

УДК 532.51.013.4:536.25

КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ИНВЕРСИИ УДЕЛЬНОГО ОБЪЕМА

НАДОЛИН К. А.

Рассматривается задача о возникновении конвекции в бесконечном горизонтальном слое жидкости с изотермическими границами. Предполагается, что удельный объем жидкости квадратично зависит от температуры и не зависит от давления. Минимум удельного объема достигается внутри слоя в точке инверсии теплового расширения жидкости. Тепловое расширение, как и в приближении Обербека – Буссинеска, учитывается лишь в силе плавучести. Коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и удельная теплоемкость жидкости считаются постоянными, а работой сил давления и вязкой диссипацией энергии пренебрегается.

Немонотонная зависимость удельного объема жидкости от температуры вызывает сложную стратификацию в вертикальном направлении. Выше точки инверсии градиент удельного объема противоположен силе тяжести и жидкость гравитационно устойчива. Ниже точки инверсии плотностная стратификация жидкости неустойчива. Такое положение приводит к некоторым особенностям возникновения конвекции. Они связаны с прониканием конвективных движений из неустойчивой области в устойчивую и зависят от параметра инверсии $\lambda \geq 1$, характеризующего расположение точки минимума удельного объема внутри слоя.

Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии плотности изучалась в ряде работ, начиная с [1], где был рассмотрен случай свободных изотермических границ. Краткий обзор работ на эту тему можно найти в [2, 3]. Для линейной задачи в случае твердых границ отмечалась аналогия с задачей об устойчивости течения Куэтта между вращающимися в разные стороны цилиндрами [1, 4, 5]. Было установлено [1, 6], что критическое число Рэлея Ra_* и критическое волновое число α_* меньше известных для модели Обербека – Буссинеска и понижаются при увеличении λ . Зависимость $Ra_*(\lambda)$ немонотонная и имеет минимум при $\lambda \approx 1,7$. Начиная с некоторой толщины устойчиво стратифицированной зоны возникает вторая, а затем и третья индуцированные вязкими силами ячейки по вертикали [1, 6, 7]. Нелинейный анализ ограничивался случаем плоской конвекции. Было установлено [6, 7], что до некоторого значения λ ветви ответвляются в сверхкритическую область значений числа Рэлея. При дальнейшем увеличении λ ветвление становится докритическим. Для шестиугольной ячейки конвекции при $\lambda=2$ ветвление также докритическое [1].

В данной работе численно исследуется влияние положения точки инверсии внутри слоя на критические значения числа Рэлея и амплитуды возникающих конвективных течений с прямоугольной формой ячеек. Монотонная неустойчивость механического равновесия жидкости относительно малых периодических вдоль слоя возмущений изучается методом линеаризации. Для построения вторичных стационарных конвективных течений используется метод Ляпунова – Шмидта. Обоснование применимости названных методов в задачах устойчивости несжимаемой жидкости содержится в [8–10]. Проведенные расчеты показали, что начиная с некоторого значения параметра λ ветвление докритическое для любого отношения сторон ячейки при фиксированном модуле волнового вектора. Для меньших значений λ характер ветвления зависит от соотношения сторон ячейки. Это позволяет ожидать докритического ветвления и гистерезисных явлений в тех случаях, когда периодичность возмущений задается внешними факторами (гофр границы, пространственно-периодическая модуляция температуры и т. п.). Заметим, что амплитуда прямоугольной конвекции стремится к нулю, когда отношение сторон ячейки стремится к $\sqrt{3}$ – значению, при котором возможна шестиугольная ячеистая конвекция.

1. Постановка задачи. Пусть жидкость, удельный объем которой зависит от температуры по закону $V = V_* [1 + \alpha(T - T_*)^2]$, заполняет бесконечный горизонтальный слой толщины L . Здесь V_* – минимальное значение удельного объема, которое достигается при температуре T_* ; α – коэффициент теплового расширения. Значения температуры на нижней и верх-

ней границах слоя постоянны и равны T_1 и T_2 соответственно, причем $T_1 \leq T_* \leq T_2$. Введем систему координат (x, y, z) так, что ось z направлена вертикально вверх, а оси x и y лежат в плоскости нижней границы слоя. Выберем в качестве масштаба длины ширину h той части слоя, где удельный объем уменьшается в вертикальном направлении и жидкость стратифицирована неустойчиво, а в качестве масштаба температуры — разность $\theta = T_* - T_1$. За масштаб скорости примем скорость конвективного всплытия нагретой частицы жидкости $v_* = \sqrt{gh\alpha\theta^2}$. Температуру будем отсчитывать от температуры нижней границы T_1 , а давление — от гидростатического. Уравнения свободной конвекции несжимаемой жидкости в безразмерных переменных с учетом принятых предположений имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (T-1)^2 \mathbf{k} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \delta \Delta T; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\mu = \frac{\eta V_*}{h v_*}; \quad \delta = \frac{\kappa V_*}{c_p h v_*}$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости; T — температура; p — давление; μ — параметр кинематической вязкости; δ — число Фурье; g — величина ускорения силы тяжести; η, κ, c_p — коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности и удельная теплоемкость жидкости; \mathbf{k} — орт оси z . Масштаб длины связан с толщиной слоя соотношением $h = L/\lambda$, где $\lambda = (T_2 - T_1)/\theta$ — параметр инверсии удельного объема. Граничные условия имеют вид

$$T=0 \quad (z=0), \quad T=\lambda \quad (z=\lambda) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}=0 \quad (z=0, z=\lambda) \quad (1.3)$$

$$v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad (z=0, z=\lambda) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v}=0 \quad (z=0), \quad v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad (z=\lambda) \quad (1.5)$$

Условия (1.3) и (1.4) отвечают твердым и свободным недеформируемыми границам соответственно, а условия (1.5) — твердой нижней и свободной верхней границам.

Будем интересоваться стационарными решениями (1.1)–(1.5), периодическими по x и y с периодами $2\pi/\alpha_x$ и $2\pi/\alpha_y$ соответственно, для которых средний градиент давления по любому из горизонтальных направлений равен нулю. Краевые задачи (1.1)–(1.5) имеют стационарное решение, отвечающее механическому равновесию жидкости с линейным профилем температуры

$$\mathbf{v}=0; \quad T_0 = z; \quad p_0 = \frac{1}{3}(z-1)^3 + \text{const} \quad (1.6)$$

Новые стационарные $2\pi/\alpha_x$ -, $2\pi/\alpha_y$ -периодические решения p', \mathbf{v}', T' ищем в виде

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}; \quad p' = p_0 + \mu \delta p; \quad T' = T_0 + T \quad (1.7)$$

где \mathbf{v}, p, T — неизвестные. Подставляя (1.7) в (1.1) и учитывая (1.6), приходим к нелинейной стационарной системе для возмущений \mathbf{v}, p, T

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla p + \text{Ra} T(z-1 + \frac{1}{2}T) \mathbf{k} = \text{Pr}^{-1} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \quad (1.8)$$

$$\Delta T - v_z = \mathbf{v} \nabla T; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

где введены числа Рэлея $\text{Ra} = 2(\mu\delta)^{-1}$ и Прандтля $\text{Pr} = \mu\delta^{-1}$. Из (1.2) по-

лучаем граничные условия для возмущения температуры

$$T=0 \quad (z=0, z=\lambda) \quad (1.9)$$

Для возмущения скорости v граничные условия сохраняют вид (1.3)–(1.5).

2. Линейный анализ устойчивости. Соответствующая (1.8) линеаризованная система для возмущений имеет вид

$$\Delta v - \nabla p + \text{Ra } T(z-1)\mathbf{k} = 0, \quad \Delta T - v_z = 0; \quad \text{div } v = 0 \quad (2.1)$$

Нетривиальные $2\pi/\alpha_x$, $2\pi/\alpha_y$ -периодические решения краевых задач (2.1), (1.9), (1.3)–(1.5) ищем в виде

$$(v, T, p)(x, y, z) = (v, T, p)(z) \exp i(\alpha_x x + \alpha_y y)$$

Отделяя переменные и исключая давление, приходим к спектральным задачам для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(D^2 - \alpha^2)^3 T = \text{Ra } \alpha^2 T(z-1) \quad (2.2)$$

$$T = D^2 T = (D^2 - \alpha^2)DT = 0 \quad (z=0, \lambda) \quad (2.3)$$

$$T = D^2 T = D^4 T = 0 \quad (z=0, \lambda) \quad (2.4)$$

$$T = D^2 T = (D^2 - \alpha^2)DT = 0 \quad (z=0); \quad T = D^2 T = D^4 T = 0 \quad (z=\lambda) \quad (2.5)$$

где введены обозначения $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$, $D = d/dz$.

В случае двух твердых границ слоя спектральная задача (2.2), (2.3) аналогична линейной задаче устойчивости для течения Куэтта между разновращающимися цилиндрами при малом зазоре [11, § 2.2, п. 3]. Это использовано в [1], где интерпретируются полученные Тейлором значения критических параметров. Аналогия позволяет применить к задаче (2.2), (2.3) известные результаты [12, 13]. В статье [13] приведены результаты Чандрасекхара, а также Харриса и Рейда для минимального критического числа Тейлора и соответствующего ему критического волнового числа в случае течения Куэтта между разновращающимися цилиндрами при малом зазоре и предельных значениях отношения угловых скоростей. Преобразовав эти результаты соответственно используемым обозначениям, получим для критических параметров спектральной задачи (2.2), (2.3)

$$\text{Ra}_* \approx \frac{3416}{\lambda^2(2-\lambda)} \left[1 - 0,00761 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)^2 \right]; \quad \alpha_* \approx \frac{3,12}{\lambda} \quad (1 \leq \lambda \leq 1,25) \quad (2.6)$$

$$\text{Ra}_* \approx 1178,6; \quad \alpha_* \approx 2,034 \quad (\lambda > 2) \quad (2.7)$$

Для численного решения (2.2), (2.3)–(2.5) был использован комплекс программ «КРИТ» решения спектральных задач, разработанный на кафедре вычислительной математики РГУ. Значения минимального по α критического числа Рэлея Ra_* и соответствующего ему критического волнового числа α_* при различных значениях параметра инверсии λ приведены в таблице. Указанные значения вычислены с точностью до единицы младшего разряда. Колонки I отвечают граничным условиям (2.3), колонки II – граничным условиям (2.4) и колонки III – условиям (2.5). В двух крайних правых колонках IV даны значения Ra_* и α_* для задачи (2.2), (2.3), полученные по приближенным формулам (2.6). Хорошо виден выход на асимптотические значения (2.7).

3. Расчет вторичных течений. Для нахождения вторичных двоякопериодических конвективных течений, возникающих при потере устойчивости механическим равновесием (1.6), применим метод Ляпунова – Шмидта в форме, развитой в [10] аналогично тому, как это сделано в [14] для модели Обербека – Буссинеска. Пусть $\Phi = (v, T, p)$ – вектор неизвестных, причем v и T удовлетворяют граничным условиям (1.3)–(1.4) и (1.9) соответственно. Решения краевых задач (1.8), (1.9), (1.3)–(1.5), отвечаю-

λ	I		II		III		IV	
	Ra_*	α_*	Ra_*	α_*	Ra_*	α_*	Ra_*	α_*
1,0	3389,7	3,13	1308,5	2,23	2380,5	2,70	3390,0	3,12
1,1	2563,0	2,85	990,6	2,03	1835,6	2,46	2563,0	2,84
1,2	2024,6	2,61	784,0	1,86	1485,9	2,27	2023,9	2,60
1,3	1665,5	2,43	646,7	1,72	1261,0	2,11	1663,8	2,40
1,4	1424,5	2,26	555,7	1,61	1122,8	1,98	1420,6	2,23
1,5	1266,8	2,13	497,8	1,51	1051,9	1,89	1257,1	2,08
1,6	1172,0	2,03	466,3	1,44	1038,7	1,84	1144,4	1,95
1,7	1127,7	1,97	458,2	1,39	1072,6	1,85	1030,2	1,83
1,8	1123,3	1,94	472,1	1,39	1126,3	1,93	624,1	1,73
1,9	1143,0	1,96	501,5	1,43	1167,1	2,00	—	—
2,0	1166,1	2,00	531,1	1,51	1186,0	2,04	—	—
2,2	1186,5	2,05	557,5	1,61	1186,7	2,05	—	—
2,4	1180,9	2,06	556,8	1,62	1179,2	2,04	—	—
2,6	1179,5	2,03	551,8	1,60	1177,9	2,03	—	—
2,8	1178,4	2,03	549,8	1,59	1178,4	2,03	—	—
3,0	1178,5	2,03	550,3	1,59	1178,7	2,03	—	—
3,5	1178,6	2,03	551,2	1,59	1178,6	2,03	—	—
4,0	1178,7	2,03	550,8	1,59	1178,5	2,03	—	—
4,5	1178,4	2,03	550,8	1,59	1178,5	2,03	—	—

щие возникающему вблизи Ra_* вторичному двоякопериодическому течению, имеют вид

$$\Phi = \pm \varepsilon a (\varphi_1 + \varphi_2 + \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2}) + O(\varepsilon^2); \quad \varepsilon = \sqrt{\text{sign}(I_1/I_2) (Ra - Ra_*)} \quad (3.1)$$

где амплитуда $a = \sqrt{|I_1/I_2|}$ определяется из уравнения разветвления (вид функционалов I_1 и I_2 указан ниже); ε — околоскритичность, причем полуокрестность Ra_* , где существуют решения (3.1), определяется из условия положительности подкоренного выражения;

$$\varphi_{1,2} = \left(-\frac{i\alpha_x}{\alpha^2} F_1, \mp \frac{i\alpha_y}{\alpha^2} F_1, w_1, T_1, p_1 \right) (z) \exp i(\alpha_x x \pm \alpha_y y)$$

Функции $F_1(z)$, $w_1(z)$, $T_1(z)$ и $p_1(z)$ являются компонентами собственных векторов однородных краевых задач для системы шестилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных из задач (2.1), (1.9), (1.3)–(1.5) после отделения переменных по x и y и введения обозначений $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$, $w_1 = v_z$, $F_1 = i(\alpha_x v_x + \alpha_y v_y)$

$$\begin{aligned} w_1' &= -F_1; & p_1' &= -F_1' - \alpha^2 w_1 + Ra_*(z-1)T_1 \\ F_1'' &= \alpha^2(F_1 - p_1); & T_1'' &= \alpha^2 T_1 + w_1 \\ w_1 = F_1 = T_1 &= 0, & (z=0, \lambda); & w_1 = F_1' = T_1 = 0 \quad (z=0, \lambda) \\ w_1 = F_1 = T_1 &= 0, & (z=0); & w_1 = F_1' = T_1 = 0 \quad (z=\lambda) \end{aligned}$$

$$\int_0^\lambda w_1^2(z) dz = 1$$

Последнее условие задает нормировку собственных векторов. Функционалы I_1 и I_2 определяются по коэффициентам уравнения разветвления и имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\lambda (z-1) T_1 u dz; & I_2 &= \int_0^\lambda \left\{ q(T_1 w_2 + T_2 w_1 - 2T_1^2 F_1 + 7T_1' T_1 w_1) + \right. \\ & & & \left. + \text{Pr}^{-1} G \left[F_1' (w_2 - w_{2\alpha}) + \frac{1}{2} (w_1 F_2' - F_1 F_2) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$-u \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{3}{2} w_1 F_2 + F_1 (w_2 + w_{2\alpha}) \right) + \text{Ra} * T_1 \right] + \\ + \Theta \left(w_1 T_2' + T_1' w_2 - \frac{1}{2} T_1 F_2 - F_1 T_{2\alpha} \right) \Big\} dz$$

где $G(z)$, $u(z)$, $\Theta(z)$ и $q(z)$ — компоненты собственных векторов линейных однородных краевых задач

$$\begin{aligned} u' &= -G; & q' &= -G' - \alpha^2 u - \Theta \\ G'' &= \alpha^2 (G - q); & \Theta'' &= \alpha^2 \Theta - \text{Ra} * (z-1) u \\ u &= G = \Theta = 0, & (z=0, \lambda); & u = G' = \Theta = 0, & (z=0, \lambda) \\ u &= G = \Theta = 0, & (z=0); & u = G' = \Theta = 0, & (z=\lambda) \end{aligned}$$

полученных при отделении переменных и введении обозначений $u = U_z$, $G = i(\alpha_x U_x + \alpha_y U_y)$ из линейных краевых задач в частных производных, сопряженных (2.1), (1.9), (1.3)–(1.5) относительно скалярного произведения

$$\int_0^\lambda \int_{-\pi/\alpha_y}^{\pi/\alpha_y} \int_{-\pi/\alpha_x}^{\pi/\alpha_x} (\mathbf{v}\bar{\mathbf{U}} + T\bar{\Theta} + p\bar{q}) dx dy dz$$

Величины F_2 , w_2 , T_2 , $w_{2\alpha}$ и $T_{2\alpha}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_{211} + F_{210} + F_{201}; & w_2 &= w_{211} + w_{210} + w_{201}; & T_2 &= 4T_{200} + T_{211} + T_{210} + T_{201} \\ w_{2\alpha} &= 2 \left(w_{211} + \frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} w_{210} + \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2} w_{201} \right); & T_{2\alpha} &= 2 \left(T_{211} + \frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} T_{210} + \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2} T_{201} \right) \end{aligned}$$

$$T_{200}'' = w_1 T_1' - F_1 T_1; \quad T_{200} = 0 \quad (z=0, \lambda)$$

$$F_{211}'' - 4\alpha^2 (F_{211} - p_{211}) = 2 \text{Pr}^{-1} (F_1^2 + w_1 F_1')$$

$$p_{211}' + F_{211}' + 4\alpha^2 w_{211} - \text{Ra} * (z-1) T_{211} = \frac{1}{2} \text{Ra} * T_1^2$$

$$T_{211}'' - 4\alpha^2 T_{211} - w_{211} = w_1 T_1' + F_1 T_1; \quad w_{211}' + F_{211} = 0$$

$$F_{201}'' - 4\alpha_y^2 (F_{201} - p_{201}) = 4 \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2} \text{Pr}^{-1} \left(F_1^2 + w_1 F_1' - 2 \frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} F_1^2 \right)$$

$$p_{201}' + F_{201}' + 4\alpha_y^2 w_{201} - \text{Ra} * (z-1) T_{201} = 4 \frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} \text{Pr}^{-1} w_1 F_1$$

$$T_{201}'' - 4\alpha_y^2 T_{201} - w_{201} = 2 \left(w_1 T_1' + F_1 T_1 - 2 \frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} F_1 T_1 \right); \quad w_{201}' + F_{201} = 0$$

$$F_{210}'' - 4\alpha_x^2 (F_{210} - p_{210}) = 4 \frac{\alpha_x^2}{\alpha^2} \text{Pr}^{-1} \left(F_1^2 + w_1 F_1' - 2 \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2} F_1^2 \right)$$

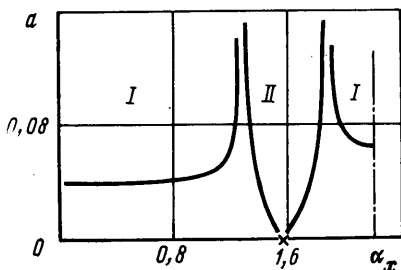
$$p_{210}' + F_{210}' + 4\alpha_x^2 w_{210} - \text{Ra} * (z-1) T_{210} = 4 \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2} \text{Pr}^{-1} w_1 F_1$$

$$T_{210}'' - 4\alpha_x^2 T_{210} - w_{210} = 2 \left(w_1 T_1' + F_1 T_1 - 2 \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2} F_1 T_1 \right); \quad w_{210}' + F_{210} = 0$$

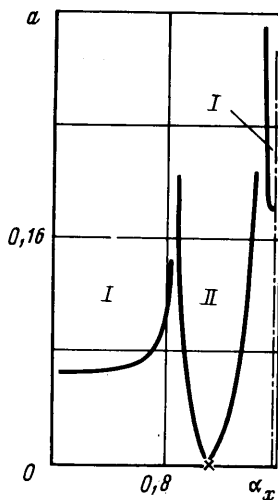
$$w_{2sl} = F_{2sl} = T_{2sl} = 0 \quad (z=0, \lambda); \quad w_{2sl}' = F_{2sl}' = T_{2sl}' = 0 \quad (z=0, \lambda)$$

$$w_{2sl} = F_{2sl} = T_{2sl} = 0, \quad (z=0); \quad w_{2sl}' = F_{2sl}' = T_{2sl}' = 0 \quad (z=\lambda);$$

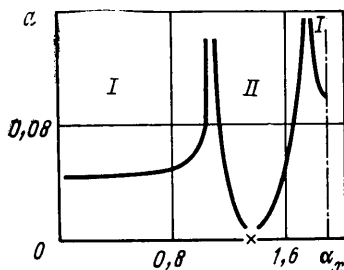
$$s, l = 0, 1, \quad s+l > 0$$



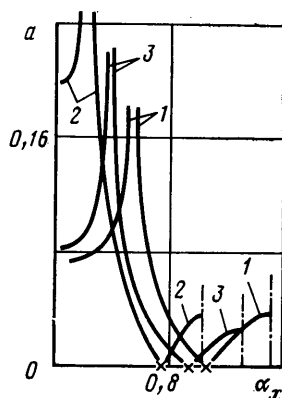
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Эти краевые задачи возникают в результате отделения переменных в уравнениях второго приближения метода Ляпунова — Шмидта.

Для определения характера ответвления решений (3.1) от состояния покоя (1.6) и вычисления значений a был использован комплекс программ «АМПЛ», разработанный на кафедре вычислительной математики РГУ и совместимый с КРИТ-м. Расчеты проводились при $\text{Pr}=12$, что соответствует значению числа Прандтля для воды при температуре 4°C . Критические параметры $\text{Ra}_*(\lambda)$ и $\alpha_*(\lambda)$ выбирались в точке минимума соответствующей нейтральной кривой (см. таблицу).

На фиг. 1–3 изображены графики $a(\alpha_x)$ при $\lambda=1$, полученные для граничных условий (1.3), (1.4) и (1.5) соответственно. В области I ветвление сверхкритическое, а в области II — докритическое. Штрихпунктирной линией нанесены оси $\alpha_x = \alpha_*/\sqrt{2}$, справа от которых соответствующий график $a(\alpha_x)$ восстанавливается по своей левой части (поскольку критическое волновое число $\alpha_* = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$ фиксировано). На оси α_x отмечены точки, в которых $\alpha_x = \alpha_*/2$. При этом однородные задачи, отвечающие (3.2), имеют нетривиальные решения, что не позволяет применить используемую методику расчета в окрестности этой точки. Характер кривых $a(\alpha_x)$ говорит о том, что $a(\alpha_*/2) = 0$. Заметим, что при значениях волновых чисел $\alpha_x = \alpha_*/2$, $\alpha_y = \sqrt{3}\alpha_*/2$ и $\text{Ra} = \text{Ra}_*$ краевые задачи (2.1), (1.9), (1.3)–(1.5) имеют шесть собственных векторов, что соответствует режиму гексагональной ячеистой конвекции.

Аналогичные графики $a(\alpha_x)$ для $\lambda=1,5$ изображены на фиг. 4. Кривые 1 отвечают граничным условиям (1.3), кривые 2 — граничным условиям (1.4) и кривые 3 — условиям (1.5).

Как видно, при заданных значениях критических параметров $Ra_*(\lambda)$, $\alpha_*(\lambda)$ характер ветвления может зависеть от соотношения сторон прямоугольной конвективной ячейки. С увеличением λ область сверхкритического ответвления сужается, и при $\lambda > \lambda_*$ наблюдается лишь докритическое ветвление для прямоугольных ячеек любой формы. Например, в случае двух твердых стенок (1.3)

$$1,6 < \lambda_* < 1,7 \text{ [9].}$$

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе и ценные советы, а также участников научного семинара кафедры вычислительной математики РГУ, обсуждавших результаты исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Veronis G.* Penetrative convection // *Astrophys. J.* 1963. V. 137. Pt 2. P. 641–663.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость // *Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.* 1978. Вып. 11. С. 66–154.
3. *Надолин К. А.* Проникающая конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема. Ростов-на-Дону, 1987. 52 с. — Деп. в ВИНТИ 17.11.87, № 8059–В87.
4. *Deblor W. R.* On the analogy between thermal and rotational hydrodynamic stability // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 24. Pt 1. P. 165–176.
5. *Rintel L.* Penetrative convective instabilities // *Phys. Fluids.* 1967. V. 10. № 4. P. 848–854.
6. *Moore D. R., Weiss N. O.* Nonlinear penetrative convection // *J. Fluid Mech.* V. 61. Pt 3. P. 553–581.
7. *Musman S.* Penetrative convection // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 31. Pt 2. P. 343–360.
8. *Юдович В. И.* Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // *ПММ.* 1965. Т. 29. № 3. С. 453–467.
9. *Юдович В. И.* О возникновении конвекции // *ПММ.* 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1000–1005.
10. *Юдович В. И.* Свободная конвекция и ветвление // *ПММ.* 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 101–111.
11. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
12. *Барковский Ю. С., Юдович В. И.* Спектральные свойства одного класса краевых задач // *Мат. сб.* 1981. Т. 114. Вып. 3. С. 438–450.
13. *Ди Прима Р. С., Суинни Х. Ш.* Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Суинни Х., Голлаба Дж.* Пер с англ. М.: Мир, 1984. С. 169–217.
14. *Тер-Григорьянц Г. К.* О возникновении двоякопериодической конвекции в горизонтальном слое // *ПММ.* 1973. Т. 37. № 1. С. 177–184.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
20.1.1988