} f_1 &= -k_N^2 \left[\frac{C_1^2}{\Delta_2} + C_N^2 \left(\frac{N-1}{\Delta_{N-1}} + \frac{N+1}{\Delta_{N+1}} \right) \right] T \\ f_N &= -k_N^2 N \left[\frac{N-1}{\Delta_{N-1}} + \frac{N+1}{\Delta_{N+1}} \right] C_1^2 T \end{aligned} \quad (1.11)$$

Решения (1.10), (1.11) имеют вид стационарных волн и показывают, что в случае резонанса на N -й гармонике ($N > 3$) взаимодействие между первой и N -й гармониками приводит к образованию стационарных волн, имеющих вид

$$\eta = C_1 \exp i(\theta_N + f_1(T)) + C_N \exp i(N\theta_N + f_N(T)) + c.c + O(\varepsilon)$$

причем нелинейные добавки к частотам связаны с амплитудами волн C_1 , C_2 соотношениями (1.11).

Более нетривиальными случаями резонансного взаимодействия являются резонансы на второй и третьей гармониках. В [3] было показано, что в случае $N=2$ взаимодействие первой и второй гармоник описывается уравнениями

$$ia_{1T} = \frac{3}{2\sqrt{5}} a_1^* a_2, \quad ia_{2T} + \frac{\Delta_2}{\varepsilon} a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} a_1^2 \quad (1.12)$$

$$T = \varepsilon t$$

Решение уравнений такого типа можно выписать в эллиптических функциях [3]. Оно описывает периодическую перекачку энергии между гармониками. Если в начальный момент $T=0$ существует только первая гармоника, то с течением времени вся ее энергия перейдет во вторую гармонику и при $T \rightarrow \infty$ решение будет представлять собой волну удвоенной частоты и вдвое меньшей длины.

Система (1.12) имеет стационарные решения типа (1.10), (1.11)

$$a_2 = C_1 e^{ifT}, \quad a_2 = C_2 e^{2ifT} \quad (1.13)$$

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{5}} C_2, \quad C_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \Delta_2 C_2 - C_1^2 = 0 \quad (1.14)$$

Из (1.14) видно, что при $\Delta_2 \ll O(\varepsilon)$ для каждой амплитуды имеется два значения C_2 амплитуды второй гармоники. При росте Δ_2 один из корней второго уравнения (1.14) дает значение порядка $O(\varepsilon^{-1})$ и становится нефизичным, а другой приводит к (1.6) при $N=2$.

Рассмотрим подробнее случай резонанса на третьей гармонике ($N=3$). Решение (1.2) будем искать в виде (1.8). На амплитуды a_1 , a_3 получаем

следующую систему уравнений:

$$ia_{1T} = \left(\frac{\sqrt{10}}{3} |a_1|^2 + \frac{4\sqrt{10}}{7} |a_3|^2 \right) a_1 + \sqrt{10} a_3 a_1^* \quad (1.15)$$

$$ia_{3T} + \frac{\Delta_3}{\varepsilon^2} a_3 = \frac{12\sqrt{10}}{7} |a_1|^2 a_3 + \sqrt{10} a_1^3$$

Система (1.15) имеет первый интеграл — аналог соотношений Мэнли — Роу для трехволнового взаимодействия

$$|a_1|^2 + |a_3|^2 = A^2 = \text{const} \quad (1.16)$$

Из (1.16) следует, что решение (1.15) можно искать в виде

$$a_3 = z(T) e^{if_3(T)}, \quad a_1 = \sqrt{A^2 - z^2(T)} e^{if_1(T)}$$

Подставляя эти формулы в (1.15) и отделяя действительные и мнимые части в полученных уравнениях, приходим к формулам

$$f_1' = - \left(\frac{\sqrt{10}}{3} (A^2 - z^2) + \frac{2\sqrt{10}}{7} z^2 \right) - \sqrt{10} z \sqrt{A^2 - z^2} \cos M$$

$$f_3' = - \frac{6\sqrt{10}}{7} (A^2 - z^2) - \sqrt{10} \frac{A^2 - z^2}{z} \sqrt{A^2 - z^2} \cos M - \frac{\Delta_3}{\varepsilon^2} \quad (1.17)$$

$$(z^2)' = -2\sqrt{10} \sqrt{z^2 (A^2 - z^2)^3 - \left(\frac{65}{28} z^4 - \left(\frac{5}{14} + \frac{\Delta_3}{2\varepsilon^2} \right) z^2 + C \right)^2}$$

$$\cos M = \frac{65z^4 - 10z^2 - \frac{1}{2}\Delta_3\varepsilon^{-2}z^2 + C}{28z(A^2 - z^2)\sqrt{A^2 - z^2}} \quad C = \text{const}$$

$$M \equiv f_3 - 3f_1$$

Решение (1.17) выражается через эллиптические функции и описывает периодический процесс перекачки энергии между первой и третьей гармониками. Отметим, что в данном случае перекачка происходит медленнее, чем при генерации второй гармоники, так как характерные времена первого процесса пропорциональны ε^{-2} , а второго — ε^{-1} .

Среди решений (1.17) есть стационарные решения типа (1.10). Запишем их в форме:

$$a_1 = C_1 e^{ifT}, \quad a_3 = C_3 e^{3ifT} \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.15), получаем связь между частотными добавками и амплитудами волн

$$f = - \left(\frac{\sqrt{10}}{3} C_1^2 + \frac{4\sqrt{10}}{7} C_3^2 \right) - \sqrt{10} C_3 C_1 \quad (1.19)$$

$$12C_3^3 + 21C_3^2 C_1 - 5C_3 C_1^2 + \frac{7}{\sqrt{10}} \Delta_3 / \varepsilon^2 C_3 - 7C_1^3 = 0$$

Из (1.19) следует, что при $\Delta_3 \ll O(\varepsilon^2)$ для каждого значения амплитуды $C_1 = O(1)$ существует три значения C_3 и f , что находится в полном соответствии с результатами, полученными в [1]. Если $\Delta_3 \gg O(\varepsilon)$, то два из трех значений C_3 имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$ и становятся нефизическими, третье значение корня стремится к величине, определяемой формулой (1.6) при $N=3$.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости периодических волн и слабо-модулированных волновых пакетов конечной интенсивности, волновые вектора которых не лежат в окрестности резонансных значений. Известно, что эволюция огибающих волновых пакетов, частоты которых удовлетворяют нелинейному дисперсионному соотношению (1.5), с точностью до $O(\varepsilon)$ описывается уравнением [4]:

$$i(\varphi_t + \omega_0' \varphi_x) + \varepsilon \frac{\omega_0''}{2} \varphi_{xx} - \frac{k^2}{\Delta_2} \varepsilon |\varphi|^2 \varphi = 0 \quad (2.1)$$

$$T = \varepsilon t, \quad X = \varepsilon x, \quad \omega_0' = \partial \omega_0(k) / \partial k \\ \omega_0'' = \partial^2 \omega_0(k) / \partial k^2.$$

Здесь φ — огибающая волнового пакета $\psi = \exp i(kx - \omega_0(k)t) \varphi(X, T)$, спектр которого расположен в ε -окрестности волнового числа k .

Периодические волны, которым соответствует $\varphi = C \exp ifT$, неустойчивы, если выполняется [4]

$$\omega_0'' \Delta_2 < 0 \quad (2.2)$$

Из (1.5), (2.2) получаем, что при $\kappa < 0$ периодические волны любых длин по отношению к продольным возмущениям неустойчивы. При $\kappa > 0$ устойчивы волны с волновыми числами из интервала $(1/\sqrt{5}, \sqrt{3}/\sqrt{10})$.

Неустойчивость периодической волны приводит к распаду ее огибающей на отдельные солитоны [4], условием существования которых является (2.2). Солитонные решения (2.1) будем искать в форме

$$\varphi = \zeta(X - vT) \exp i(rX + sT), \quad \zeta \rightarrow 0, \quad X \rightarrow \pm \infty \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), находим

$$\zeta = A \operatorname{ch}^{-1} B(X - vT), \quad v = \omega_0' + \varepsilon r \omega_0'' \\ A = k^{-1} \sqrt{-2R \Delta_2} \varepsilon^{-1/2}, \quad B = \sqrt{2R} (\varepsilon \omega_0'')^{-1/2} \\ R = s + \omega_0' r + 1/2 r^2 \omega_0'' \quad (2.4)$$

Постоянные A и B будут вещественными при выполнении (2.2) и соотношения $\Delta_2 R < 0$.

Заметим, что в случае совпадения скорости солитона огибающей с фазовой скоростью ω_0/k волны, бегущей под ним, волновой пакет $\psi = \varphi \exp i(kx - \omega_0 t)$ представляет собой солитон с осциллирующей структурой. Из (2.4) имеем, что данное соотношение с точностью до $O(\varepsilon)$ выполняется в окрестности k_0

$$\omega_0'(k_0) = \omega_0(k_0) / k_0$$

Из определения (1.5) находим $k_0 = 1/\sqrt{2}$ при $\kappa > 0$. Если $\kappa < 0$, то таких k_0 не существует.

3. Уравнение (1.2) далее будем записывать в виде

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (3.1)$$

Функция u связана с функцией η равенством $u = \varepsilon \eta$. Качественный анализ уравнения (3.1) показывает, что оно не является вполне интегрируемым [5]. Поэтому построение семейств существенно нестационарных решений встречается с определенными трудностями. Численный эксперимент показывает, что стационарные решения (3.1) являются конечным продуктом эволюции широкого класса данных Коши. Стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью V , описываются уравнением

$$u'''' + \alpha u'' + 1/2 u^2 - Vu = 0 \\ u' = du/d\xi, \quad \xi = x - Vt \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) эквивалентно динамической системе

$$u' = u_1, \quad u_1' = u_2, \quad u_2' = u_3, \quad u_3' = Vu - \frac{1}{2}u^2 - \alpha u_2 \quad (3.3)$$

Система (3.3) всегда имеет две особые точки $O_1(0, 0, 0, 0)$ и $O_2(2V, 0, 0, 0)$, тип которых определяется знаком α и скоростью V .

Рассмотрим сначала вопрос о существовании стационарных решений (3.1) типа ударной волны со структурой, т. е. гетероклинических кривых динамической системы (3.3). Заметим, что система уравнений (3.3) обладает первым интегралом

$$H = -\frac{1}{2}Vu^2 + \frac{1}{6}u^3 + \alpha u_1^2 + (u_1 u_3 - \frac{1}{2}u_2^2) = \text{const}$$

где H — гамильтониан системы (3.3). Связь полевых функций с каноническими переменными указана в [5]. Поверхности уровня H расслаивают фазовое пространство и являются глобальными инвариантными многообразиями динамической системы (3.3), т. е. если кривая пересекает соответствующее многообразие не в особой точке, то она целиком находится на нем. Легко видеть, что особые точки O_1 и O_2 лежат на разных поверхностях уровня H . Предположим далее, что искомая гетероклиническая кривая Γ лежит на поверхности уровня C_1 , т. е.

$$H(\xi) = C_1, \quad \xi \in \Gamma \quad (3.4)$$

При $\xi \rightarrow \pm\infty$ кривая Γ должна асимптотически стремиться к O_1 и O_2 (или O_2 и O_1) соответственно. Перейдем к пределу в (3.4) при $\xi \rightarrow +\infty$ и $\xi \rightarrow -\infty$. В результате получим $C_1 = 0$ и $C_1 = -\frac{2}{3}V^3$. Это противоречие означает, что система (3.3) не имеет гетероклинических траекторий, а уравнение (3.4) — стационарных решений типа ударной волны со структурой.

Система (3.3) допускает решение в виде [3]

$$u = -z - V_1 + V, \quad \xi = \int \frac{dz}{\sqrt{G(z)}}$$

$$G(z) = \pm \frac{4}{\sqrt{105}} z^{3/2} - \frac{4\alpha}{13} z^2 \pm \frac{2\sqrt{105}}{21} (V_1 - V_*) z^{3/2} - \frac{8}{13} \alpha (V_1 - V_*) z$$

$$V = \pm \sqrt{\frac{2}{7} \left(\frac{23}{8} V_1^2 + \frac{207}{169} V_1 + \frac{8262}{2851} \right)} \quad (3.5)$$

$$V_* = -\frac{36}{169}, \quad V_1 = \text{const}$$

Для $\alpha > 0$, $V_1 < V_*$ решение (3.5) представляет собой периодическую волну, распространяющуюся со скоростью V . Знаки первого и третьего членов в полиноме $G(z)$ совпадают. В зависимости от значения параметра скорости V (3.5) соответствует различным орбитам в фазовом пространстве динамической системы (3.3). Вековое уравнение для особых точек O_1 и O_2 имеет вид

$$\lambda^2 + \alpha\lambda \mp V = 0 \quad (3.6)$$

где знак минус соответствует точке O_1 , а плюс — точке O_2 . Тип особых точек определяется корнями векового уравнения (3.6), которые в свою очередь зависят от значения скорости V . Можно выделить следующие случаи перестройки фазового потока.

А. $0 < V < \frac{1}{4}$. Вековое уравнение для точки O_1 имеет пару мнимых и пару действительных корней, а для точки O_2 — две пары мнимых корней. При $\alpha > 0$ точка O_2 обладает двумя инвариантными двухмерными многообразиями, которые содержат семейства орбит, соответствующих каждой паре корней векового уравнения. Решение (3.5) является представителем

одного из этих семейств, порождаемых точкой O_2 : для любой малой окрестности U_ε точки O_2 найдется такое значение скорости V , что орбита (3.5) принадлежит U_ε . Заметим также, что в рассматриваемом случае точка O_1 обладает одномерными устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями. Вопрос о существовании гомоклинической структуры остается открытым.

Б. $V > 1/4$. Корни векового уравнения для точки O_1 по-прежнему состоят из пары действительных и пары мнимых значений. Вековое уравнение для точки O_2 имеет две пары комплексно-сопряженных корней. В этом случае не существует орбит, порожденных точкой O_2 , однако сделать вывод об отсутствии орбит в любой конечной окрестности точки O_2 нельзя. Решение (3.5) для $\alpha > 0$ представляет пример существования таких орбит. Если при первом и третьем членах в полиноме дробных степеней $G(z)$ стоит знак плюс, то для любого значения V из рассматриваемого диапазона проекция орбит (3.5) на плоскость (u_1, u) содержит точку O_2 и не содержит O_1 . Если перед первым и третьим членами $G(z)$ брать знак минус, то амплитуда периодических решений так велика, что соответствующая проекция орбиты в фазовом пространстве содержит как первую, так и вторую особые точки.

В. $-1/4 < V < 0$, $\alpha > 0$. Вековое уравнение для точки O_1 имеет две пары мнимых корней, т. е. существует (локально) два семейства орбит, порожденных точкой O_1 . Для любого V из рассматриваемого диапазона решения (3.5) представляют собой примеры таких орбит при любом выборе знаков в $G(z)$. Вековое уравнение для точки O_2 имеет в этом случае пару мнимых и пару вещественных корней. Это означает, что существует однопараметрическое семейство орбит для точки O_2 .

Г. $V < -1/4$. Вековое уравнение для точки O_1 имеет две пары комплексных корней. Не существует периодических движений, начинающихся в точке O_1 . Однако примеры орбит, находящихся в конечной окрестности O_1 , даются формулой (3.5). Если в $G(z)$ выбирать знак минус, то, как и в случае Б, проекция орбиты (3.5) на плоскость (u_1, u) содержит внутри обе особые точки. Для знака плюс колебания происходят около (в конечной окрестности) точки O_1 . Вековое уравнение для точки O_2 имеет два вещественных и два мнимых корня, а значит, существует двумерное инвариантное многообразие, содержащее точку O_2 и соответствующее однопараметрическое семейство орбит. Отметим, что точка O_1 в данном случае обладает двумя двухмерными инвариантными многообразиями — устойчивым и неустойчивым. Солитоны, существование которых отмечено в конце разд. 2 настоящей статьи, являются гомоклиническими кривыми, образовавшимися в результате пересечения упомянутых инвариантных многообразий. Кроме того, в [2] численно получены солитоны, также принадлежащие этому классу. Все они имеют осциллирующую структуру фронтов, так как корни векового уравнения точки O_1 имеют ненулевую мнимую часть.

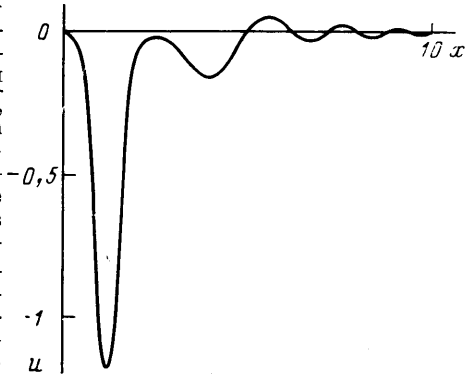
Д. $-1/4 < V < 0$. Вековое уравнение для точки O_1 имеет четыре вещественных корня. Точка O_1 , таким образом, обладает двумя двухмерными устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями. Солитоны, образующиеся в результате пересечения этих многообразий, имеют гладкую структуру фронтов. В [3] получен пример такого солитона

$$u = -\frac{105}{169} \operatorname{ch}^{-4} \left[\frac{1}{\sqrt{52}} (x + V \cdot t) \right] \quad (3.7)$$

Отметим, что (3.7) является следствием (3.5) при $V_1 = V_*$. Все солитоны в рассматриваемом случае, как это отмечено в [2], имеют отрицательную амплитуду. Соответствующие им гомоклинические кривые в фазовом пространстве реализуются как пределы орбит однопараметрического семейства, порождаемого точкой O_2 (в этом случае вековое уравнение для

точки O_2 имеет пару мнимых и пару действительных корней) при увеличении их периода. Кроме солитона (3.7) существуют другие солитоны, которые удастся получить численно. В частности, в разд. 4 рассматривается эволюция быстро убывающих данных Коши, в результате распада которых выделяется солитон, имеющий гладкую структуру фронта и отличный от (3.7). Вообще говоря, представляется вероятным, что гомоклинические кривые в случае Г и Д грубы. В самом деле, двумерные инвариантные многообразия целиком лежат на гиперповерхности $H=0$, а если две двумерные поверхности в трехмерном пространстве пересекаются при каком-либо значении параметра V_0 , то можно ожидать, что они будут пересекаться при близких к V_0 значениях параметра.

4. В рассматриваемом примере отрицательная скорость движения стационарной конфигурации реализуется для возмущений, амплитуда которых меньше нуля. Факт существования солитонов отрицательной амплитуды, рассмотренных в разд. 3, должен приводить к распаду ряда возмущений на стационарную составляющую — солитон и волны ряби. В качестве величины, характеризующей величину начального возмущения, выберем параметр σ для уравнения КдВ, имеющий вид $\sigma = l\sqrt{u_0}/\kappa$, где l — характерная ширина, u_0 — высота возмущения, а κ — коэффициент дисперсии. Рассмотрены возмущения, для которых величина параметра σ была меньше отвечающего появлению двух солитонов в КдВ. На фигуре приведена картина эволюции возмущения $\varphi = -\exp(-1\sqrt{5}2x^2)$, значение -1 соответствует амплитуде солитона (3.7). Видно, что солитон, полученный в результате численного счета, отличается от солитона, полученного аналитически. С течением времени солитон с постоянной скоростью убегает влево от волнового пакета (все процессы рассматриваются в системе, движущейся с фазовой скоростью бесконечно длинных волн). Обнаруженные для рассматриваемого класса данных Коши эффекты во многом аналогичны эффектам, описываемым уравнением КдВ.



ЛИТЕРАТУРА

1. Haupt S. E., Boyd J. P. Modeling nonlinear resonance: A modification to the Stokes perturbation expansion // J. Wave Motion. 1988. V. 10. P. 83–98.
2. Zufiria J. A. Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 183–206.
3. Марченко А. В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–235.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
5. Korobeinikov V. P.; Ivichev A. T. On some methods of qualitative investigation of one dimensional evolution equations in continuum mechanics in Contributions to Nonlinear Wave Motion. London. Lougmah. 1988. С. 129–147.

Москва

Поступила в редакцию
31.XII.1987