

УДК 532.516.5

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА И БИНАРНЫХ  
СМЕСЕЙ В СТОКЕ

ГУСЕВ В. Н., ХМЕЛЬНИЦКАЯ Е. В.

Класс точных решений одномерных уравнений Навье – Стокса, соответствующих течениям газа от сферического источника или стока, исследовался аналитически и численно в ряде работ (см., например, [1, 2]). Ниже решение для стока рассматривается при наличии теплообмена с окружающей средой. Помимо поиска самого решения, это исследование было предпринято с целью установления условий предельного перехода вязкого течения в стоке к невязкому при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. Как было показано в [3], при нулевом тепловом потоке в бесконечно удаленной точке такой предельный переход для течения в стоке отсутствовал. Подробно исследуются особенности течения бинарной смеси газов в стоке. Получено асимптотическое решение в трансзвуковой области течения.

1. В соответствии с [4] исходная система одномерных уравнений Навье – Стокса для однотемпературной смеси газов в случае сферической симметрии дана в работе [2]. После исключения давления и плотности она имеет следующий безразмерный вид:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dy} + \frac{1}{\gamma} \frac{F_\infty}{F} \left[ \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dy} - \frac{1}{w} \frac{dw}{dy} + \frac{2}{y} - \frac{(1-\varepsilon)}{F} \frac{df}{dy} \right] \frac{\theta}{w} = \\ = - \frac{1}{C} \left[ \theta^n \left( \frac{d^2w}{dy^2} - \frac{2w}{y^2} \right) + n\theta^{n-1} \frac{d\theta}{dy} \left( \frac{dw}{dy} + \frac{w}{y} \right) \right] \\ \left[ \frac{Q_1}{Q} + \left( 1 - \frac{Q_1}{Q} \right) \varepsilon^{-1} \right] F_\infty \theta + (\gamma-1) w^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\theta^n}{yC} \right) + \\ + \frac{\theta^n}{C} \left[ \frac{3}{4 \text{Pr}_\infty} \left( \frac{F_\infty}{F} \right)^2 \frac{d\theta}{dy} + (\gamma-1) w \frac{dw}{dy} \right] + \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta_\infty F_\infty^2 \theta \left( \frac{Q_1}{Q} - \frac{f}{F} \right) \varepsilon^{-1} = \alpha \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q} - \frac{f}{F} = \frac{3\varepsilon}{4 \text{Sc}_\infty F_\infty F} \frac{\theta^n}{C} \left\{ f(1-f) \left[ \left( \frac{1}{w} \frac{dw}{dy} - \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dy} - \frac{2}{y} \right) \frac{1-\varepsilon}{F} + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_\infty \frac{F_\infty}{F} \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dy} \right] + \frac{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon^2)f}{F^2} \frac{df}{dy} \right\} \end{aligned}$$

$$C = \frac{3Q}{16\pi\mu_\infty l}, \quad \alpha = 1 + \frac{q_\infty}{c_p T_\infty Q}$$

$$w = \frac{u}{\sqrt{\gamma T_\infty R_0/m_\infty}}, \quad p' = \frac{p}{p_\infty}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_\infty} = \theta^n, \quad y = \frac{l}{r} = \sqrt{\frac{|Q| \sqrt{\gamma T_\infty R_0/m}}{4\pi\gamma p_\infty} \frac{1}{r}}$$

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_\infty} = \frac{m}{m_\infty} = \frac{\varepsilon + (1-\varepsilon)f}{\varepsilon + (1-\varepsilon)f_\infty} = \frac{F}{F_\infty}$$

$$\frac{\beta}{\beta_{\infty}} = \frac{F_{\infty}}{F} \quad \frac{Sc}{Sc_{\infty}} = \frac{F_{\infty}}{F}, \quad F = \varepsilon + (1 - \varepsilon)f, \quad f = \frac{\rho_1 m}{\rho m_1}$$

Здесь  $r$  — расстояние от центра симметрии;  $u, p, T$  — скорость, давление и температура;  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  — плотность;  $Q = Q_1 + Q_2 = 4\pi r u r^2$  — расход газа;  $f$  — концентрация;  $m = m_1 f + m_2(1 - f)$  — молекулярная масса;  $R_0$  — универсальная газовая постоянная;  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $C_p = \gamma R_0 / (\gamma - 1) m$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей;  $D_{12}$  — коэффициент диффузии;  $\beta$  — термодиффузионный фактор;  $Pr$  — число Прандтля;  $Sc$  — число Шмидта;  $\alpha$  и  $Q_1/Q$  — безразмерные константы, определяющие тепловой и диффузионный потоки, проходящие через сферическую поверхность в единицу времени в бесконечно удаленной точке. Индексом 1 обозначен компонент с большей относительной молекулярной массой, индексом 2 — с меньшей, индексом  $\infty$  — величины в бесконечно удаленной точке  $r = \infty$  ( $y = 0$ ), которые должны быть заданы в качестве граничных условий. В случае стока, когда газ движется к центру симметрии  $C < 0$ .

В окрестности бесконечно удаленной точки  $y = 0$  решение системы (1.1), для которого давление стремится к конечному значению, имеет вид

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^{i+2}; \quad \theta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i y^i; \quad j = \sum_{i=0}^{\infty} c_i y^i \quad (1.2)$$

Из уравнения неразрывности  $Q = 4\pi r u r^2$  и граничных условий для температуры  $T = T_{\infty}$  и концентрации  $f = f_{\infty}$  при  $y = 0$  следует, что  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $c_0 = f_{\infty}$ . Последующие коэффициенты этих рядов однозначно определяются через параметры  $\alpha, C, Q_1/Q, \gamma, n, Pr_{\infty}, Sc_{\infty}, \beta_{\infty}, f_{\infty}, \varepsilon$ , например:

$$a_1 = b_1 - \frac{1 - \varepsilon}{F_{\infty}} c_1$$

$$b_1 = \frac{4}{3} Pr_{\infty} \frac{\gamma - 1}{\gamma} C \left\{ \frac{\alpha \gamma}{\gamma - 1} - \frac{\gamma F_{\infty}}{\gamma - 1} \right] \frac{Q_1}{Q} + \left( 1 - \frac{Q_1}{Q} \right) \frac{1}{\varepsilon} \right] - \frac{\beta_{\infty} F_{\infty}^2}{\varepsilon} \left( \frac{Q_1}{Q} - \frac{f_{\infty}}{F_{\infty}} \right) \right\}$$

$$c_1 = \frac{4}{3} Sc_{\infty} \frac{F_{\infty}^2}{\varepsilon} C \left( \frac{Q_1}{Q} - \frac{f_{\infty}}{F_{\infty}} \right) - f_{\infty} (1 - f_{\infty}) \beta_{\infty} b_1$$

В случае когда тепловой и диффузионный потоки в бесконечно удаленной точке отсутствуют ( $b_1 = c_1 = 0$ ),  $\alpha = 1$  и  $Q_1/Q = f_{\infty}/F_{\infty}$ .

Численное решение системы уравнений (1.1) строилось следующим образом. В окрестности точки  $y = 0$  решение представлялось рядами (1.2), коэффициенты которых вычислялись методом работы [5]. В дальнейшем, начиная с некоторого конечного  $y$ , интегрирование проводилось методом Хемминга. Такой подход ранее неоднократно использовался при решении одномерных уравнений Навье — Стокса (см. [2, 3]). При численном интегрировании этот метод позволяет достаточно далеко отходить от особых точек исходной системы уравнений и решать задачу Коши.

2. Начнем рассмотрение течения в сферическом стоке на примере однокомпонентного газа ( $f_{\infty} = 1, Q_1/Q = f_{\infty}/F_{\infty} = 1$ ).

В случае идеального газа ( $C = -\infty$ ) из системы (1.1) получаем решение

$$w(1 - 1/2(\gamma - 1)w^2)^{1/(\gamma - 1)} = y^2; \quad \theta + 1/2(\gamma - 1)w^2 = 1 \quad (2.1)$$

Область его определения ограничена предельной линией  $y_{*i}$ , на которой скорость газа достигает скорости звука. В область  $y > y_{*i}$  рассматриваемое течение продолжено быть не может, и переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой в нем не происходит.

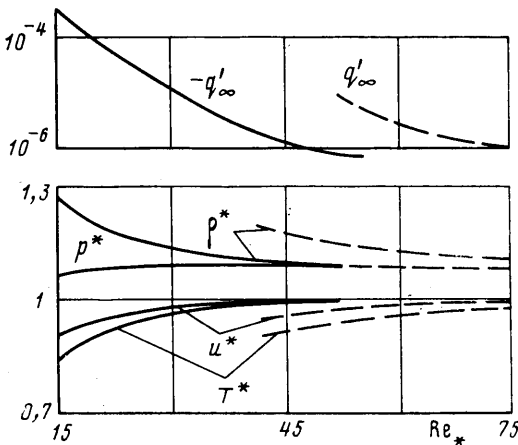
При наличии вязкости при линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры аналогичное решение было построено в [1]. Его

анализ при  $\alpha=1$  показал, что оно также ограничено предельной линией  $y_0$ , но с другими граничными условиями на ней, обусловленными нулевым значением температуры.

В общем случае при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры  $\mu'=\theta^n$  решение было получено ниже. В окрестности предельной линии  $y_0$  оно имеет следующее разложение:

$$w=w_0+c_1(y_0-y)^{1/(n+1)}+c_2(y_2-y)+\dots, \quad \theta=d_1(y_0-y)^{1/(n+1)}+\dots$$

При  $w_0=0$  течение в стоке является течением сжатия, при  $w_0 \neq 0$  — течением разрежения с переходом через скорость звука. Однако при нулевом тепловом потоке в бесконечно удаленной точке ( $\alpha=1$ ) построенный



Фиг. 1

класс решений уравнений Навье — Стокса при предельном переходе  $C \rightarrow -\infty$  не содержит решения (2.1), соответствующего течению невязкого газа. Последнее, так же как и в случае  $n=1$  [3], может быть получено лишь в классе решений с конечным значением теплового потока в бесконечно удаленной точке при двойном предельном переходе  $C \rightarrow -\infty$ ,  $\alpha \rightarrow 1$ . В поле интегральных кривых этому особому решению соответствует сепаратриса, проходящая через седловую точку и разделяющая интегральные кривые на два семейства, соответствующие течениям сжатия ( $w_0=0$ ) и разрежения ( $w_0 \neq 0$ ). Для течений разрежения это решение является предельным: при фиксированном значении  $\alpha \neq 1$  параметр  $|C|$  на сепаратрисе максимален. При стремлении  $\alpha \rightarrow 1$  величина  $|C| \rightarrow \infty$ .

Поиск сепаратрисы при численном интегрировании системы (1.1) при малых отличиях параметра  $\alpha$  от единицы требует высокой расчетной точности численного метода. В рассмотренном в работе [3] примере она оказалась недостаточной и в приведенных ниже расчетах была увеличена.

Для параметров потока на звуковой линии  $r=r_*$  результаты этих расчетов представлены на фиг. 1 ( $\gamma=1,4$ ,  $n=1$ ,  $Pr=0,75$  — сплошные линии;  $\gamma=1,67$ ,  $n=0,75$ ;  $Pr=0,431$  — штриховые линии). На ней дано изменение критических значений скорости  $u^*=u_*/u_{*i}$ , плотности  $\rho^*=\rho_*/\rho_{*i}$ , температуры  $T^*=T_*/T_{*i}$  и давления  $p^*=p_*/p_{*i}$ , отнесенных к соответствующим значениям этих параметров для идеального газа, в зависимости от числа Рейнольдса  $Re_*= \rho_* u_* r_* / \mu_*$ . Там же приведено значение теплового потока  $q_\infty' = q_\infty / c_p T_\infty Q$  в бесконечно удаленной точке  $r=\infty$ .

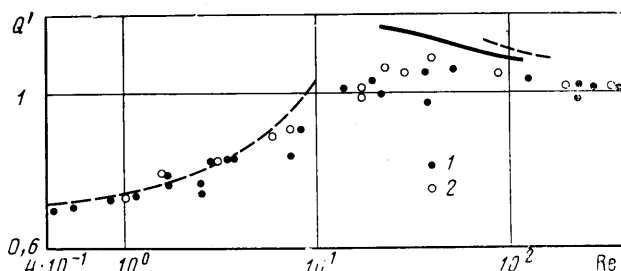
Как следует из приведенных данных, в вязком теплопроводном газе разгон потока до скорости звука в течении от стока реализуется при конечном значении теплового потока в бесконечно удаленной точке. При этом в зависимости от переносных свойств газа этот процесс может сопровождаться как подводом, так и отводом тепла на бесконечности. В рассмотренных случаях: для одноатомного газа  $q_\infty' > 0$ , для двухатомного  $q_\infty' < 0$ . По мере увеличения числа  $Re_*$  тепловой поток  $q_\infty' \rightarrow 0$  и критические значения параметров потока на звуковой линии стремятся к соответствующим значениям для идеального газа.

При наличии вязкости и теплопроводности критические значения скорости  $u_*$  и температуры  $T_*$  на звуковой линии стока оказываются меньше, а плотности  $\rho_*$  и давления  $p_*$  — больше соответствующих значений для идеального газа. Особенно заметным становится здесь увеличение плотно-

сти газа. Это обстоятельство при малых числах Рейнольдса приводит к увеличению расхода газа  $Q$  в стоке по сравнению с его предельным значением  $Q_i$  для идеального газа. Ранее это явление наблюдалось в эксперименте при измерении расхода газа через круглое отверстие в плоской стенке [6]. Сопоставление этих экспериментальных данных с расчетными приведено на фиг. 2 (сплошные линии — двуатомный газ, штриховые — одноатомный). При  $Re < 10$  приведенные на фиг. 2 расчетные значения  $Q' = Q/Q_i$  для стока были получены при численном интегрировании модельного кинетического уравнения [7]. При сравнении полагалось, что экспериментальное значение числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho_\infty D}{\mu_\infty} \left( \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right)^{1/2} = \frac{2\rho_\infty r_*}{\mu_\infty} (R_0 T_\infty)^{1/2}$$

При количественном сравнении экспериментальных данных (1 — аргон Ar, гелий He, 2 — азот  $N_2$ ) с расчетными следует иметь в виду, что опыты

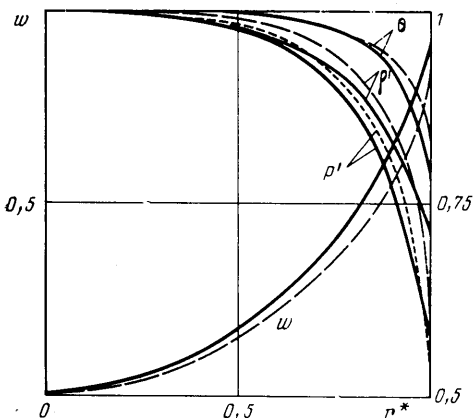


Фиг. 2

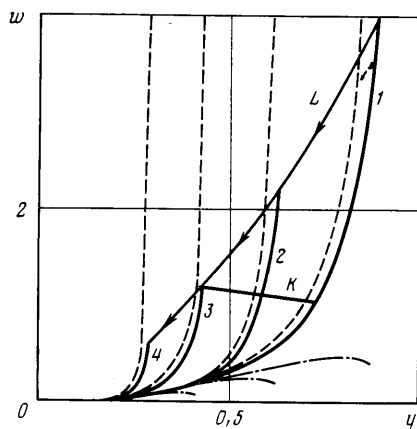
проводились при истечении газа через отверстие в плоской стенке, в то время как приведенные решения относятся к одномерному течению от стока. При наличии стенок за счет вытесняющего действия пограничного слоя наблюдаемое в эксперименте увеличение расхода газа через отверстие при умеренно малых числах  $Re$  будет меньше расчетного. При стремлении числа  $Re \rightarrow 0$ , когда течение приближается к свободномолекулярному, влияние стенок становится несущественным, и расчетные значения расхода для стока достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Приведенные на фиг. 1 изменения критических параметров потока на звуковой линии стока при малых числах Рейнольдса указывают на существенное влияние на течение процессов теплообмена. Нагляднее это влияние можно проследить по изменениям параметров потока в поле течения. При  $Re_* = 29,6$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $n = 1$ ,  $Pr = 0,75$  они даны на фиг. 3 в виде зависимостей скорости  $w$ , температуры  $\theta$ , плотности  $\rho'$  и давления  $p'$  от координаты  $r^* = r_*/r$  (сплошные линии). Аналогичные зависимости для идеального газа приведены на фигуре штриховыми линиями. Сравнение показывает, что несмотря на диссипацию, отвод тепла на звуковой линии стока вызывает уменьшение температуры газа во всем поле течения. Только при очень малых числах Рейнольдса необратимый процесс диссипации кинетической энергии в тепловую приводит к увеличению температуры газа внутри поля течения. В приведенных расчетах оно было зафиксировано при  $Re_* = 14,1$  и составляло  $T/T_\infty = 1,001$ . Что же касается других параметров потока, таких как скорость, плотность и давление, то они в поле течения от стока могут быть как больше, так и меньше соответствующих значений для идеального газа (фиг. 3).

3. Перейдем к анализу течения бинарной смеси газов от стока. Рассмотрим особенности такого течения на примере аргоно-гелиевой смеси ( $\gamma = 1,67$ ,  $n = 0,75$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ).



Фиг. 3

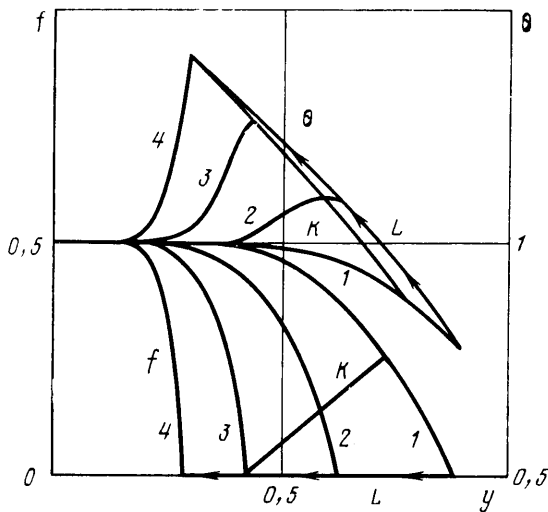


Фиг. 4

В отсутствие теплового и диффузионного потоков в бесконечно удаленной точке ( $\alpha=1$ ,  $Q_1/Q=f_\infty/F_\infty$ ) общая картина поля интегральных кривых в зависимости от параметра  $C$ , полученная в результате численного интегрирования системы (1.1) при  $f_\infty=0,5$ , представлена на фиг. 4, 5 (кривые 1–4 соответствуют  $C=-10$ ;  $-25$ ;  $-50$ ;  $-90$ ). Как и прежде, область определения искомого решения ограничена предельной линией  $L$ . Однако в отличие от однокомпонентного газа граничные условия на ней обусловлены нулевым значением не температуры, а концентрации, вследствие чего на этой линии обращается в бесконечность производная от скорости тяжелой компоненты. При этих граничных условиях в течении от стока происходит ускорение тяжелой компоненты смеси  $w_1 > w > w_2$  ( $w_1$  — штриховые линии,  $w_2$  — штрихпунктирные линии на фиг. 4). При малых абсолютных значениях параметра  $|C|$  течение в стоке сопровождается отводом тепла на предельной линии, при больших — подводом. В последнем случае температура газа в поле течения  $\theta > 1$ .

В зависимости от параметра  $C$  течение разрежения бинарной смеси газов в окрестности предельной линии  $L$  может быть как дозвуковым, так и сверхзвуковым. Переход через скорость звука в течении происходит на кривой  $K$ . Так же как и для однокомпонентного вязкого газа, здесь оказывается возможным непрерывный переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости потока. При заданной начальной концентрации  $f_\infty$  переход от сверхзвуковых режимов течения в стоке к дозвуковым происходит при некотором значении параметра  $C_*$ . Звуковая линия в этом случае совпадает с предельной. Для аргоно-гелиевой смеси при  $f_\infty=0,5$  величина  $C_* = -50$ . С ростом начальной концентрации  $f_\infty$  абсолютное значение  $|C_*|$  увеличивается. Однако, так же как и в случае однокомпонентного газа, при нулевых значениях теплового и диффузионного потоков в бесконечно удаленной точке в полученном классе решений уравнений Навье — Стокса для стока при  $|C| \rightarrow \infty$  отсутствует решение уравнений Эйлера (2.1). Это связано с неоднозначным выбором граничных условий для теплового потока для уравнений Навье — Стокса [3]. В рассмотренном случае  $\alpha=1$  и  $Q_1/Q=f_\infty/F_\infty$  полученное решение уравнений Навье — Стокса соответствует течению с подводом тепла на предельной линии стока, предельное же решение уравнения Эйлера необходимо искать в классе решений уравнений Навье — Стокса с отводом тепла на предельной линии. В окрестности звуковой линии это решение может быть построено асимптотически.

Переходя в исходной системе уравнений (1.1) к новым зависимым и независимым переменным, обезразмеренным относительно своих значений



Фиг. 5

в критическом сечении идеального стока,

$$V = R^{1/2}(1-v), \quad G = R^{1/2}(t-1), \quad \Phi = R^{2/3}(f-f_{*i}), \quad X = R^{1/2}(1-x)$$

$$v = \frac{u}{\sqrt{\gamma T_{*i} R_0 / m_{*i}}}, \quad t = \frac{T}{T_*}, \quad x = \frac{r_{*i}}{r}, \quad R = \frac{3}{4} \text{Re}_{*i} = \frac{3\rho_{*i} u_{*i} r_{*i}}{4\mu_{*i}}$$

и устремляя  $R \rightarrow \infty$ , получим систему, совпадающую с ранее полученной для источника [2]. Ее решение после сращения с решением для идеального газа (2.1) при  $X \rightarrow \infty$  выражается через бесселевы функции

$$V = 2 \sqrt{\frac{X}{\gamma+1}} \frac{I_{-\gamma/3}(\delta) - I_{\gamma/3}(\delta)}{I_{-\gamma/3}(\delta) + I_{\gamma/3}(\delta)} \quad (X > 0), \quad V = 2 \sqrt{\frac{|X|}{\gamma+1}} \frac{J_{-\gamma/3}(\delta) + J_{\gamma/3}(\delta)}{J_{-\gamma/3}(\delta) + J_{\gamma/3}(\delta)} \quad (X < 0)$$

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{A} |X|^{1/2}$$

При  $X \rightarrow \infty$  полученное решение имеет вид

$$V = 2 \sqrt{\frac{X}{\gamma+1}} \left( 1 + \frac{A}{4\sqrt{\gamma+1}} \frac{1}{X^{1/2}} + \dots \right)$$

С уменьшением числа Рейнольдса в отличие от рассмотренного выше случая с подводом тепла (см. фиг. 5) при его отводе концентрация смеси в окрестности звуковой линии стока увеличивается

$$(f - f_{*i}) = R^{-2/3} \Phi \sim R^{-2/3} \frac{dV}{dX} \sim R^{-2/3} X^{-1/2} \sim R^{-1} > 0$$

Скорости компонент

$$v_1 = v \left( 1 - \frac{\varepsilon}{f_{\infty} F_{\infty}} R^{-2/3} \Phi \right), \quad v_2 = v \left( 1 + \frac{R^{-2/3} \Phi}{F_{\infty} (1 - f_{\infty})} \right)$$

и в этом случае в течении от стока происходит ускорение легкой компоненты  $v_2 > v > v_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В. Н., Жбакова А. В. Об одном точном решении одномерных уравнений Навье – Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 109–112.
2. Гусев В. Н., Рябов В. В. Сферическое расширение бинарной смеси газов в затопленное пространство // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 108–117.
3. Гусев В. Н., Жбакова А. В. Сток в вязком теплопроводном газе // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. V. № 6. С. 23–29.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
5. Николаев В. С. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом разложения в степенные ряды на быстродействующих вычислительных машинах // Журн. вычисл. математ. и мат. физики. 1965. № 4. С. 608–614.
6. Liermann H. W. Gaskinetics and gasdynamics of orifice flow. J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 1.
7. Шахов Е. М. Установившееся течение разреженного газа от сферического источника или стока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 58–66.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VII.1987