МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1989

УДК 532.51.013.4:537.2

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ КАПЛИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ГРИГОРЬЕВ А. И.

Вопрос об устойчивости поверхности жидкости в постоянных электрических полях давно привлекает внимание исследователей в связи с многочисленными применениями в самых различных разделах физики и техники от электрического распыливания топлив и лакокрасочных материалов до жидкометаллических источников ионов и теории грозового электричества (см., например, [1–4] и цитируемую там литературу). Достаточно подробно исследовался также вопрос об устойчивости поверхности жидкости в переменном электрическом поле для случаев плоской и цилиндрической геометрии (см., например, обзор [5]). Устойчивость поверхности жидкости в переменном электрическом поле в случае сферической границы раздела до сих пор не изучена, несмотря на то, что она представляет значительный интерес как в связи с задачами электродиспергирования жидкости и получения потоков монодисперсных капель [1–3], так и в связи с геофизическими приложениями к проблеме краткосрочного предсказания землетрясений [6] и объяснения таких непонятных атмосферных электрических явлений, как плоская молния, беззвучный импульсный разряд на верхней кромке грозовых облаков, или слабое свечение туманов и облаков, известное под названием «курильского света». Единственным исключением является интересная работа [7], в которой рассмотрена задача об устойчивости сферической капли, поддерживаемой при периодически изменяющемся со временем потенциале.

В настоящей работе при решении задачи об устойчивости капиллярных волн в капле, помещенной в переменное электрическое поле, капля с бесконечным набором капиллярных волн трактуется в соответствии с подходом Рэлея как колебательная система с бесконечным числом обобщенных координат, в качестве которых выступают амплитуды разных мод. Рассмотрение на стадии постановки задачи проводится по общей схеме, использованной в [7, 8].

1. Сферическая капля несжимаемой идеальной, идеально проводящей жидкости радиусом R, плотностью ρ, с коэффициентом поверхностного натяжения σ в вакууме помещена в однородное переменное электрическое поле: $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos\omega_0 t$. Пусть в капле существует волновое движение с потенциалом скоростей $\psi=\psi(\mathbf{r},\ t)$. Учтем, что скорость движения жидкости в капле не превышает звуковой и тем более скорости распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме, и электрическое поле индуцированных в капле зарядов будем описывать уравнениями электростатики. Будем считать, что ω_0 по порядку величины близка к одной из собственных частот капиллярных волн в капле и что значение E_0 много меньше критического значения E_*, при котором в электростатическом поле проявляется неустойчивость Тонкса – Френкеля ($E_*^2R\sigma^{-1}\ll 2{,}6$). При таких условиях капля будет совершать малые колебания возле сферы. В сферической системе координат, связанной с центром капли, уравнение поверхности капли, возмущенной волновым движением, естественно принять симметричным относительно $\mathbf{E}_0$ (угол θ будем отсчитываать от $\mathbf{E}_0$) в виде:

$$r(\theta,\ t)=R+\xi(\theta,\ t)\qquad |\xi|\ll R$$

Из условия постоянства объема и неподвижности центра масс легко найти [7]

$$\int\limits_0^\pi \xi(\theta,t)\sin\theta\,d\theta=0;\qquad \int\limits_0^\pi \xi(\theta,t)\cos\theta\sin\theta\,d\theta \qquad (1.1)$$

Электрический потенциал Φ_* индуцированного в капле заряда естественно искать в виде $\Phi_*=\Phi_0+\delta\Phi$, где $\Phi_0=E_0R(R/r)^2\cos\theta\cos\omega_0 t$ — потенциал поля заряда, индуцированного в сферической капле, а $\delta\Phi$ — добавка, возникающая из-за искажения формы капли, в приближении $|\xi|\ll R$, являющаяся решением задачи

$$\begin{gathered}\Delta(\delta\Phi)=0\\ r=R:\quad \delta\Phi=(\xi\nabla)\Phi_0\approx-3E_0\xi\cos\theta\cos\omega_0 t\\ r\to\infty:\quad \delta\Phi\to 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Решение (1.2) с учетом (1.1) представим в виде

$$\delta\Phi=-3E_0\cos\omega_0 t\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\mathscr{P}_n$$

$$A_n(t)=\int_0^{\pi}\xi(\theta,t)\mathscr{P}_n\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

где P_n — нормированные полиномы Лежандра.

Тогда суммарный потенциал поля в окрестности капли имеет вид

$$\Phi=-E_0\cos\omega_0 t\left\{\left[1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]r\cos\theta+3\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\mathscr{P}_n\right\} \tag{1.3}$$

Чтобы выписать давление электрического поля $p_E=E^2/8\pi$ на поверхность капли в приближении $|\xi|\ll R$, необходимо знать напряженность поля в окрестности поверхности капли. Раскладывая, как и в задаче (1.2), уравнение границы по степеням $|\xi|/R$ в линейном приближении, найдем

$$\mathbf{E}|_{R+\xi}\approx[\mathbf{E}+(\xi\nabla)\mathbf{E}]|_R\approx 7-\left[\nabla\Phi+\xi(\theta,t)\frac{\partial}{\partial r}(\nabla\Phi)\right]\Big|_R \tag{1.4}$$

где выражение для потенциала Φ определяется (1.3), а вектор смещения произвольной точки поверхности ξ в приближении волн бесконечно малой амплитуды — соотношением $\boldsymbol{\xi}=\xi(\theta,t)\mathbf{n}_r$, $\mathbf{n}_r$ — орт радиальной координаты. Подставляя (1.3) в (1.4), а полученный результат в выражение для давления электрического поля, найдем

$$\begin{gathered}r=R:\ p_E=-\frac{E^2}{8\pi}=-\frac{E_n^2}{8\pi}\approx-\frac{E_r^2}{8\pi}\approx-\frac{9E_0^2\cos\omega_0 t}{8\pi}\left\{\left(1-\frac{8\xi}{R}\right)\cos^2\theta-\right.\\ \left.-\frac{2}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_n\cos\theta\mathscr{P}_n\right\}\end{gathered} \tag{1.5}$$

Потенциал скоростей ψ должен быть гармонической функцией внутри капли, а на поверхности капли удовлетворять известным граничным условиям

$$\Delta\psi=0 \tag{1.6}$$

$$r=R:\ \frac{\partial\xi}{\partial t}\approx\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\frac{R\rho}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\left[2+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\frac{\xi}{R}+2-\frac{p_0R}{\sigma}-\varepsilon\cos^2\omega_0 t\left\{4\frac{\xi}{R}\cos^2\theta+\right. \tag{1.7}$$

$$+\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_n\cos\theta\,\mathscr{P}_n\Big\}=0,\qquad \varepsilon=\frac{9E_0^2R}{4\pi\sigma}$$

где p_0 — внутреннее давление в жидкости.

Решение задачи (1.6)—(1.7) ищем в виде

$$\xi(\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(t)\mathscr{P}_n,\qquad \psi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)\left(\frac{r}{R}\right)^n\mathscr{P}_n$$

где U_n и V_n — величины одного порядка малости. Найдем в линейном по $|\xi|/R$ приближении связь между коэффициентами U_n и V_n с учетом вида коэффициентов $A_n(t)$

$$\frac{\partial U_n}{\partial t}=nV_n\frac{1}{R}$$

$$\frac{R\rho}{\sigma}\frac{\partial V_n}{\partial t}+\frac{(n-1)(n+2)}{R}U_n-\frac{\cos^2\omega_0 t}{R}\{(n+4)a_nU_{n-2}+[(n+4)b_n+$$

$$+2\lambda_n]U_n+(n+6)c_nU_{n+2}\}\varepsilon=f_n$$

$$\lambda_n=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\qquad b_n=\frac{2n^2-2n-1}{(2n+3)(2n-1)}$$

$$a_n=\frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)}},\qquad c_n=\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}}\tag{1.8}$$

$$f_n=-\left(2-\frac{p_0R}{\sigma}\right)-\frac{1}{\sqrt{8}}\varepsilon\cos^2\omega_0 t\qquad n=0$$

$$f_n=-\frac{1}{\sqrt{10}}\varepsilon\cos^2\omega_0 t\qquad n=2,\qquad f_n=0\qquad n>2$$

Из (1.8) в частности видно, что $U_0=\text{const}$. Учтем также, что в системе отсчета, связанной с центром капли $U_1=0$ [9]. В системе (1.8) перейдем к безразмерным переменным $X_n=U_n/R$ и $\tau=t\sqrt{\sigma/\rho R^3}$ и, заменив $\cos^2\omega_0 t$ на $0{,}5(1+\cos 2\omega_0 t)$, получим систему неоднородных уравнений типа Матье, описывающих изменение во времени формы капли

$$\frac{d^2X_n}{d\tau^2}+\omega_n^2(1-\varepsilon B_n\cos 2\omega_*\tau)X_n-\varepsilon(1+\cos 2\omega_*\tau)(K_nX_{n-2}+L_nX_{n+2})=\varepsilon F_n$$

$$(n\geqslant 2)$$

$$\omega_*^2=\omega_0^2\frac{\rho R^3}{\sigma},\qquad K_n=0{,}5n(n+4)a_n$$

$$L_n=0{,}5n(n+6)c_n,\quad \Gamma_n=[2\lambda_n+(n+4)b_n],\quad B_n=0{,}5n[(n+4)b_n+2\lambda_n]\omega_n^{-2}\tag{1.9}$$

$$\omega_n^2=n[(n-1)(n+2)-0{,}5\varepsilon\Gamma_n],\qquad F_n=-(1+\cos 2\omega_*\tau)/2\sqrt{10}\qquad (n=2)$$

$$F_n=0\quad (n>2)$$

2. Примем теперь, что при данных σ и R амплитудное значение поля E_0 таково, что $\varepsilon\ll 1$. Тогда в соответствии с (1.9) коэффициенты связи n-й моды с $(n-2)$-й и $(n+2)$-й, а также связность мод μ_i будут [10]

$$\beta_1\approx\varepsilon\frac{K_n}{\omega_n\omega_{n-2}},\qquad \beta_2\approx\varepsilon\frac{L_n}{\omega_n\omega_{n+2}}$$

$$\mu_1=\frac{\omega_n^2-\omega_{n-2}^2}{\omega_n\omega_{n-2}},\qquad \mu_2=\frac{\omega_{n+2}^2-\omega_n^2}{\omega_n\omega_{n+2}}$$

Отсюда несложно видеть, что условия $\beta_i \ll \mu_i$ ($i=1$; 2) будут выполняться для любых значений n, что согласно общей теории связанных колебаний [10] означает малость взаимодействия между модами. Что согласуется и с данными [3], где решалась задача о спектре собственных частот капли в постоянном поле.

Анализ системы (1.9) стандартным методом многих масштабов в первом порядке теории возмущений по ε дает четыре типа независимых решений. Решения первого типа соответствуют резонансному линейному нарастанию со временем амплитуды n-й моды капиллярных волн при $\omega_n \approx 2\omega_*$, связанному с неоднородностью (1.9). При учете вязкости амплитуды резонансно возбужденных мод остаются конечными [10] и неустойчивость капли не имеет места. Решения второго типа соответствуют экспоненциальному росту во времени одновременно n-й и $(n-2)$-й мод, когда $\omega_n - \omega_{n-2} \approx 2\omega_*$. Решения третьего типа также соответствуют одновременному экспоненциальному росту двух мод: n-й и $(n+2)$-й при $\omega_{n+2} - \omega_n \approx \approx 2\omega_*$. Однако ширины резонансных зон, в которых возможны неустойчивости капиллярных волн, связанные с решениями двух последних типов, весьма малы: $\sim\varepsilon$, в соответствии с малостью β_i также малы и инкременты нарастания неустойчивостей, а следовательно, мала и вероятность их реализации. И, наконец, решения четвертого типа, с которыми и следует связать явление параметрической неустойчивости капель в переменных электрических полях, соответствуют экспоненциальному росту во времени при $\omega_n \approx \omega_*$ амплитуды n-й моды с инкрементом γ_n внутри полосы частот конечной ширины

$$\gamma_n = \frac{1}{4} \sqrt{(\varepsilon\omega_n B_n)^2 - 16(\omega_* - \omega_n)^2} \tag{2.1}$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} B_n \leqslant \frac{\omega_*}{\omega_n} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4} B_n \tag{2.2}$$

В отличие от неустойчивости капли в постоянном поле, имеющей место в том же приближении идеальной жидкости при выполнении порогового условия $\varepsilon > c$, c — константа [8], в рассматриваемом случае переменного поля неустойчивость проявляется при сколь угодно малом значении ε. Полученный результат представляется физически необоснованным и связан с грубостью использованной выше модели идеальной жидкости. Но тем не менее определенные выводы о поведении капли реальной маловязкой жидкости в поле $E(t)$ можно получить на основе выше найденного решения.

В задаче о волновом движении маловязкой жидкости потенциальное и вихревое движения жидкости можно разделить и учет вязкости приведет лишь к затуханию амплитуды волн по экспоненциальному закону [9]: $\sim\exp(-\chi_n t)$, где χ_n — декремент затухания n-й моды. Поэтому и в решаемой задаче для случая маловязкой жидкости в нулевом приближении можно принять, что неустойчивость n-й моды капиллярных волн в переменном электрическом поле будет иметь место в том случае, когда величина инкремента неустойчивости γ_n превысит величину декремента затухания χ_n за счет вязкости [11], имеющего в используемых безразмерных переменных вид [9]

$$\chi_n = \nu \sqrt{\frac{\rho}{R\sigma}} (n-1)(2n+1)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. В итоге параметрическое раскачивание n-й моды капиллярных волн переменным электрическим полем в нулевом приближении будет происходить с инкрементом [11]:

$\varkappa_n=\gamma_n-\chi_n$. Уменьшится и ширина резонансной области [11]

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{4}\varepsilon\omega_n B_n\right)^2-4\chi_n^2}\leqslant\omega_*-\omega_n\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{4}\varepsilon\omega_n B_n\right)^2-4\chi_n^2}$$

Наиболее важным последствием учета вязкости будет то, что резонанс оказывается возможным не при сколь угодно малом ε, но начиная с определенной пороговой величины

$$\varepsilon_n^*=\frac{8\chi_n}{\omega_n B_n}=\frac{16\chi_n\omega_n}{n\Gamma_n} \qquad (2.3)$$

увеличивающейся с увеличением номера моды $\sim n^{1,5}$.

Из (2.3) несложно получить выражение для критической величины амплитуды электрического поля, при которой в капле развивается параметрическая неустойчивость

$$E^*\geqslant\left\{\frac{32\pi(n-1)(2n+1)\sqrt{n(n-1)(2n+1)}}{3n[2\lambda_n+(n+4)b_n]}\nu\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3}}\right\}^{0,5} \qquad (2.4)$$

3. Как следует из полученных выражений наиболее широкой будет резонансная зона, соответствующая основной моде ($n=2$). Для нее же будет максимален инкремент γ_n и минимален нижний порог ε_n^*. Поэтому вышесказанное проиллюстрируем численным расчетом критической величины E^* и ω_* для основной моды капли воды с $R=0,25$ мм: $\sigma=70$ дин/см, $\nu=0,01$ см^2/с. Из (2.4) получим $E^*\gtrsim 10$ кВ/см и из (1.9) $\omega_*\approx 6$ кГц. Для сравнения с экспериментальными данными отметим, что при монодиспергировании воды в [2] для капель – электродов диаметром $\approx 0,51$ мм использовались переменные поля с амплитудным значением напряжения 0,9 кВ (что соответствует напряженности поля у поверхности капли ≈ 40 кВ/см) на характерной частоте колебаний основной моды капли – электрода.

Отметим также, что параметрическая неустойчивость капли будет сопровождаться эмиссией сильно заряженных капелек [2, 4] и появлением свечения у поверхности неустойчивой капли в соответствии с механизмом, разобранным в [4]. В этой связи иллюстрацией к вышепроведенным расчетам являются и эксперименты [12], где облако мелкодисперсного (~ 1 мкм) водного аэрозоля под действием интенсивного ($E\approx 1$ МВ/см) высокочастотного электромагнитного излучения на частоте резонансной для собственных колебаний капель с характерным линейным размером $\approx 0,6$ мкм начинало светиться.

Свечение водного аэрозоля под действием переменного электрического поля объясняет и световые эффекты, предваряющие землетрясения [6, 13] и «курильский свет». Появление же переменных электрических полей большой величины перед землетрясениями и извержениями вулканов, когда и наблюдаются явления, связано согласно [13, 14] с самыми различными физическими эффектами, имеющими место в процессе подготовки землетрясений и извержений вулканов: с разделением и последующей релаксацией электрических зарядов при трении и разрушении отдельных кристаллов, с эффектом Степанова, с электрокинетическим эффектом при фильтрации грунтовых вод под действием механических напряжений, с пьезоэлектрическим эффектом и т. д.

Наземные измерения при землетрясениях, происходящих в различных точках земного шара, показали, что за несколько часов до начала землетрясения интегральная интенсивность электромагнитного излучения очага землетрясения в диапазоне частот от 100 Гц до 1 МГц на расстояниях ~ 1000 км от очага землетрясения достигает величины $\approx 0,1$ В/см, а скачок градиента электрического потенциала ≈ 10 В/см [13]. Естественно ожидать, что непосредственно над эпицентром землетрясения электрические поля будут на много порядков выше. Так, численные оценки электрических полей, появляющихся при деформации таких слабо пьезоэлектрических горных пород, как гранит или песчаник, в масштабах очага землетрясения дают напряженность поля в атмосфере над эпицентром ≈ 30 кВ/см, что приводит в некоторых случаях к крупномасштабному искровому пробою атмосферы [13, 14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thompson S. P.* Neutral emissions from liquid metal ion sources // Vacuum. 1984. V. 34. № 1.–2. P. 223–228.
2. *Sample S. B., Bollini R.* Production of liquid aerosols by harmonic electrical spraying // J. Colloid Interface Sci. 1972. V. 41. № 2. P. 185–193.
3. *Cheng K. J.* Capillary oscillations of a drop in an electric field // Phys. Lett. 1985. V. 112A. № 8. P. 392–396.
4. *Григорьев А. И., Синкевич О. А.* О возможном механизме возникновения огней «св. Эльма» // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 7. С. 1276–1283.

5. *Неволин В. Г.* Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. № 6. С. 1028–1042.
6. *Derr J. S.* Earthquake Lights: A review of observations and present theories // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1983. V. 63. P. 2177–2187.
7. *Нестеров С. В.* Параметрическая неустойчивость заряженной капли // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 170–172.
8. *Григорьев А. И., Синкевич О. А.* К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 591 с.
10. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 209 с.
12. *Копытин Ю. Д., Протасевич Е. Г., Хан В. А.* Образование плазмоидов при охлаждении высокочастотного разряда потоком водно-капельного аэрозоля. М., 1986. 14 с.– Деп. в ВИНИТИ. 8.10.86, № 4569-В86.
13. Электромагнитные предвестники землетрясений / Под ред. Садовского М. А. М.: Наука, 1982. 82 с.
14. *Finkelstein D., Powell J.* Earthquake Lighting // Nature. 1970. V. 228. № 5273. P. 759–760.

Ярославль

Поступила в редакцию
16.X.1987