

УДК 532.5.011:551.465.41

## **ГИДРОДИНАМИКА СФЕРЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ**

**ЧАШЕЧКИН Ю. Д.**

Оптическими методами исследована картина течения вокруг сферы, движущейся с постоянной скоростью в жидкости с экспоненциальным распределением плотности. В качестве одного из структурных элементов течения выделен тонкий плотностной пограничный слой, формирующий высокоградиентную оболочку следа. Исследованы свойства симметрии течения. Указаны границы применимости традиционного приближения слабой стратификации в задаче возбуждения присоединенных внутренних волн.

**1. Постановка задачи.** Плотность жидкости в естественных условиях (океане, соленых и пресноводных водоемах) и в технологических установках не является постоянной вследствие неоднородности ее температуры или концентрации растворенных и (или) взвешенных частиц. В устойчиво стратифицированной среде, плотность которой  $\rho(z)$  убывает с высотой  $z$ , существуют внутренние волны, обусловленные действием возвращающих сил плавучести при адиабатическом смещении жидких частиц из собственного положения равновесия. Однако вариации плотности, как правило, невелики, масштаб изменения плотности (масштаб плавучести)  $\Lambda = (d \ln \rho / dz)^{-1}$  много больше всех характерных линейных размеров системы (глубины слоя жидкости, размеров тела и т. д.). Поэтому в теории внутренних волн обычно используется приближение слабой стратификации, при котором влиянием неоднородности плотности на процесс обтекания тела пренебрегается.

При расчете полей внутренних волн реальное тело обычно заменяется совокупностью гидродинамических источников [1–3], параметры которых выбирают так же, как в случае однородной жидкости [4]. Справедливость такого приближения в рамках модели идеальной жидкости исследована для плоской задачи [5], для трехмерной она не проанализирована ни теоретически, ни экспериментально. В опытах фазовая структура присоединенных внутренних волн, образующихся при равномерном горизонтальном движении сферы в экспоненциально стратифицированной жидкости, перестраивается с изменением скорости тела, и для ее описания необходимо изменять число и относительное расположение моделирующих тело гидродинамических источников и стоков [6].

Возбуждение внутренних волн при движении сферы в стратифицированной жидкости изучалось в [7–9], вихревая структура спутного течения визуализирована в [10, 11], в [12] определено влияние стратификации на коэффициент сопротивления при горизонтальном движении сферы.

Целью работы является детальное изучение картины течения, возникающего при равномерном движении сферы в стратифицированной жидкости, выделение структурных элементов, усиливающих влияние слабой стратификации, и определение условий применимости традиционного приближения в проблеме генерации внутренних волн.

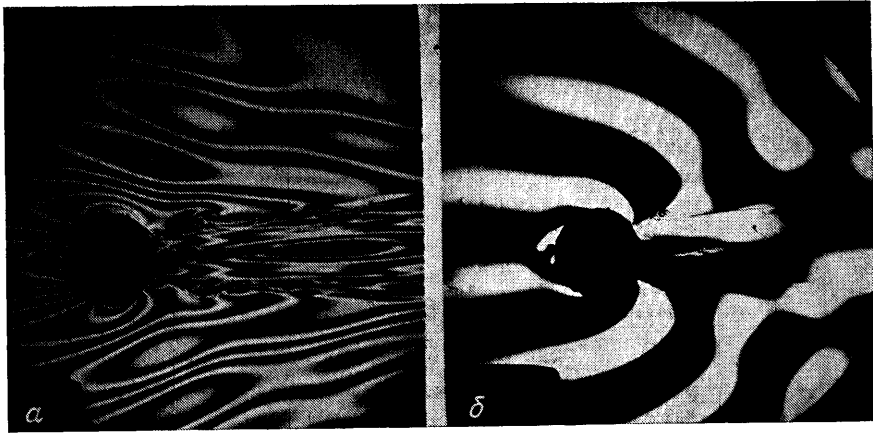
Уравнения гидродинамики стратифицированной жидкости, описывающие движение тела в неоднородной изотермической жидкости, включают

уравнение Навье — Стокса, уравнение непрерывности, уравнение сохранения вещества, учитывающее диффузионный и конвективный перенос стратифицирующей добавки (соли), уравнение состояния, определяющее зависимость плотности от солености. Граничные условия на поверхности сферы включают условие прилипания и условие непротекания соли (обращение в нуль нормальной компоненты диффузионного потока соли на поверхности сферы). Из последнего условия следует, что изопокинические поверхности около неподвижной сферы должны быть нормальны к ее поверхности и пересекаться с изобарами. К этим условиям обычно добавляется условие излучения при расчете внутренних волн или требование затухания всех возмущений на бесконечности.

Размерными параметрами задачи являются скорость  $U = \{U_x, 0, U_z\}$  и диаметр сферы  $d$ , ускорение свободного падения  $g$ , масштаб плавучести  $\Lambda = (d \ln \rho/dz)^{-1}$  (или частота  $N = \sqrt{g/\Lambda}$  и период плавучести  $T_b = 2\pi/N = 2\pi\sqrt{\Lambda/g}$  в случае экспоненциального распределения плотности  $\rho_0 = \rho_{00} \exp\{-z/\Lambda\}$ ), кинематическая вязкость  $\nu$ , коэффициент диффузии соли  $k_s$  (распределение соли создает стратификацию среды). Наряду с масштабами  $d, \Lambda$  из определяющих параметров задачи можно образовать следующие величины, имеющие размерность длины: вязкий волновой масштаб  $L_\nu = \sqrt[3]{g\nu/N}$  и характерную длину присоединенных внутренних волн  $\lambda = UT_b$  [9].

Определяющими безразмерными параметрами являются число Рейнольдса  $Re = Ud/\nu$ , внутреннее число Фруда  $Fr = U^2/N^2 d^2 = U^2 \Lambda/gd^2$ , отношение масштаба плавучести и размера тела  $C = \Lambda/d$  (относительный вязкий волновой масштаб выражается через другие безразмерные комбинации  $L_\nu/d = (Fr C^2/Re^2)^{1/3}$ ), число Шмидта  $Sc = \nu/k_s$  (для водного раствора поваренной соли, а также морской воды  $Sc \approx 700$ ), угол наклона траектории к горизонту  $\cos \varphi = U_x/\sqrt{U_x^2 + U_z^2}$ . В наиболее распространенном случае слабой стратификации  $C \gg 1$ . Число Рейнольдса в зависимости от скорости и размеров тела может быть меньше или больше единицы, обычно  $Re > 1$ ; число Фруда меняется в широком диапазоне  $Fr \leq 1$ ; число Шмидта  $Sc \gg 1$ . Различие коэффициентов молекулярного переноса импульса (кинематической вязкости) и вещества (коэффициента диффузии соли) является существенным свойством стратифицированных течений. Именно вследствие этого в жидкости может происходить образование тонких высокоградиентных прослоек, усиливающих действие исходной слабой стратификации (на которых  $\Lambda \ll \Lambda_0, C \ll C_0$ ), обуславливающих различие гидродинамики тел в однородной и стратифицированной средах. Вследствие анизотропии сил плавучести, действующих только в вертикальном направлении, формирование высокоградиентных прослоек может приводить к изменению свойств симметрии течений.

**2. Методика проведения экспериментов и измерений.** Оптическими методами регистрировалась картина течения при равномерном движении сфер различного диаметра ( $d = 0,5; 1; 2; 2,5; 3; 4; 5; 7$  см) в бассейнах размерами  $0,7 \times 0,25 \times 0,7$  м<sup>3</sup> и  $1,5 \times 0,4 \times 0,4$  м<sup>3</sup>, заполненных экспоненциально стратифицированным по глубине раствором поваренной соли. Использовались два способа создания стратификации — методами послойного [6] и непрерывного [13] вытеснения, в которых для уменьшения перемешивания при заполнении жидкость подавалась в бассейн снизу через диффузор с горизонтальным отражателем потока. Сферы подвешивались на тонком вертикальном ноже, подвижной или неподвижной направляющей нити и буксировались с постоянной скоростью с помощью специального приводного механизма, включающего мотор постоянного тока, редуктор, систему ведения буксировочной нити. Контроль величины и стабильности скорости производился по оптическим измерениям частоты вращения диска с отверстиями, установленного на приводном барабане. Погрешность измерения и нестабильность скорости движения не превышала 1%.



Фиг. 1

Картина течения в вертикальной плоскости, проходящей через линию движения, наблюдалась и регистрировалась с помощью интерференционно-теневых приборов ИАБ-451, ИАБ-458 (диаметр поля зрения 230 мм) фотокамерой РФК-5. Применялись различные способы визуализации: прямой теневой (без ножа), вертикальная щель — плоский нож Фуко в фокусе, тонкая щель — нить в фокусе (при различных углах установки щели к вертикали) [14], цветной теневой метод, основанный на рефракции и естественной дисперсии стратифицированных сред [15]. Применение различных методов обусловлено необходимостью выделения одновременно существующих сильных и слабых, крупно- и мелкомасштабных трехмерных оптических неоднородностей в картине обтекания с учетом ограничений теневых методов, обусловленных интегрированием вдоль луча и малостью динамического диапазона. Распределения периода плавучести  $T_b(z)$  и горизонтальной компоненты скорости течения  $u_x(z)$  по глубине измерялись оптическими методами с помощью плотностной метки, образующейся за вертикально всплывающим газовым пузырьком [15] с погрешностью 5%.

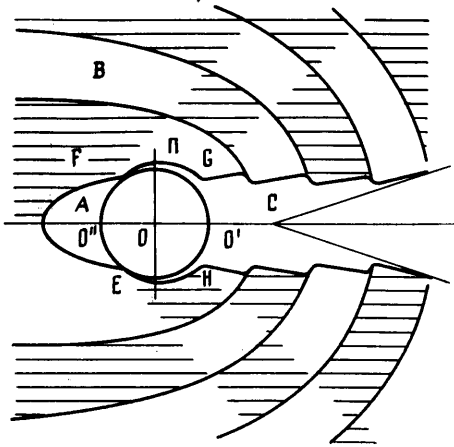
Всего проведено более 1000 опытов в жидкостях с различными значениями градиента плотности (масштаб плавучести варьировался в диапазоне  $3 < \Delta < 56$  м, период плавучести —  $3 < T_b < 15$  с). В исследованном диапазоне скоростей тела  $0,4 < U < 15$  см/с характер спутного течения изменялся от ламинарного до нестационарного (и турбулизованного). Однако при этом сохранялись некоторые структурные элементы течения, которые отчетливо выделяются в ламинарном режиме, и основные формы неустойчивости.

**3. Структура стратифицированного течения около сферы.** Черно-белая фотограмма цветного теневого изображения и кинограмма, полученная традиционным методом «щель — нож Фуко» установившейся картины течения вокруг сферы, движущейся горизонтально с постоянной скоростью в жидкости с экспоненциальным распределением плотности, показаны на фиг. 1. Методы последовательно визуализируют вертикальную и горизонтальную компоненты градиента коэффициента преломления. Схема течения приведена на фиг. 2.

В картине течения выделяются следующие типичные структурные элементы: *A* — заблокированная жидкость спереди тела, *П* — пограничный слой (включающий более тонкий плотностной и скоростной пограничные слои), *B* — присоединенные внутренние волны, *C* — спутный след (состоящий из несовпадающих плотностного и скоростного следа). Внутри спутного течения в зависимости от диаметра сферы, стратификации и скорости движения могут наблюдаться захваченные внутренние волны

[6], замкнутое возвратное течение — присоединенный вихрь в донной части сферы, свободно дрейфующие вихри [11], сложные вихревые структуры, связанные с неустойчивостью вихревых слоев [6, 10].

Заблокированная жидкость (область А перед телом) характеризуется более однородным, чем исходное, распределением плотности жидкости в центре и плавным увеличением градиента на периферии. Ее вертикальный



Фиг. 2

размер определяется поперечным размером тела. Горизонтальная протяженность области блокировки определяется условиями динамического равновесия между процессами проталкивания жидкости на горизонте движения центра тела (которую удерживают силы плавучести, ограничивающие вертикальное смещение частиц) и ее выносом в след, а также процессами диффузии соли через ее границу. Она растет с уменьшением числа Фруда при увеличении стратификации (частоты плавучести среды), диаметра и при уменьшении скорости движения тела.

Граница заблокированной жидкости проходит между замкнутыми и горизонтальными изофотами перед телом (см. фиг. 1, а). Цветной

теневого метод позволяет выделить точки контакта границы области заблокированной жидкости с поверхностью сферы (точки E, F). Течение в области блокировки чувствительно к деталям подвески тела. Если сфера буксируется на подвижной нити, проходящей через ее центр (в системе координат, связанной с телом, исключается линия тока, проходящая через центр тела), то в некоторых режимах (умеренные скорости, большой диаметр тела, сильная стратификация) течение теряет устойчивость и вокруг нити перед телом наблюдаются характерные мелкие вихри, огибающая которых напоминает наконечник копья [6]. Это явление не наблюдается, если сфера подвешена на неподвижной нити, проходящей через ее центр, и буксируется с помощью второй нити, отстоящей всего на 0,2 см от первой.

Вблизи поверхности тела в однородной жидкости образуется пограничный слой с большими значениями сдвига скорости. В стратифицированной жидкости наряду со скоростным формируется плотностной пограничный слой, градиент плотности в котором существенно больше, чем в невозмущенной среде. С ним связано искривление изофот и быстрая смена цветов у полюсов сферы. Стекающий плотностной пограничный слой образует высокоградиентную оболочку следа, видимую на всех теневых кинограммах при любых способах визуализации, так как слои с большим градиентом плотности ориентированы под углом к горизонту. Плотностной пограничный слой выделяется при всех исследованных режимах обтекания в окрестности полюсов сферы, где он не затеняется телом при теневой визуализации, и позволяет проследить за движением точек отрыва следа при изменении параметров движения.

Из анализа теневых кинограмм с плотностной меткой следует, что высокоградиентная оболочка плотностного следа располагается на внутренней границе или в центре области максимального сдвига скорости спутного течения (область  $\max du_x/dz$ , где  $u$  — скорость в системе координат, связанной с телом). Толщина оболочки с повышенным значением градиента плотности в 15–20 раз меньше высоты слоя сдвига скорости, поэто-

му в течении наблюдается расщепление масштабов изменения скорости и плотности, а их профили не являются подобными.

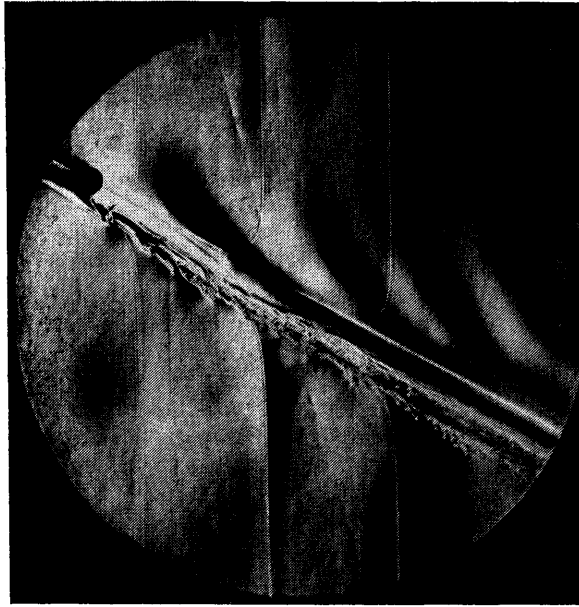
Высокоградиентная оболочка оказывает существенное влияние на устойчивость и структуру спутного течения; на ней в первую очередь развивается локальная сдвиговая неустойчивость — неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, когда локальное значение числа Ричардсона  $Ri = N^2(z) (\partial u_x / \partial z)^{-2}$  становится меньше критического. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца приводит к образованию характерного волновихревого буруна (см. фиг. 1, а). Центр буруна стационарен относительно тела и находится в области максимального расширения следа на гребне первой от тела присоединенной внутренней волны. Изменяя скорость тела при заданной стратификации, можно реализовать различные регулярно воспроизводимые формы неустойчивости Кельвина — Гельмгольца — от одиночного вихревого завитка внутри высокоградиентной оболочки до интенсивного буруна, охватывающего и заполняющего весь след [6, 11].

Большую часть поля зрения заполняют внутренние волны, гребни и впадины которых лежат на границах черных и белых полос (полуокружностей позади тела на фиг. 1, б). Рассчитанные по линейной теории амплитудно-фазовые характеристики присоединенных внутренних волн, которые образуются при равномерном движении тела в экспоненциально стратифицированной жидкости [6, 9], согласуются с экспериментом, если при выборе числа и относительного расположения моделирующих гидродинамических источников учитывать особенности пространственной структуры картины течения. При движении сферы малого диаметра ( $d \ll \lambda$ ,  $d \ll L_v$ ) амплитуда волн монотонно изменяется вдоль фазовой поверхности, как и при обтекании диполя [8].

Сложная интерференционная картина волн, возникающих при движении сферы, диаметр которой сравним с длиной волны и вязким волновым масштабом ( $d \sim \lambda$ ,  $d \sim L_v$ ), моделируется обтеканием системы точечных особенностей — двух источников в точках  $E, F$  контакта границы области заблокированной жидкости со сферой и двух стоков в точках  $G, H$  отрыва следа (фиг. 2). При медленном движении большого тела ( $d \gg \lambda$ ,  $d > L_v$ ) возникают две волновые системы, центры которых находятся в точках отрыва высокоградиентного плотностного пограничного слоя. Области их существования ограничены высокоградиентными оболочками спутного течения. Хотя вариации плотности при обтекании тела малы (и в природных условиях, и в лаборатории  $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$ ), они происходят на малых масштабах и вызывают большие изменения в распределениях градиента плотности и частоты плавучести вблизи тела и вследствие малости коэффициента диффузии соли  $k_s$  на больших удалениях от него. Аналогичные модели могут быть использованы при расчете картины установления присоединенных внутренних волн при внезапном начале движения сферы с постоянной скоростью [16].

Завихренность, возникающая при обтекании тела в стратифицированной жидкости, переносится внутренними волнами, сбрасывается в скоростной и плотностной спутные следы; в последнем изопикнические поверхности (прослойки) расположены под углом к горизонту (и к изобарическим поверхностям). В переходных режимах, как и в однородной жидкости, завихренность может накапливаться в донной части сферы и сбрасываться в след в форме нерегулярных вихревых петель, винтовых скрученных вихревых нитей и регулярной последовательности дискретных вихрей с горизонтальной осью симметрии [11]. Вихревые структуры также могут формироваться при свертывании высокоградиентной оболочки следа.

Перестройка внутренней структуры течения приводит к немонотонной зависимости угла отрыва высокоградиентной оболочки следа в вертикальной плоскости  $\theta$  от внутреннего числа Фруда (угол отсчитывается от линии движения за телом). При малых скоростях движения и ламинарном обтекании величина  $\theta$  составляет  $50-60^\circ$  ( $d=1-4$  см,  $T_b=4,2; 10$  с,



Фиг. 3

$Fr < 0,01$ ) вследствие стабилизирующего влияния стратификации, удерживающего жидкие частицы на горизонте нейтральной плавучести. С увеличением скорости движения под действием сил плавучести, сплюсывающих более однородный по плотности след в вертикальном направлении, точки отрыва приближаются к плоскости движения центра сферы; наблюдается уменьшение коэффициента сопротивления [12]. Минимальное значение угла отрыва  $\theta$  достигается при  $Fr = 0,1-0,2$ , его величина составляет  $25^\circ$  при  $d = 0,5; 1$  см,  $T_b = 4,2$  с и  $15^\circ$  при  $d = 2$  см,  $T_b = 4,2$  с. При дальнейшем увеличении скорости угол  $\theta$  вновь начинает расти пропорционально  $\lg Fr$  вследствие накопления завихренности в донной части сферы и формирования присоединенного донного вихря; он достигает во второй критической точке ( $Fr \approx 1$ )  $70-75^\circ$  и далее увеличивается более медленно. Коэффициенты  $a, b$  в зависимости  $\theta = a + b \lg Fr$ , определенные методом наименьших квадратов таковы: при  $Fr < 0,1$   $a = -2, b = -35$  для сферы  $d = 1$  см;  $a = -19, b = -35$  для  $d = 2$  см; в диапазоне  $0,2 < Fr < 1$  для сферы  $d = 1$  см  $a = 65, b = 58$ ;  $a = 70, b = 55$  при  $d = 2$  см ( $T_b = 4,2$  с).

Аналогичный характер имеет зависимость угла отрыва от числа Рейнольдса, но значения минимального угла отрыва наблюдаются при различных числах Рейнольдса при изменении диаметра тела. В однородной жидкости угол отрыва монотонно возрастает от  $45$  до  $70^\circ$  при увеличении числа Рейнольдса от  $40$  до  $300$  и не зависит от диаметра сферы [17].

При движении тела под углом к горизонту также формируется область заблокированной жидкости, плотностной и скоростной пограничные слои, образующие спутное течение и две системы внутренних волн — продольные (в верхней части фиг. 3) и поперечные (ниже линии движения на фиг. 3), линия пересечения которых не совпадает с траекторией движения центра тела. В плотностной пограничный слой и спутный след увлекается более тяжелой жидкостью из нижележащих горизонтов. Высокоградиентные наклонные поверхности распадаются под действием тейлоровской неустойчивости на тонкие вертикальные нити с вихревым оголовком (бахрому солевых пальцев) в нижней части следа. Две волновые системы вырождаются в одну при горизонтальном движении тела.

Вследствие анизотропии сил, действующих на жидкость со стороны тела, анизотропии сил плавучести, действующих только в вертикальном

направлении, образования усиливающих действие стратификации высокоградиентных прослоек картина обтекания сферы не обладает осевой симметрией при движении тела горизонтально или под углом к горизонту. Особым случаем является вертикальное движение сферы, когда направления сил трения и плавучести совпадают, и можно ожидать сохранения осевой симметрии течения в следе.

При горизонтальном движении тела спутное течение симметрично относительно вертикальной и горизонтальных плоскостей, проходящих через линию движения тела. Волновое поле симметрично относительно вертикальной плоскости и антисимметрично относительно центральной горизонтальной плоскости, поэтому гребню в верхнем полупространстве соответствует впадина в нижнем. Во всем диапазоне значений чисел Фруда и Рейнольдса, в том числе и при самых малых, существенно различаются картины течения впереди и позади тела (вид фазовых поверхностей внутренних волн, форма заблокированной жидкости и спутного следа, наличие высокоградиентной оболочки течения позади тела). Волновые возмущения более выражены перед телом при  $Fr \ll 1$  и позади него при  $Fr > 1$ .

Приближение слабой стратификации в задаче возбуждения присоединенных внутренних волн [1–3, 6–9] применимо при одновременном выполнении условий  $d \ll \lambda = UT_b$  (что эквивалентно  $Fr \gg 1$ , поскольку  $\lambda = 2\pi d \sqrt{Fr}$ ) и  $d < L_v = \sqrt[3]{gv/N}$ , т. е. условий малости размеров тела по сравнению с длиной волны и вязким волновым масштабом. Однако при расчете амплитуд волн и в этом случае необходимо учитывать особенности картины обтекания тела, влияющие на процесс генерации волн — степень блокировки, форму спутного следа, интенсивность донного вихря и дискретных вихревых структур.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J. W. Internal waves generated by horizontally moving source // *Geophys. Fluid Dyn.* 1971. V. 2. № 1. P. 63–87.
2. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Стурова И. В. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних тел. Новосибирск: Наука, 1985. 319 с.
3. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Обтекание тела многослойным потоком несжимаемой тяжелой жидкости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 392–400.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
5. Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В. Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью: Препринт № 282. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 60 с.
6. Чашечкин Ю. Д., Макаров С. А., Беллев В. С. Присоединенные внутренние волны: Препринт № 214. М.: ИПМ АН СССР, 1983. 73 с.
7. Peat K. S., Stevenson T. N. Internal waves around a body moving in a compressible density-stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 70. P. 4. P. 673–688.
8. Макаров С. А., Чашечкин Ю. Д. Присоединенные внутренние волны в жидкости с экспоненциальным распределением плотности // ПМТФ. 1981. № 6. С. 47–54.
9. Макаров С. А., Чашечкин Ю. Д. Присоединенные внутренние волны в вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. № 9. С. 986–994.
10. Rao H.-P., Kao T. W. Vortex structure in the wake of a sphere // *Phys. Fluids.* 1977. V. 20. № 2. P. 187–191.
11. Сысоева Е. Я., Чашечкин Ю. Д. Вихревая структура следа за сферой в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 40–46.
12. Lofquist K. K., Purtell L. P. Drag on a sphere moving horizontally through a stratified liquid // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 271–283.
13. Fortuin J. N. Theory and application of two supplementary methods of constructing density gradient columns // *J. Polymer Sci.* 1960. B. 44. P. 505–515.
14. Васильев Л. А. Теневые методы. М.: Наука, 1968. 400 с.
15. Некрасов В. И., Чашечкин Ю. Д. Измерение скорости и периода внутренних колебаний жидкости методом плотностных меток // Метрология. 1974. № 11. С. 36–41.
16. Чашечкин Ю. Д., Макаров С. А. Нестационарные внутренние волны // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 5. С. 1246–1250.
17. Taneda S. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds number // *Rept. Res. Inst. Appl. Mech.* 1956. V. 4. № 16. P. 99–105.

Москва

Поступила в редакцию  
9.IV.1987