

УДК 532.5.013.4:537.3:541.133

РАЗВИТИЕ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ В ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

ЖАКИН А. И.

Несмотря на то что в последнее время приложено немало усилий для понимания механизма развития электроконвекции, этот вопрос все еще во многом остается загадочным. Почему электроконвекция в плоском конденсаторе столь неустойчива? Причем неустойчивость, проявляющаяся в постоянном движении и перестройке электроконвективных ячеек [1, 2], усиливается с увеличением проводимости σ , так что при $\sigma > 10^{-10}$ См/см ячейки вовсе не образуются, а движение выражается в виде «подергивания» различных частей жидкости [2]. Обратно, при уменьшении проводимости можно добиться стационарной устойчивой электроконвекции [3]. В случае несимметричной системы электродов возникает вопрос о «кажущейся» пороговости электроконвекции, тогда как известно [4], что в этом случае необходимое условие равновесия не выполняется и электроконвекция должна иметь беспороговый характер. Наконец, до конца не исследован круг вопросов, связанных с количественными расчетами (вычисление пороговых напряжений при различных проводимостях, геометриях электродов и т. д.).

В данной работе с позиций диссоциационно-инжекционной модели проводимости [4] дается теоретический анализ развития электроконвекции в жидких диэлектриках.

1. Постановка задачи. Существует известная неоднозначность физико-химических моделей электропроводности жидких диэлектриков. Здесь используется модель [4], привлекающая своей простотой и достаточной общностью. Действительно, она описывает идеальные редокс-системы, а на ограниченных временах — неидеальные [4]. В отсутствие инъекции ионов X^- , Y^+ совпадает с биионной моделью [5]. Если диссоциирующая компонента АВ является ионной парой, то возможно образование ионных тройников [6]. Можно показать, что при малой концентрации ионных пар концентрация ионных тройников значительно меньше концентрации моноионов, т. е. комплексообразованием можно пренебречь.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + G n \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = C n, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad n = n_1 - n_2 + \sigma_a n_3 - \sigma_c n_4 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Pe} \frac{\partial n_j}{\partial t} + \operatorname{div}((-1)^{j-1} \beta_j n_j \mathbf{E} + \operatorname{Pe} n_j \mathbf{v}) = C \Sigma_j \quad j=1, 4 \quad (1.3)$$

$$S_1: n_1 = f_A, \quad n_3 = f_a, \quad \Phi = 1, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

$$S_2: n_2 = f_B, \quad n_4 = f_c, \quad \Phi = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (1.5)$$

$$\Sigma_1 = \gamma_p \Sigma_N - \gamma_1 \sigma_c n_1 n_4, \quad \Sigma_N = F(E) - n_1 n_2$$

$$\Sigma_2 = \gamma_p \Sigma_N - \gamma_2 \sigma_a n_2 n_3, \quad \Sigma_3 = \kappa_a - \gamma_1 \sigma_c n_3 n_4 - \gamma_2 n_2 n_3$$

$$\Sigma_4 = \kappa_c - \gamma_1 \sigma_a n_3 n_4 - \gamma_1 n_1 n_4, \quad f_j = \frac{n_j(E)}{n_j(E_0)}, \quad j=A, B, a, c$$

$$C = \frac{4\pi e n_0 d}{\varepsilon E_0}, \quad G = \frac{e n_0 E_0 d^2}{v \eta}, \quad \operatorname{Pe} = \frac{v}{b_2 U}$$

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_0}, \quad j=p, i, 1, 2, \quad \alpha_0 = \frac{4\pi e b_2}{\epsilon}$$

$$\beta_j = \frac{b_j}{b_2}, \quad j=\overline{1, 4}, \quad \kappa_j = \frac{k_i N_i}{b_2 \alpha_0 n_j(E_0)}, \quad j=a, c$$

Здесь N_i — концентрация ионных пар X^-Y^+ , α_i — коэффициент рекомбинации ионов X^- , Y^+ ; $n_a(E)$, $n_b(E)$ — инжекционные функции, описывающие инжекцию примесных ионов соответственно на аноде и катоде. Остальные обозначения те же, что и в [4].

Параметры $\beta_j \sim 1$, $\gamma_j \sim 2$. В слабых полях либо при большой примесной проводимости (больших n_0) имеет место $\sigma_a \ll 1$, $\sigma_c \ll 1$, $C \gg 1$. Этот предельный случай будем называть «приближением локальной равновесности реакций диссоциация \rightleftharpoons рекомбинация». С физической точки зрения условие $C \gg 1$ означает, что время рекомбинации иона $\tau_r = (\alpha_p n_0)^{-1}$ значительно меньше времени прохождения ионом расстояния d : $t_e = d/bE_0$, $\tau_r/t_e \sim 1/\gamma_p C$. С увеличением напряженности поля или уменьшении примесной проводимости параметр C убывает, а σ_a , σ_c возрастают, так что в сильных полях $C \ll 1$, $\xi_j = \sigma_j C \gg 1$, $j=a, c$. Этот предельный случай соответствует инжекционному режиму проводимости. Если $C \ll 1$, $\xi_a \ll 1$, $\xi_c \ll 1$, то имеет место безындукционное ЭГД-приближение, когда электрическое поле близко к внешнему. Отметим, что переход от приближения локального равновесия к безындукционному либо к инжекционной проводимости можно осуществить варьированием только напряжения на электродах. Поэтому анализ развития электроконвекции в слабых полях необходимо начинать в условиях приближения локального равновесия, переходя затем к безындукционному ЭГД-приближению и инжекционной проводимости.

2. Приближение локального равновесия: $C \gg 1$, $\sigma_a \ll 1$, $\sigma_c \ll 1$. В этом случае электрические уравнения (1.2), (1.3) содержат малый параметр $\mu_d = 1/C$ при старших производных, что говорит о том, что решение состоит из внешнего, получающегося из уравнений при $\mu_d = 0$ и справедливого вдали от электродов, и погранслоного, справедливого в приэлектродных областях шириной $\sim \mu_d$ (в размерных переменных $\xi_d = \epsilon E_0 / 4\pi e n_0$ [4]). Несмотря на то что это приближение определяет область слабых полей, все же поля должны быть высоковольтными. Действительно, условие того, что толщина диффузионных слоев $x_r = D/bE_0 = kT/eE_0$ значительно меньше ξ_d , накладывает ограничение снизу на E_0 . Это неравенство выражает также то, что тепловая энергия иона kT значительно меньше энергии иона, приобретаемой во внешнем поле на расстоянии, равном радиусу Дебая $kT/eE_0 r_D \ll 1$, $r_D^2 = \epsilon kT / 8\pi e n_0$. В электрохимии обычно $kT/eE_0 r_D \gg 1$.

Так как усиление диссоциации в слабых полях незначительно, то $F(E) \simeq 1$. В этом случае решение внешней задачи имеет вид

$$n_1 = n_2 = 1, \quad n_3 = n_4 = 0, \quad v = 0, \quad E = E_\infty \quad (2.1)$$

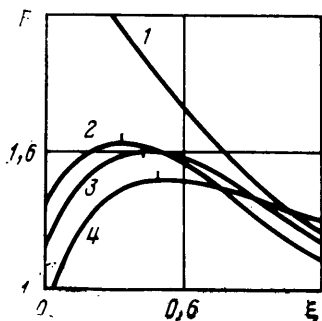
Погранслоное решение строим вблизи поверхности анода S_1 . Введем нормальную к S_1 координату ξ_1 , направленную в глубь жидкости. Вводя растягивающее преобразование $\xi = C\xi_1$ и считая, что минимальный радиус кривизны поверхности $R \gg \xi_d$, получаем следующие погранслоные уравнения:

$$\frac{dE}{d\xi} = n_1 - n_2 + \sigma_a n_3, \quad \beta_1 \frac{dn_1 E}{d\xi} = \gamma_p \Sigma_N \quad (2.2)$$

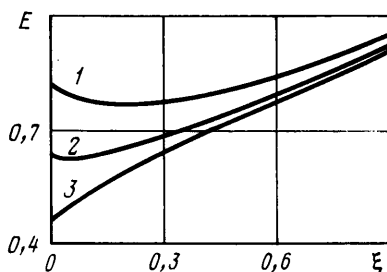
$$\frac{dn_2 E}{d\xi} = -\gamma_p \Sigma_N + \gamma_2 \sigma_a n_2 n_3, \quad \beta_3 \frac{dn_3 E}{d\xi} = -\gamma_2 n_2 n_3$$

Используя (1.4) и условия сшивки при $\xi \rightarrow \infty$, получаем граничные условия в виде

$$\xi = 0: n_1 = f_a, \quad n_3 = f_a; \quad \xi \rightarrow \infty: n_2 \rightarrow 1, \quad E \rightarrow E_\infty \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь E_{∞} — нормальная компонента внешнего решения на S_1 . В дальнейшем пренебрегаем падением напряжения в приэлектродных слоях $\Delta U \sim \sim E \xi_d \ll U$, где E — средняя напряженность поля в приэлектродном слое. Если $E \sim U/d$, то это условие следует из малости μ_d .

Анализ задачи (2.2), (2.3) лежит в основе понимания механизма развития изотермической электроконвекции в слабых полях. Рассмотрим результаты исследования для плоского конденсатора при линейном законе инжекции [4], отсутствии инжекции примесных ионов и ланжевеновской связи между коэффициентами рекомбинации и подвижности: $f_A=0$, $f_a=E$, $E_{\infty}=1$, $\gamma_p=1+\beta_1$, $\gamma_2=1+\beta_3$. При равных подвижностях $\beta_1=\beta_3=1$ и $\sigma_a=1$ задача имеет точное решение

$$n_1=1-n_3, \quad n_2=1, \quad n_3=e^{-2\xi}, \quad E=1 \quad (2.4)$$

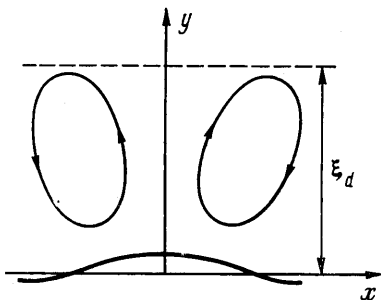
Приближенное решение, когда $|\beta_1-1| \ll 1$, $|\beta_3-1| \ll 1$, $|\sigma_a-1| \ll 1$ выписано в [4]. Анализ этого решения показал, что при $b_3 < b_1$ вблизи электрода имеется локальное повышение (горб) напряженности поля, а объемный заряд изменяется от положительного до отрицательного знаков по мере удаления от электродов. Этот качественный вывод подтвердили численные расчеты. На фиг. 1 изображено распределение напряженности $E=E(\xi)$ при $\beta_1=4$, $\beta_3=0,5$ и различных уровнях инжекции. Кривым 1–4 соответствуют $\sigma_a=0; 3; 5; 10$. Величина максимума горба $E_*=\max E(\xi)=E(\xi_*)$ с ростом σ_a убывает, а точка максимума ξ_* движется от электрода. Если анализировать в размерных переменных, то с ростом U пик напряженности возрастает. С физической точки зрения образование горба напряженности связано с тем, что при малых подвижностях инжектируемых ионов они рекомбинируют не во всей приэлектродной зоне $0 \leq \xi \leq \xi_d$, а в более узкой $0 \leq \xi \leq l_r < \xi_d$. Поэтому область $0 \leq \xi \leq l_r$ обогащена положительными ионами, область $l_r \leq \xi \leq \xi_d$ — отрицательными.

При достаточно большой подвижности инжектируемых ионов $b_3 > b_1$ вблизи электродов могут образовываться локальные понижения напряженности поля (фиг. 2). С ростом напряжения «глубина ямы» $E(\xi_{**}) = \min E(\xi)$ увеличивается, а точка минимума ξ_{**} приближается к электроду (фиг. 2, кривые 1, 2), так что при достаточно большом напряжении поле становится убывающим (фиг. 2, кривая 3).

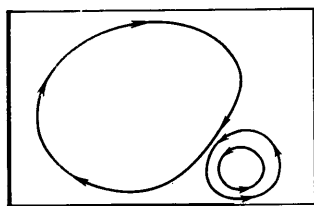
Наличие биполярно заряженных либо гомозаряженных приэлектродных слоев подтверждается как данными по электрофорезу [7], так и прямыми измерениями [8].

В условиях постановки задачи (2.2)–(2.4) вольт-амперная характеристика (ВАХ) линейна по полю $j=\sigma E$, $\sigma=e(b_1+b_2)n_0$. Можно показать, что толщина неравновесной зоны с течением времени увеличивается $\xi_d(t)=\xi_d+2(Dt)^{1/2}$, а концентрация N диссоциирующей компоненты АВ в неравновесной зоне уменьшается по закону

$$N=N_0 \left(1 - \left(\frac{t}{t_N} \right)^{1/2} \right), \quad t_N=0,07 \frac{(b_1+b_2)^2}{b_1^2} \frac{D}{\xi_d^2 k_d^2}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При $d/\xi_d(t) \sim 1$ ВАХ становится нелинейной (см. п. 5). Здесь D — коэффициент диффузии вещества АВ.

Используя принцип Релея, можно показать, что биполярные структуры являются неустойчивыми образованиями. Однако расчет критериев устойчивости представляет сложную проблему из-за больших вычислительных трудностей. Исходя из физических соображений можно предположить, что движение жидкости после потери устойчивости будет иметь мелкомасштабный характер, т. е. локализоваться вблизи электродов на расстоянии ξ_d . Это предположение подтверждается расчетами, проведенными для шероховатых электродов с малой периодической шероховатостью $y = a \cos \omega x$, $\mu = a/\xi_d \ll 1$ в плоском случае (фиг. 3). Опуская выкладки, приведем окончательные результаты расчетов. При диссоциационной проводимости и малом отношении подвижностей: $\sigma_a = 0$, $\beta_1 = b_1/b_2 \ll 1$ асимптотика скорости течения на оси, перпендикулярной плоскому электроду и проходящей через вершину острия, выражается как (размерные переменные)

$$v_y = -v_* e^{-y/\beta_1 \xi_d}, \quad v_* = \frac{8\pi^2 e^2 n_0^2}{\beta_1^5 \omega^2 \epsilon \eta}, \quad \omega \xi_d \gg 1, \quad y \geq \xi_d \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что в диссоциационном режиме проводимости скорость электроконвекции не увеличивается с ростом напряжения, а течение направлено к остриям изогнутого электрода.

При наличии инжекции в случае $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\sigma_a = 1$ асимптотика скорости, аналогичная (2.5), имеет вид

$$v_y = \frac{3}{5} \frac{en_0 a E_0}{\eta \omega} e^{-2y/\xi_d}, \quad \omega \xi_d \gg 1, \quad y \geq \xi_d \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что при наличии инжекции течение направлено от «остриев» изогнутого электрода (фиг. 3). Скорость и размер области течения с ростом поля возрастают. При типичных $\sigma \sim 10^{-12}$ См/см, $\epsilon = 2$, $E_0 \sim 1$ кВ/см имеем $\xi_d \sim 0,04$ см, т. е. размер области течения L микроскопический. При увеличении напряжения на порядок размер L становится макроскопическим и течение легко фиксируется невооруженным глазом.

Подобная закономерность развития электроконвекции наблюдается для электродов типа лезвие — плоскость. Геометрия электродов и методика расчетов описана в [9]. Вычисления проводились при отсутствии инжекции примесных ионов $f_A = f_B = 0$ и линейной инжекции с катода [4] для констант, близких к параметрам трансформаторного масла: $\rho = 1$ г/см³, $\epsilon = 2,1$, $\eta = 0,2$ П, $b_1 = b_2 = 10^{-10}$ см²/В·с, $b_3 = b_1/5$, $e\eta_c = 0,05$ см⁻¹, $\sigma = 2 \cdot eb_2 n_0 = 2 \cdot 10^{-14}$ См/см. При $U < 200$ В течение имеет одновихревую структуру и направлено на острие. Скорости течения весьма малы и составляют $\sim 8 \cdot 10^{-3}$ см/с. При $U \approx 200$ В вблизи острия появляется небольшой вихрь, который быстро увеличивается с ростом напряжения. Скорость течения при этом также увеличивается, причем максимальные значения наблюдаются

вблизи острия. На фиг. 4 показана картина течения при $U=600$ В. Скорость течения при $U=2$ кВ составляет $\sim 0,15$ см/с.

Эффект резкого возрастания размеров области течения при изменении напряжения от нуля до ~ 1 кВ может быть положен в основу объяснения так называемой «пороговости» ЭГД-течений в несимметричных системах электродов.

3. Электроконвекция в условиях безындукционного ЭГД-приближения. При $C \ll 1$, $\xi_a \ll 1$, $\xi_c \ll 1$ решение задачи (1.1)–(1.5) разыскиваем в виде асимптотических рядов $\mathbf{v} = \mathbf{u} + C\mathbf{u}_{(1)} + \dots$, $p = p_{(0)} + Cp_{(1)} + \dots$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(0)} + C\mathbf{E}_{(1)} + \dots$, $n_j = n_{j(0)} + Cn_{j(1)} + \dots$. Если не выполняется необходимое условие равновесия $\nabla n \times \mathbf{E} = 0$, то электроконвекция описывается задачей нулевого приближения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_{(0)} + \Delta \mathbf{u} + Gn_{(0)} \mathbf{E}_{(0)}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_{(0)} = 0, \quad \mathbf{E}_{(0)} = -\nabla \Phi, \quad n_{(0)} = n_{1(0)} - n_{2(0)} + \sigma_a n_{3(0)} - \sigma_c n_{4(0)}$$

$$\text{Pe} \frac{\partial n_{j(0)}}{\partial t} + \text{div}((-1)^{j-1} \beta_j n_{j(0)} \mathbf{E}_{(0)} + \text{Pe} n_{j(0)} \mathbf{u}) = 0$$

$$S_1: n_{1(0)} = f_A^\circ, \quad n_{3(0)} = f_a^\circ, \quad \Phi_{(0)} = 1, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

$$S_2: n_{2(0)} = f_B^\circ, \quad n_{4(0)} = f_c^\circ, \quad \Phi_{(0)} = 0, \quad \mathbf{u} = 0; \quad f_j^\circ = f_j(E_{(0)}), \quad j = A, B, a, c$$

При симметричных электродах инжекционные функции на поверхностях электродов постоянны. В этих случаях возникает задача об электроконвективной устойчивости, для исследования которой необходимо привлечь члены порядка C . Краевая задача электроконвекции при симметричных электродах с учетом членов порядка C имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla(p_{(0)} + Gn_{(0)}(\Phi_{(0)} + C\Phi_{(1)})) + \Delta \mathbf{u} + CGn_{(1)} \mathbf{E}_{(0)} \quad (3.3)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}_{(1)} = n_{(0)}, \quad \mathbf{E}_{(1)} = -\nabla \Phi_{(1)}$$

$$\text{Pe} \frac{\partial n_{j(1)}}{\partial t} + \beta_j (-1)^{j-1} (\nabla n_{j(1)} \mathbf{E}_{(0)} + n_{j(0)} \text{div } \mathbf{E}_{(1)}) + \text{Pe} \nabla n_{j(1)} \mathbf{u} = \Sigma_{j(0)}$$

$$S_1: n_{1(1)} = \delta_A H, \quad n_{3(1)} = \delta_a H, \quad \Phi_{(1)} = 0, \quad u = 0$$

$$(3.4)$$

$$S_2: n_{2(1)} = \delta_B H, \quad n_{4(1)} = \delta_c H, \quad \Phi_{(1)} = 0, \quad u = 0$$

$$\Sigma_{j(0)} = \Sigma_j |n_j - n_{j(0)}, \quad j = \overline{1, 4}; \quad \delta_j = \frac{df_j^\circ}{dE_{(0)}}, \quad j = A, B, a, c; \quad H = \frac{\mathbf{E}_{(0)} \mathbf{E}_{(1)}}{E_{(0)}}$$

Рассмотрим результаты исследования ЭГД-неустойчивости в плоском конденсаторе. Действуя аналогично [10], приходим к следующей задаче:

$$\lambda \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Bq\mathbf{i}, \quad q = q_1 - q_2 + \sigma_a q_3 - \sigma_c q_4 \quad (3.5)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \lambda \text{Pe} q_j + (-1)^{j-1} \beta_j \frac{\partial q_j}{\partial x} = -a_j \mathbf{v}\mathbf{i}$$

$$a_1 = \Sigma_{1(0)} / \beta_1 - f_A^\circ n_{(0)}, \quad a_2 = -\Sigma_{2(0)} - f_B^\circ n_{(0)}$$

$$a_3 = \Sigma_{3(0)} / \beta_3 - n_{(0)}, \quad a_4 = -\Sigma_{4(0)} / \beta_4 - n_{(0)}$$

$$x=0: q_1 = q_3 = 0, \quad \mathbf{v} = 0; \quad x=1: q_2 = q_4 = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (3.6)$$

где \mathbf{i} — орт оси x , направленной поперек слоя, λ — декремент. Можно показать, что в случае периодических возмущений относительно координат y, z , направленных вдоль слоя, имеет место равенство

$$(\lambda - \lambda^*) \left[J_1 + \text{Pe} B \left(-\frac{I_1}{a_1} + \frac{I_2}{a_2} - \frac{\sigma_a I_3}{a_3} + \frac{\sigma_c I_4}{a_4} \right) \right] = -BJ_2 \quad (3.7)$$

$$J_1 = \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 d\Omega, \quad I_j = \int_{\Omega} |q_j|^2 d\Omega, \quad j = \overline{1, 4}$$

$$J_2 = 2i \int_{\Omega} \text{Im} \left(\frac{\beta_1 q_1^*}{a_1} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{q_2^*}{a_2} \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\beta_3 \sigma_a}{a_3} q_3^* \frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\beta_4 \sigma_c}{a_4} q_4^* \frac{\partial q_4}{\partial x} \right) d\Omega$$

где Ω — область, определяемая периодами по осям y, z ; звездочка в верхнем индексе обозначает операцию комплексного сопряжения. Можно показать, что для периодических по y, z возмущений выполняется $\text{Im}(q_j^* \partial q_j / \partial x) = 0$. Отсюда вытекает, что принцип смены устойчивости имеет место при отсутствии примесной проводимости $n_0 = 0$. Когда диссоциационная проводимость сравнима с инжекционной, вообще говоря, возможна колебательная неустойчивость.

Применяя принцип смены устойчивости и действуя аналогично [10], приходим к следующей задаче, определяющей критическое значение параметра неустойчивости $B_{id} = -B(a_1/\beta_1 + a_3 \sigma_a/\beta_3)$ относительно плоских периодических возмущений

$$L^2 v = k^2 B_{id} \left(\int_0^x v(t) dt + a \int_x^1 v(t) dt \right) \quad (3.8)$$

$$x=0; 1: \quad v = \frac{dv}{dx} = 0; \quad L \equiv \frac{d^2}{dx^2} - k^2, \quad a = - \left(a_2 + \frac{\sigma_c a_4}{\beta_4} \right) / \left(\frac{a_1}{\beta_1} + \frac{\sigma_a a_3}{\beta_3} \right)$$

где k — волновое число. Задача (3.8) решалась методом Бубнова — Галеркина путем разложения по степенным функциям. Критическое значение B_{id} при заданном a определялось из условия $B_{id*} = \min B_{id}$, $k > 0$. Вычисления проводились с точностью $B_{id*} \pm 1$, $k_* \pm 0,05$. Результаты расчетов приведены ниже:

a	-0,2	-0,1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
B_{id*}	374,2	269,8	221	169,4	140,2	121	107	96
k_*	3,8	4,3	4,5	4,7	4,8	4,8	4,8	4,8

При $a \rightarrow -1+0$ следует $k_* \rightarrow 0$, $B_{id*} \rightarrow \infty$. С физической точки зрения это означает, что с увеличением диссоциационной проводимости (концентрации n_0) критическое напряжение U_* и критическая длина волны $\lambda_* = 2\pi d/k_*$ увеличиваются. При $a \geq 0$ с точностью 10% B_{id*} определяется приближенной формулой $B_{id*} = 196(1+a)$. При $-0,2 \leq a \leq 0$ погрешность этой формулы достигает 30%. Таким образом, критическую напряженность поля можно оценить из критерия

$$\frac{ed^3}{\eta E_*} \left[\alpha_p n_{A*} n_{B*} \left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) + \alpha_i n_{a*} n_{c*} \left(\frac{1}{b_3^2} + \frac{1}{b_4^2} \right) + \right. \\ \left. + \alpha_1 n_{A*} n_{c*} \left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_4^2} \right) + \alpha_2 n_{B*} n_{a*} \left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_3^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4\pi e}{\epsilon} (n_{A*} - n_{B*} + n_{a*} - n_{c*}) \left(\frac{n_{A*}}{b_1} - \frac{n_{B*}}{b_2} + \frac{n_{a*}}{b_3} - \frac{n_{c*}}{b_4} \right) - \right. \\ \left. - \alpha_p n_0^2 F(E_*) \left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) \right] = 196$$

$$n_{j*} = n_j(E_*), \quad j = A, B, a, c; \quad E_* = U_*/d$$

Рассмотрим результаты исследований при цилиндрической геометрии электродов. Действуя аналогично [11], приходим к следующей спектральной

h	$a=1$	0,5	γ	-0,1
0,1	0,0248(3)	0,0364(3)	0,083(3)	0,14(3)
0,2	0,505(3)	0,73(3)	1,55(3)	2,4(3)
0,3	3,5(4)	5,0(4)	10,1(4)	14,7(4)

ной задаче относительно параметра $B=G \text{ Pe } C$:

$$L_m^2 v = \frac{m^2 B}{r^2} \left(- \int_1^r \left(\frac{a_1}{\beta_1} + \frac{\sigma_a a_3}{\beta_3} \right) t v dt + \int_r^H \left(a_2 + \frac{\sigma_c a_4}{\beta_4} \right) t v dt \right)$$

$$r=1; \quad H: \quad v = \frac{dv}{dr} = 0; \quad L_m = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \quad (3.9)$$

$$C = \frac{4\pi e n_0 R_1}{\varepsilon E_1}, \quad G = \frac{e n_0 E_1 R_1^3}{v \eta}, \quad \text{Pe} = \frac{v}{b_2 E_1 R_1}, \quad \sigma_j = \frac{n_j(E_j)}{n_0}$$

$$j=a, c; \quad E_a = \frac{U}{R_1 \ln H}, \quad E_c = h E_a, \quad H = h^{-1} = \frac{R_2}{R_1}$$

Здесь $R_1(R_2)$ — радиус центрального (внешнего) электрода; $a_j, j=\overline{1,4}$ определены в (3.5); m — номер гармоники плоских возмущений.

Задача (3.9) решалась в предположении $F(E_{(0)})=1$, методом Бубнова — Галеркина путем разложения v по системе базисных функций

$$v_n = A_{1n} r^m + A_{2n} r^{-m} + A_{3n} r^{m+2} + A_{4n} r^{-m+2} + Z_n$$

$$Z_n = J_m(\alpha_{mn}) Y_m(\alpha_{mn} r) - J_m(\alpha_{mn} H) Y_m(\alpha_{mn})$$

где α_{mn} — корни уравнения $J_m(\alpha) Y_m(\alpha H) - J_m(\alpha H) Y_m(\alpha) = 0$, J_m, Y_m — функции Бесселя 1-го рода. Коэффициенты $A_{jn}, j=\overline{1,4}$ определялись из условий $r=1; H: v_n = dv_n/dr = 0$. Вычислялся параметр B_{id} в зависимости от значений m, h, a . Результаты вычислений критического значения $B_{id*} = \min B_{id}, m=1, 2, 3, \dots$ и соответствующих m_* (в скобках) приведены в табл. 1. При униполярной инжекции с центрального электрода ($\sigma_c=0$) имеем $a = -\gamma_p/A, B_{id} = B \cdot A, A = \sigma_a^2/\beta_3 - \gamma_p/\beta_1^2$. Отсюда видно, что при преобладании диссоциации над инжекцией $\gamma_p/\beta_1^2 > \sigma_a^2/\beta_3$ равновесие жидкости устойчиво, так как $a > 0, A < 0$, а собственные значения задачи (3.9) положительны. Развитие неустойчивости возможно лишь при преобладании инжекции $\sigma_a^2/\beta_3 > \gamma_p/\beta_1^2$, когда $A > 0, a < 0$. Критическое напряжение находится следующим образом. По зависимости B_{id*} от a строится зависимость B_{id*} от U . Затем строится зависимость B_{id} от U . Точка пересечения этих кривых определяет U_* .

4. Электроконвекция при инжекционной проводимости. Краевая задача, описывающая электроконвекцию при инжекционной проводимости, следует из (1.1)–(1.5) при $n_1=n_2=0$. Особый интерес вызывает униполярная инжекционная проводимость, так как в этом случае течение более устойчиво, а скорость максимальна. В случае униполярной инжекции с катода краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - G_c n \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = -\xi_c n, \quad \text{Pe} \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(-n \mathbf{E} + \text{Pe } n \mathbf{v}) = 0$$

$$S_1: \Phi=1, v=0; S_2: n=f_c, \Phi=0, v=0 \quad (4.2)$$

$$G_c = \frac{en_c(E_0)E_0d^3}{v\eta}, \quad \xi_c = \frac{4\pi en_c(E_0)d}{\epsilon E_0}$$

Рассмотрим результаты исследования ЭГД-неустойчивости в цилиндрических конденсаторах, предполагая закон инжекции линейным: $n_c(E) =$

Таблица 2

h	$\xi_c=10^{-3}$	10^{-2}	0,1	1	10	20	100
0,1	0,085 (3)	0,132 (3)	0,88 (2)	35,6 (3)	$30,3 \cdot 10^2$ (3)	$30,1 \cdot 10^2$ (3)	$30 \cdot 10^4$ (3)
0,2	1,56 (3)	1,785 (3)	4,48 (3)	75,4 (3)	$57,2 \cdot 20^2$ (3)	$56,2 \cdot 20^2$ (3)	$54,2 \cdot 10^4$ (4)
0,3	10,1 (4)	10,8 (4)	17,2 (4)	167,2 (4)	$91,4 \cdot 10^2$ (4)	$88 \cdot 20^2$ (4)	$85,4 \cdot 10^4$ (5)
0,5	169 (7)	173 (7)	212 (7)	763 (7)	$222 \cdot 10^2$ (7)	$200 \cdot 20^2$ (7)	$185 \cdot 10^4$ (8)

$=\eta_c E$. Тогда $\xi_c = 4\pi e\eta_c d/\epsilon$ определяет интенсивность инжекции. В равновесии из (4.1), (4.2) получаем

$$E_0 = -Ar^{-1}g(r), \quad n_0 = A/g(r), \quad g(r) = (1 + \xi_c(r^2 - 1))^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \ln H / \int_1^H r^{-1}g(r) dr$$

Для малых монотонных возмущений, плоских и периодических по угловой координате по аналогии с выводом (3.9), получаем

$$L_m^2 v = -m^2 G_c \left(n E_0 + \frac{dn_0}{dr} \Phi \right) \frac{1}{r}, \quad L_m \Phi = \xi_c n \quad (4.3)$$

$$-\frac{dn}{dr} + 2\xi_c \frac{n_0 n}{E_0} + \frac{1}{E_0} \frac{dn_0}{dr} \left(\frac{d\Phi}{dr} + \text{Pe} \frac{v}{r} \right) = 0$$

$$r=1: n_3 = d\Phi/dr, \quad \Phi=0, \quad v=dv/dr=0 \quad (4.4)$$

$$r=H: \Phi=0, \quad v=dv/dr=0$$

Задача (4.3), (4.4) решалась методом Бубнова — Галеркина путем разложения v, Φ по v_n, Z_n , определенным в предыдущем пункте. Результаты вычислений критических значений $B_* = \min B(m)$, $m=1, 2, \dots; m_*$ (в скобках), где $B = G_c \text{Pe} \xi_c$, приведены в табл. 2. Численные значения при малых ξ_c совпали с результатами вычислений [11], проведенных независимым итерационным методом. При $\xi_c \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика $B_* = T_* \xi_c^2$, где $T_* = T_*(h)$ и определены в табл. 2. Настоящие вычисления отличаются от [12], проведенных для случая автономного уровня инжекции, т. е. в предположении постоянства плотности инжектируемого заряда на инжекторе.

5. Сравнение с экспериментом. Зарождение движения в низковольтной области при высокой примесной проводимости $\sigma \geq 10^{12}$ См/см в плоском [13], цилиндрическом [14, 15] конденсаторах и при несимметричных электродах [1, 16] всегда наблюдается вблизи поверхностей электродов. Эти данные качественно согласуются с результатами п. 2. При линейном законе инжекции в точках, где $y/\xi_a < 1$, из (2.5) следует линейность скорости течения по полю. Аналогичный результат дают численные расчеты в системе лезвие — плоскость. Такая зависимость часто фиксируется в экспериментах [17].

Расчеты показывают, что при линейной инжекции ВАХ квадратична по напряжению при любой геометрии электродов и даже при наличии течения. Для плоского конденсатора при униполярной инжекции поле и объемный заряд определя-

ют как

$$E = E_0 f(\xi_c) g(x), \quad q = \frac{e\eta_c E_0 f(\xi_c)}{g(x)}, \quad E_0 = \frac{V}{d}$$

$$f(\xi_c) = \frac{3\xi_c}{(g^3(d) - 1)}, \quad g(x) = \left(1 + 2\xi_c \frac{x}{d}\right)^{1/2}, \quad \xi_c = \frac{4\pi e\eta_c d}{\varepsilon}$$

Отсюда видно, что ВАХ квадратична по U при любой интенсивности инжекции:

$$j = e\eta_c b f^2(\xi_c) E_0^2$$

$$\xi_c \ll 1: j = \frac{e\eta_c b U^2}{d^2}; \quad \xi_c \gg 1: j = \frac{9}{32\pi} \frac{\varepsilon b U^2}{d^3}$$

Последний результат наблюдался в экспериментах с пиролоином 1460 [3]. Отметим, что рассматриваемый подход отличается от [3], где предполагался автономный уровень инжекции $q(0) = q_0 = \text{const}$. В настоящем случае плотность инжектируемого заряда на инжекторе возрастает с ростом поля, что согласуется с результатами измерений методом эффекта Керра [2]. Обратим внимание, что в общем случае начало нелинейных участков ВАХ хорошо интерполируется квадратичной зависимостью [2, 4, 8, 14, 17]. Поэтому можно высказать гипотезу, что в некотором диапазоне высоковольтных полей линейный закон инжекции является универсальным. Теоретические рассуждения на этот счет приведены в [4].

Автор благодарит участников семинара Г. А. Любимова за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Экспериментальное изучение механизма проводимости полярных жидких диэлектриков // Электрон. обраб. материалов. 1983. № 5. С. 37–41.
3. Aiken P., Lacroix J. C. Electrohydrodynamic stability of liquids subjected to unipolar injection: non linear phenomena // J. Electrostatics. 1978. № 5. P. 439–452.
4. Жакин А. И. Электрогидродинамика жидких диэлектриков на основе диссоциационно-инжекционной модели проводимости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 3–13.
5. Гогосов В. В., Полянский В. А., Шапошникова Г. А., Варганян А. Д. Исследование движения сред, взаимодействующих с электромагнитным полем // Отчет ин-та механики МГУ. 1987. № 3485. 78 с.
6. Измайлов Н. А. Электрохимия растворов. М.: Химия, 1966. 575 с.
7. Дейнега Ю. Ф., Виноградов Г. В. О поведении в электрическом поле неводных пластичных дисперсных систем // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 4. С. 879–882.
8. Стишков Ю. К. Электрогидродинамические течения и механизмы электризации «технических» жидких диэлектриков // Электрон. обраб. материалов. 1977. № 6. С. 29–32.
9. Жакин А. И. Исследование электроконвекции и электроконвективного теплопереноса в жидких диэлектриках при униполярной инжекционной проводимости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 14–20.
10. Жакин А. И., Тарапов И. Е. Неустойчивость и течение слабопроводящей жидкости при окислительно-восстановительных реакциях на электродах и рекомбинации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 20–26.
11. Жакин А. И., Тарапов И. Е. Электрогидродинамическая неустойчивость слабопроводящей жидкости между двумя цилиндрическими электродами при униполярной инжекции // Магнитная гидродинамика. 1979. № 4. С. 53–57.
12. Richardson A. T. The linear instability of a dielectric liquid contained in a cylindrical annulus and subjected to unipolar charge injection // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1980. Т. 33. Pt 3. P. 277–292.
13. Никурадзе А. Жидкие диэлектрики. М.; Л.: ОНТИ НКДМ, 1936. 236 с.
14. Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Экспериментальные исследования ЭГД-неустойчивости и электроконвекции в цилиндрических конденсаторах // Магнитная гидродинамика. 1981. № 4. С. 139–142.
15. Федоненко А. И., Жакин А. И. Экспериментальные исследования электроконвективного движения в трансформаторном масле // Магнитная гидродинамика. 1982. № 3. С. 74–78.
16. Жакин А. И. Редокс-системы в электрогидродинамике и расчет электроконвективных течений // Магнитная гидродинамика. 1982. № 2. С. 70–78.
17. Стишков Ю. К., Остапенко А. А. Зависимость интенсивности и КПД электрогидродинамических течений от низковольтной проводимости жидкости // Магнитная гидродинамика. 1979. № 1. С. 74–79.

Харьков

Поступила в редакцию
2.XII.1986