

УДК 532.5.013.4:536.25

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЕМКОСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

КАРЯКИН Ю. Е.

Рассматривается двумерная нестационарная естественная конвекция в емкостях произвольного поперечного сечения. Уравнения конвекции в приближении Буссинеска записываются в криволинейной неортогональной системе координат, в которой границы исследуемой области совпадают с координатными линиями. Численное решение задачи осуществляется в физических переменных на основе многошагового полностью неявного конечно-разностного метода, использующего расщепление по физическим процессам и пространственным переменным. В качестве примера рассматривается численное моделирование нестационарного процесса конвекции в цилиндрической емкости, сечение которой — часть круга, заключенная между двумя равными и параллельными хордами.

Численное моделирование естественно-конвективных процессов в замкнутых емкостях простой геометрии рассматривалось в [1, 2], а в емкостях нетрадиционной формы — в [3–6].

1. Рассмотрим двумерную нестационарную конвекцию в четырехугольной плоской области $ABCD$ с произвольными криволинейными границами. Вектор силы тяжести расположен в этой же плоскости. Введем криволинейную неортогональную систему координат (x^1, x^2) , преобразующую исследуемую область конвекции $ABCD$ в декартовой плоскости (y_1, y_2) на каноническую — квадрат со стороной, равной единице ($0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1$). В этой системе уравнения двумерной конвекции (приближение Буссинеска) записываются в тензорном виде [7]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla_k (v^k v_i) = -\text{Gr} \frac{g^i}{g} \theta - \nabla_i p + g^{kl} \nabla_k (\nabla_l v_i) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla_k (v^k \theta) = \frac{1}{\text{Pr}} g^{kl} \nabla_k (\nabla_l \theta) \quad (1.2)$$

$$g^{kl} \nabla_k v_l = 0 \quad (1.3)$$

Здесь v_i, v^i — ковариантные и контравариантные составляющие вектора скорости, t — время, p — давление, $\theta = (T - T_2)/(T_1 - T_2)$ — относительная температура, T — температура (T_1 и T_2 — ее некоторые характерные значения), g^{kl} — контравариантные составляющие метрического тензора, ∇_i — символ ковариантной производной, g — ускорение свободного падения, g_i — его ковариантная составляющая, Gr — число Грасгофа, Pr — число Прандтля. Уравнения (1.1)–(1.3) записаны в безразмерном виде. В двумерном случае дважды повторяющиеся индексы здесь и далее означают суммирование от 1 до 2.

Ковариантные и контравариантные составляющие Φ_i, Φ^i любого вектора Φ связаны с его декартовыми составляющими Φ_α известными соотношениями тензорного анализа [8]

$$\Phi_i = \Phi_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}, \quad \Phi^i = \Phi_\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \quad (1.4)$$

Выражения, аналогичные (1.4), могут быть записаны для компонент тензора любого ранга. С их помощью уравнения (1.1)–(1.3) приводятся к виду, не содержащему тензорных производных. При этом производную $\nabla_k v_i$, входящую в (1.3), следует преобразовывать как дважды ковариантный тензор 2-го ранга, производную $\nabla_k(v^h v_i)$ из (1.1) — как дважды ковариантный и один раз контравариантный тензор 3-го ранга, наконец, $\nabla_k(\nabla_l v_i)$ — как трижды ковариантный тензор 3-го ранга. Тогда будем иметь

$$\nabla_k v_i = \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\beta}{\partial x^k} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^l} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(v_i \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^l} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x^k} \quad (1.5)$$

где u_α ($\alpha=1, 2$) — декартовы составляющие вектора скорости. Аналогично преобразуются остальные тензорные производные, входящие в (1.1), (1.2)

$$\nabla_k(v^h v_i) = \frac{\partial(v^{*h} v_i^*)}{\partial x^k}, \quad g^{hl} \nabla_k(\nabla_l v_i) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{*hl} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^l} \right) \quad (1.6)$$

$$\nabla_k(v^h \theta) = \frac{\partial(v^{*h} \theta)}{\partial x^k}, \quad g^{hl} \nabla_k(\nabla_l \theta) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{*hl} \frac{\partial \theta}{\partial x^l} \right) \quad (1.7)$$

Звездочкой в (1.5)–(1.7) обозначены величины, вычисленные с помощью матриц производных $\partial x^i / \partial y_\alpha$, $\partial y_\alpha / \partial x^i$, зафиксированных в точке дифференцирования Q [8]

$$v_i^* = v_h g_i^{*h}, \quad v^{*i} = v_h g^{*ih}$$

$$g_i^{*h} = \frac{\partial x^h}{\partial y_\alpha} \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \right)_Q, \quad g^{*ih} = \frac{\partial x^h}{\partial y_\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \right)_Q$$

С учетом (1.5)–(1.7) уравнения (1.1)–(1.3) преобразуются к виду

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(v^{*h} v_i^*)}{\partial x^h} = -\text{Gr} \frac{g_i}{g} \theta - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{*kl} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^l} \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(v^{*h} \theta)}{\partial x^h} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{*kl} \frac{\partial \theta}{\partial x^l} \right) \quad (1.9)$$

$$g^{*kl} \frac{\partial v_l^*}{\partial x^k} = 0; \quad i, k, l = 1, 2 \quad (1.10)$$

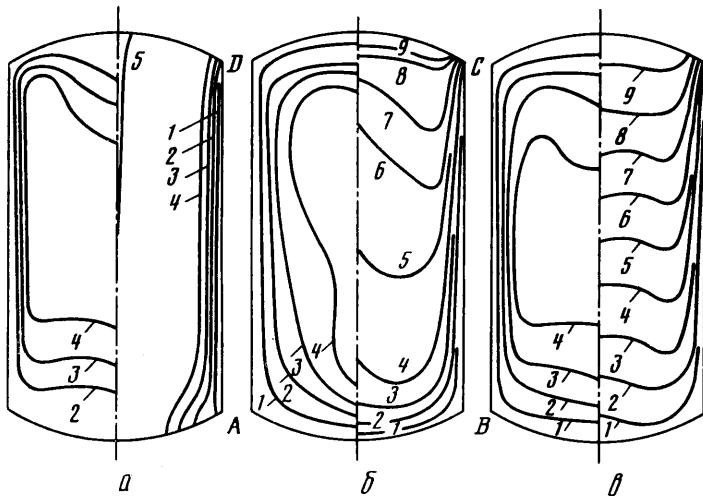
Уравнения (1.8)–(1.10) описывают нестационарную естественную конвекцию (приближение Буссинеска) в произвольной криволинейной неортогональной системе координат. Эти уравнения дополняются соответствующими граничными условиями для компонент скорости и температуры. При решении задачи в физических переменных давление p определяется из (1.8) с точностью до произвольной постоянной. Для ее нахождения используется дополнительное условие: $p=0$ в точке $x^1=x^2=0$.

В случае исследования нестационарных процессов должны быть также заданы начальные условия. Будем предполагать, что в начальный момент времени жидкость неподвижна во всей области конвекции и ее температура θ всюду равна 0,5.

2. Опишем кратко конечно-разностный метод решения системы (1.8)–(1.10). В области интегрирования наносится неравномерная сетка $x^1 = x_n^1$ ($n=0, 1, \dots, N$; $x_0^1=0, x_N^1=1$), $x^2 = x_m^2$ ($m=0, 1, \dots, M$; $x_0^2=0, x_M^2=1$) с экспоненциальными сгущениями вблизи твердых границ. Искомые сеточные величины v_1, v_2, p, θ задаются в узлах, смещенных друг относительно друга так, как это принято в методе маркеров и ячеек [9]. Конвективные производные в уравнениях (1.8), (1.9) аппроксимируются по схеме донорской ячейки, остальные слагаемые — обычными центральными разностями. Решение разностных уравнений относительно поправок к искомым величинам осуществляется с помощью многошаговой полностью

неявной схемы с расщеплением по физическим процессам и пространственным переменным [10]. При этом уравнение неразрывности (1.10) дополняется членом с производной по релаксационному времени $\partial(\delta p)/\partial\tau$ (δp — поправка к давлению) и решается с использованием расщепления по пространственным переменным последовательными скалярными прогонами вдоль направлений x^1 и x^2 . Для ускорения сходимости итерационного процесса используется набор шагов $\Delta\tau\{\Delta\tau_0, \Delta\tau_1, \dots, \Delta\tau_R\}$, обеспечивающий равномерное затухание гармонических возмущений во всем спектре собственных частот задачи [7, 10].

Заметим, что разностное уравнение для поправки δp не требует постановки каких-либо дополнительных граничных условий. Вблизи границ области конвекции разностные аналоги дифференциальных операторов



Фиг. 1

записываются таким образом, чтобы учесть только граничные условия для компонент вектора скорости и температуры [11].

При задании температурных граничных условий 2-го рода используется следующее выражение для производной по нормали к координатной линии $x^i = \text{const}$ (по i не суммировать):

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial n} \right|_{x^i = \text{const}} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \left(g^{ii} \frac{\partial\theta}{\partial x^i} + g^{2i} \frac{\partial\theta}{\partial x^2} \right), \quad i=1, 2 \quad (2.1)$$

Как следует из (2.1), производная $\partial\theta/\partial n$ содержит одновременно $\partial\theta/\partial x^1$ и $\partial\theta/\partial x^2$. Значит, в произвольной криволинейной области конвекции реализация температурных граничных условий 2-го рода требует выполнения скалярных прогонок вдоль тех границ, на которых заданы эти условия.

3. Описанный выше алгоритм использовался для расчета двумерной нестационарной естественной конвекции в горизонтальной цилиндрической емкости, сечение которой — часть круга радиуса R , заключенная между двумя равными и параллельными хордами, отстоящими друг от друга на расстоянии L (фиг. 1). Криволинейную систему координат (x^1, x^2) введем следующим образом:

$$x^1 = \frac{1}{L} \left(y_1 - R + \frac{L}{2} \right), \quad x^2 = \frac{y_2 - R}{2\sqrt{R^2 - L^2(x^1 - 0,5)^2}} + \frac{1}{2}$$

При этом область конвекции $ABCD$ в плоскости (y_1, y_2) переходит в квадрат $(0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1)$ в плоскости (x^1, x^2) , границы которого совпадают с координатными линиями $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$.

Рассмотрим случай изотермических боковых стенок (AD — горячая, BC — холодная) и теплоизолированной верхней и нижней поверхностей

$$\theta_{AD}=1, \quad \theta_{BC}=0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{AB} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{DC} = 0 \quad (3.1)$$

Исходные уравнения конвекции с граничными условиями (3.1) обеспечивают центральную симметрию решения в случае, когда вектор ускорения свободного падения параллелен боковым стенкам емкости. При этом

$$\begin{aligned} v_1(x^1, x^2) &= -v_1(1-x^1, 1-x^2), \quad v_2(x^1, x^2) = -v_2(1-x^1, 1-x^2) \\ p(x^1, x^2) &= p(1-x^1, 1-x^2) - (1-x^2)Gr, \quad \theta(x^1, x^2) = 1 - \theta(1-x^1, 1-x^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Однако при реализации разностного алгоритма условия (3.2) не используются, и задача решается во всей области конвекции $ABCD$.

Расчеты выполнены в диапазоне чисел Грасгофа $10^2 \leq Gr \leq 10^6$ при $R=1$ для двух значений ширины емкости: $L=1$ и $1,5$. Полагалось $Pr=0,7$, вектор силы тяжести выбирался параллельным боковым стенкам. Использовалась неравномерная разностная сетка 30×30 со сгущениями вблизи твердых границ.

На фиг. 2 представлено изменение со временем максимального по модулю значения функции тока в емкости (сплошные линии) и среднего числа Нуссельта на боковой стенке (штриховые линии) при $L=1$ и четырех значениях числа $Gr=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ (кривые 1–4 соответственно). Функция тока в сечении $x^1 = \text{const}$ определялась из выражения

$$\psi = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^{11}}} (v_1 g^{11} + v_2 g^{21}) dx^2$$

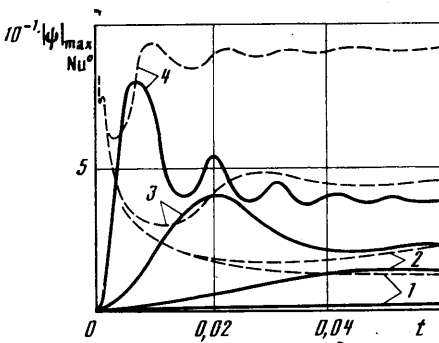
где g_{22} — компонента дважды ковариантного метрического тензора.

При сравнительно небольших числах Грасгофа ($Gr \leq 10^3$) максимальное значение функции тока, характеризующее интенсивность циркуляции жидкости в емкости, монотонно возрастает со временем, стремясь к некоторому пределу (кривая 1). В области конвекции возникает циркуционное течение с направлением вращения по часовой стрелке. Зависимость $Nu^\circ(t)$ также имеет монотонный характер. Заметим, что в начале процесса конвекции значения Nu° велики из-за больших градиентов температуры вблизи изотермических стенок.

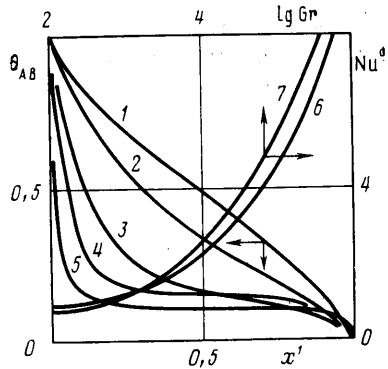
С ростом числа Gr зависимости $|\psi|_{\max}(t)$ и $Nu^\circ(t)$ становятся немонотонными. При $Gr=10^4$ (кривая 2) $|\psi|_{\max}$ достигает максимума, а затем, убывая, стремится к стационарному значению. При $Gr=10^5, 10^6$ (кривые 3, 4) $|\psi|_{\max}$ после достижения максимума стремится к стационарному значению, совершая затухающие колебания. При этих числах Грасгофа такой же колебательный характер имеет и зависимость $Nu^\circ(t)$.

На фиг. 1 показано развитие нестационарного процесса конвекции в емкости при $L=1, Gr=10^6$. Случаи a – e соответствуют трем значениям безразмерного времени $t=0,002; 0,009$ и $0,072$. В левой половине емкости построены линии тока, отвечающие значениям $\psi|\psi|_{\max}^{-1} = -0,2; -0,4; -0,6$ и $-0,8$ (кривые 1–4), причем величина $|\psi|_{\max}$ в случаях a – e равна 26,1; 73,1 и 39,1 соответственно. В правой половине емкости нанесены изотермы с шагом $\Delta\theta=0,1$ в пределах от $\theta=0,1$ до $0,9$ (кривые 1–9).

Как следует из фиг. 1, по мере развития конвективного процесса в основной части емкости вертикальные изотермы переходят в горизонтальное положение, соответствующее условиям стратификации жидкости. На боковых стенках AD и BC образуются градиентные области, включающие динамические и температурные пограничные слои.



Фиг. 2



Фиг. 3

Распределение безразмерной температуры θ вдоль адиабатической границы AB приведено на фиг. 3 для различных значений числа $Gr=10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ и 10^6 (кривые 1–5). Отчетливо прослеживается образование температурной градиентной области вблизи границы $x'=0$ с ростом числа Грасгофа.

На фиг. 3 также приведена зависимость среднего значения числа Нуссельта Nu° на боковых стенках от числа Gr для двух типов емкости: $L=1$ и $1,5$ (кривые 6 и 7).

При малых Gr ($Gr \leq 10^3$) происходящие в емкости процессы определяются в значительной степени теплопроводностью. В установившемся режиме изотермы занимают практически вертикальное положение; меньшему расстоянию L между боковыми стенками соответствует большее значение числа Nu° (кривая 6 располагается выше кривой 7).

При больших Gr происходящие в емкости конвективные процессы полностью преобладают над теплопроводными. Увеличение расстояния L между боковыми стенками способствует вовлечению большей массы жидкости в основное циркуляционное движение и лучшему ее перемешиванию, что приводит к возрастанию Nu° (фиг. 3, при $Gr > 10^3$ кривая 7 располагается выше кривой 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарунин Е. Л. Нестационарная конвекция жидкости в замкнутой полости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 6. С. 83–88.
2. Полежаев В. И., Вальциферов Ю. В. Численное исследование нестационарной тепловой конвекции в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1974. Вып. 3.
3. Iyican L., Bayazitoglu Y., Witte L. C. An analytical study of natural convective heat transfer within a trapezoidal enclosure // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1980. V. 102. № 4. P. 640–647.
4. Lee T. S. Computational and experimental studies of convective fluid motion and heat transfer in inclined non-rectangular enclosures // Int. J. Heat and Fluid Flow. 1984. V. 5. № 1. P. 29–36.
5. Nakamura H., Asako Y. Heat transfer in a parallelogram shaped enclosure // Bull. JSME. 1980. V. 23. № 185. P. 1827–1834.
6. Карякин Ю. Е., Соколовский Ю. А. Нестационарная естественная конвекция в емкости треугольного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 169–173.
7. Карякин В. Е., Карякин Ю. Е. Расчет течений вязкой жидкости в плоских каналах произвольной формы и решетках // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. Т. 17. № 5. С. 91–100.
8. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
9. Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.
10. Карякин В. Е., Карякин Ю. Е. Численное моделирование отрывных течений в каналах произвольной формы и решетках // Физика проточных газоразрядных систем. Минск: ИТМО АН БССР, 1986. С. 131–139.
11. Карякин Ю. Е. Разностный метод исследования нестационарной естественной конвекции в замкнутой прямоугольной емкости // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. Т. 16. № 3. С. 56–67.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.XI.1987