

УДК 532.5.013.4:536.25

КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

ЗИКАНОВ О. Ю., ЯВОРСКАЯ И. М.

Представлены результаты исследования конвективной неустойчивости горизонтального слоя вращающейся жидкости, возникающей вследствие приложенной на границах слоя разности температур и распределенных по различным законам источников тепла. Показано, что рост внутреннего тепловыделения при фиксированных остальных параметрах задачи понижает пределы как монотонной, так и колебательной устойчивости слоя, повышает волновое число и уменьшает частоту нейтральных колебаний. Увеличение концентрации источников к центру слоя усиливает этот эффект. Возникающая на пределе устойчивости при малых значениях числа Прандтля и достаточно быстром вращении колебательная конвекция с ростом интенсивности внутренних источников тепла и их концентрации к центру слоя сменяется сначала монотонной, а затем вообще прекращается.

1. Постановка задачи. Влияние вращения на возникновение конвективной неустойчивости изучалось неоднократно теоретически и экспериментально и представляет интерес как для различных астро- и геофизических проблем, так и для чисто технических приложений (см., например, [1—3]). Конвекция может возникать не только за счет разности температур на границах слоя или задания внешнего потока тепла, но и при выделении тепла внутри слоя. Источниками тепла в жидкости могут быть химические реакции, джоулево тепло, ядерные реакции, поглощение внешнего проникающего излучения, скрытая теплота парообразования и т. д. Конвективная неустойчивость горизонтального невращающегося слоя с равномерным распределением источников тепла рассматривалась в [4—6]. Влияние на конвекцию неоднородного распределения источников тепла вследствие поглощения радиации изучено в [7, 8]. Показано, что рост интенсивности источников тепла ведет к понижению устойчивости слоя и возрастанию критического волнового числа. Кризис равновесия обусловлен монотонными возмущениями и на пределе устойчивости всегда возникает стационарная конвекция.

Эффект вращения на конвективную конвекцию обратен и заключается в повышении предела устойчивости теплопроводного режима с ростом угловой скорости, однако критическое волновое число и здесь возрастает. Кроме того, во вращающейся жидкости в зависимости от числа Прандтля на пределе устойчивости может возникать как стационарная, так и колебательная конвекция [1, 2]. Совместное действие двух факторов — вращения и внутренних источников тепла на конвективную устойчивость горизонтального слоя несжимаемой жидкости — рассматривалось лишь в [9], где изучалось возникновение только стационарной конвекции при равномерном распределении источников тепла.

Ниже изучается эффект одновременного действия двух факторов: вращения и распределенных по различным законам источников тепла, на возникновение стационарной и колебательной конвекции в жидкостях при различных числах Прандтля.

Пусть бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной

оси z . В жидкости распределены источники тепла по трем различным законам

$$(a) \quad q=q_0=\text{const}, \quad (b) \quad q=2q_0\left(1-\frac{2|z|}{h}\right), \quad (c) \quad q=3q_0\left(1-\frac{2|z|}{h}\right)^2 \quad (1.1)$$

Такие зависимости соответствуют равномерному распределению источников тепла в слое a и их концентрации к центру слоя по линейному b и параболическому c законам и обеспечивают равенство суммарного выделяемого в слое тепла во всех трех случаях

$$\int_{-h/2}^{h/2} q(z) dz = q_0 h = Q$$

Здесь h — толщина слоя, Q — количество тепла, выделяемое в единицу времени в слое жидкости высоты h с горизонтальным сечением 1 см^2 .

Система линейных уравнений, описывающих возникновение конвекции в плоском вращающемся слое с внутренними источниками тепла, в безразмерной форме в приближении Буссинеска имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \mathbf{z}_0 - \text{Ta}^{1/2} (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{v})$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T_0 = \Delta T \quad (1.2)$$

$$T_0'' = -2 \text{Nq} f(z)$$

$$\text{Ra} = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu\chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Ta} = \frac{4\Omega^2 h^4}{\nu^2}$$

$$\text{Rq} = \frac{g\beta Q h^4}{2\nu\chi\kappa}, \quad \text{Nq} = \text{Rq}/\text{Ra}$$

Здесь \mathbf{v} — вектор скорости, T и p — возмущения температуры и давления, \mathbf{z}_0 — единичный вектор вдоль оси z , $T_0(z)$ — равновесное распределение температуры; Ra , Pr , Ta и Rq — числа Рэлея, Прандтля, Тэйлора и второе число Рэлея, определяющее мощность внутренних источников тепла; β , ν , χ и κ — коэффициенты объемного расширения, вязкости, теплопроводности и теплопроводности, g — ускорение силы тяжести. В качестве характерных масштабов длины, скорости, времени, температуры и давления выбраны соответственно h , χ/h , h^2/ν , θ и $\nu\chi\rho_0/h^2$; θ — разность температур на границах слоя, ρ_0 — среднее значение плотности в слое, штрих означает дифференцирование по z . Функция $f(z)$ для случаев a , b и c в (1.1) имеет соответственно вид

$$(a) \quad f(z)=1, \quad (b) \quad f(z)=2\left(1-\frac{2|z|}{h}\right), \quad (c) \quad f(z)=3\left(1-\frac{2|z|}{h}\right)^2 \quad (1.3)$$

Границы слоя считаются твердыми и изотермическими, поэтому

$$z = \pm 1/2: \quad \mathbf{v} = T = 0$$

Применяя к уравнениям (1.2) обычную процедуру для исключения давления и горизонтальных компонент скорости и представляя решение в нормальных модах

$$(\mathbf{v}, T) \sim (\mathbf{v}(z), T(z)) \exp[\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]$$

получим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda(u'' - k^2 u) &= u^{IV} - 2k^2 u'' + k^4 u - k^2 \text{Ra} T - \text{Ta}^{1/2} F' \\ \lambda \text{Pr} T &= -u T_0' + T'' - k^2 T, \quad \lambda F = F'' - k^2 F + \text{Ta}^{1/2} u' \\ T_0'' &= -2 \text{Nq} f(z) \\ z = \pm 1/2: \quad u = u' = T = F &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь u и F — вертикальные компоненты скорости и завихренности, $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, k_1 и k_2 — волновые числа, характеризующие периодичность возмущений вдоль горизонтальных осей x и y .

Краевая задача (1.4) определяет спектр нормальных возмущений равновесия вращающейся жидкости в горизонтальном слое с внутренними источниками тепла и заданной разностью температур на границах. Спектр зависит в общем случае от четырех параметров, входящих в уравнения: Pr , Ta , Ra и Rq , а также от квадрата волнового числа k^2 . Критическое число Рэлея Ra_0 , соответствующее возникновению неустойчивости относительно возмущений с длиной волны $2\pi/k$, находится из условия обращения в нуль наибольшего собственного значения λ_1 и является функцией остальных параметров Pr , Ta , Rq и k^2 . Если λ_1 комплексно, т. е. мнимую ось одновременно пересекают два сопряженных собственных значения λ_1 и $\bar{\lambda}_1$, то слой оказывается неустойчивым относительно колебательных возмущений и мнимая часть λ_1 определяет частоту этих колебаний.

Для определения предела устойчивости теплопроводного режима находится минимальное значение Ra_0 как функции k^2

$$\text{Ra}_c(\text{Pr}, \text{Ta}, \text{Rq}) = \min_{k^2} \text{Ra}_0(\text{Pr}, \text{Ta}, \text{Rq}, k^2)$$

Тогда значение k , которое обеспечивает минимум Ra_0 , будет критическим значением волнового числа k_c , а частота нейтральных колебаний определится как

$$\omega = \text{Im} \lambda_1(\text{Pr}, \text{Ta}, \text{Rq}, k_c^2)$$

2. Монотонная неустойчивость. Рассмотрим случай $\text{Im} \lambda_1 = 0$, т. е. будем считать, что на пределе устойчивости возникает стационарная конвекция. Тогда левые части системы (1.4) обращаются в нуль и задача на собственные значения не содержит числа Прандтля. Задача (1.4) решалась методом пристрелки с использованием процедуры ортогонализации [10]. Система (1.4) сводилась к системе восьми уравнений первого порядка, соответствующие задачи Коши рассчитывались методом Рунге — Кутты 4-го порядка точности. Шаг по z варьировался от 0,05 до 0,005 в зависимости от диапазона значений параметров задачи. Полученные результаты по стационарной конвекции согласуются с результатами [1, 4, 9] с точностью порядка 0,1%.

3. Колебательная неустойчивость. При малых числах Прандтля следует предусмотреть возможность появления колебательной неустойчивости. Соответствующая задача на собственные значения решалась методом Галеркина. Искомые функции представлялись в виде рядов ортонормированных функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(z) = \sum_j A_j u_j(z), \quad T(z) = \sum_j B_j T_j(z), \quad F(z) = \sum_j D_j F_j(z) \quad (3.1)$$

В качестве базисных функций выбирались соответственно

$$T_j(z) = F_j(z) = \sqrt{2} \sin j\pi(z + 1/2)$$

и u_j были собственными функциями следующей граничной задачи:

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} = \alpha^4 \varphi, \quad \varphi\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \varphi'\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (3.2)$$

Как показано в [1], решения задачи (3.2) образуют полную ортонормированную систему функций и распадаются на две независимые группы четных и нечетных относительно середины слоя функций с поведением, аналогичным функциям \cos и \sin

$$C_j(z) = \frac{\operatorname{ch} v_j z}{\operatorname{ch}(v_j/2)} - \frac{\cos v_j z}{\cos(v_j/2)}, \quad S_j(z) = \frac{\operatorname{sh} \mu_j z}{\operatorname{sh}(\mu_j/2)} - \frac{\sin \mu_j z}{\sin(\mu_j/2)}$$

v_j и μ_j являются корнями характеристических уравнений

$$\operatorname{th}(v/2) + \operatorname{tg}(v/2) = 0 \quad (3.3)$$

$$\operatorname{cth}(\mu/2) - \operatorname{ctg}(\mu/2) = 0 \quad (3.4)$$

Первые четыре корня уравнений (3.3) и (3.4) приведены ниже:

j	1	2	3	4
v_j	4,730041	10,995608	17,278760	23,561945
μ_j	7,853205	14,137165	20,420352	26,703538

Начиная с $j=3$ с точностью до восьми значащих цифр справедливы асимптотические формулы

$$v_j = -\pi/2 + 2\pi j, \quad \mu_j = \pi/2 + 2\pi j$$

Поскольку при наличии внутренних источников тепла решение не симметрично относительно середины слоя, в каждом последующем приближении добавлялось по две базисные функции, т. е. общее число базисных функций N , удерживаемых в рядах (3.1), всегда было четным. Как обычно, для определения коэффициентов в разложении (3.1) эти ряды подставляются в систему уравнений (1.4). Коэффициенты A_j , B_j и D_j находятся из условия ортогональности невязки к каждой из базисных функций. Таким образом, решение задачи (1.4) сводится к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения (3.1), которая представляется в следующем матричном виде:

$$\lambda LA = MA, \quad A = (A_1 \dots A_N, B_1 \dots B_N, D_1 \dots D_N)^T \quad (3.5)$$

Здесь L и M — квадратные матрицы $3N \times 3N$ с элементами, представляющими собой скалярные произведения базисных функций и их производных.

Для четных N они вычисляются по формулам

$$l_{ij} = \int_{-1/2}^{1/2} X_j'' X_i dz - k^2 \delta_{ij}, \quad i \leq N$$

$$l_{ij} = \operatorname{Pr} \delta_{ij}, \quad N+1 \leq i \leq 2N \quad (j=1 \dots 3N)$$

$$l_{ij} = \delta_{ij}, \quad 2N+1 \leq i \leq 3N$$

$$X_{2j-1} = C_j, \quad X_{2j} = S_j, \quad \alpha_{2j-1} = v_j, \quad \alpha_{2j} = \mu_j$$

$$m_{ij} = (\alpha_j^4 + k^4) \delta_{ij} - 2k^2 \int_{-1/2}^{1/2} X_j'' X_i dz, \quad j \leq N$$

$$m_{ij} = -\sqrt{2} k^2 \operatorname{Ra} \int_{-1/2}^{1/2} X_i \sin(j-N)\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) dz, \quad N+1 \leq j \leq 2N \quad (i \leq N)$$

$$m_{ij} = -\sqrt{2} \operatorname{Ta}^{1/2} (j-2N)\pi \int_{-1/2}^{1/2} X_i \cos(j-N)\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) dz, \quad 2N+1 \leq j \leq 3N$$

$$m_{ij} = -\sqrt{2} \int_{-1/2}^{1/2} T_0' X_j \sin(i-N)\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) dz, \quad j \leq N$$

$$(N+1 \leq i \leq 2N)$$

$$m_{ij} = -[(j-N)^2 \pi^2 + k^2] \delta_{ij}, \quad j > N$$

$$m_{ij} = \sqrt{2} \text{Ta}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} X_j' \sin(i-2N)\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) dz, \quad j \leq N$$

$$(2N+1 \leq i \leq 3N)$$

$$m_{ij} = -[(j-2N)^2 \pi^2 + k^2] \delta_{ij}, \quad j > N$$

Система (3.5) имеет нетривиальные решения, если λ — одно из собственных значений матрицы $L^{-1}M$. Собственные значения λ рассчитывались по стандартной программе, использующей QR-алгоритм со сдвигом [11].

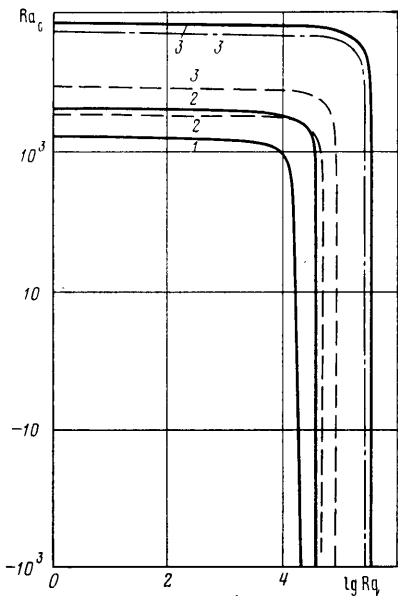
Критические числа Рэлея, соответствующие пределу устойчивости, находились при числах $\text{Ta}=10^4, 10^5$ и 10^6 и числах $\text{Pr}=0,025$ и $0,25$.

Число базисных функций, удерживаемых при расчетах в рядах (3.1), не превышало 16 и выбиралось из условия совпадения последующих приближений с точностью порядка 0,1%. В отличие от случая стационарной конвекции различие между полученным решением и решением [1] при $\text{Pr}=0,025$ и $\text{Rq}=0$ составило примерно 0,5%. Возможно, что это обусловлено тем, что в решении [1] использовалось лишь первое приближение другого варианта метода Галеркина для получения критических значений чисел Рэлея, волновых чисел и частот нейтральных колебаний.

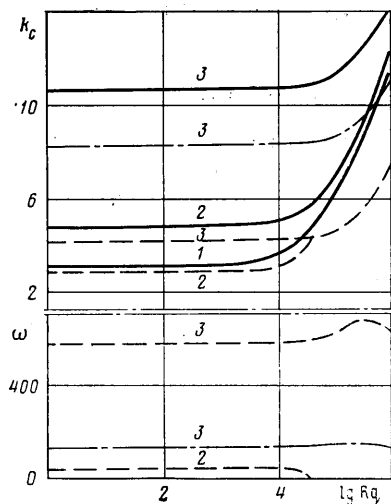
4. Обсуждение результатов и выводы. Расчеты проводились при $\text{Ta} \leq 10^6$, $\text{Pr}=0,025$ и $0,25$ и $\text{Rq} \leq 5 \cdot 10^5$. В случае колебательной неустойчивости расчеты ограничивались значениями Rq , соответствующими обращению в нуль частот нейтральных колебаний. Результаты расчетов критических чисел Ra_c , волновых чисел k_c и частот нейтральных колебаний ω представлены в виде графиков Ra_c , k_c и ω как функций Rq при различных значениях чисел Тэйлора и Прандтля и разных законах выделения тепла в слое. Полученные результаты позволяют оценить совместное влияние на предел устойчивости таких факторов, как вращение и внутреннее тепловыделение, из которых первый стабилизирует теплопроводный режим, а второй вызывает понижение предела устойчивости. Как и следовало ожидать, при больших скоростях вращения и малых числах Прандтля в слое оказывается возможной колебательная неустойчивость, которая при некоторых значениях параметров наиболее опасна.

На фиг. 1 и 2 приведены значения Ra_c , k_c и ω как функций Rq при различных значениях скорости вращения слоя ($1 - \text{Ta}=0$, $2 - \text{Ta}=10^4$, $3 - \text{Ta}=10^6$) для монотонной (сплошные линии) и колебательной ($\text{Pr}=0,025$ — штриховые, $\text{Pr}=0,25$ — штрихпунктирные линии) неустойчивостей при равномерном распределении источников тепла. При фиксированной скорости вращения ($\text{Ta}=\text{const}$), так же как и в покоящемся слое, с ростом интенсивности источников тепла предел устойчивости падает, а волновое число растет.

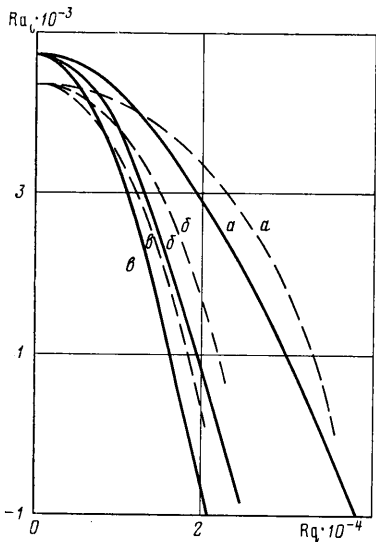
При одной и той же мощности источников тепла и других заданных параметрах наибольшее дестабилизирующее действие оказывают источники с большей концентрацией к центру слоя (случай (σ) в (1.3)). Это следует из фиг. 3, где приведены значения Ra_c как функции Rq при $\text{Ta}=10^4$ для монотонной (сплошные линии) и колебательной ($\text{Pr}=0,025$ — штриховые линии) неустойчивостей при различных распределениях источников тепла (кривые a , b и v соответствуют законам тепловыделения, задаваемым функциями a , b и v в (1.1)). Значения критических волновых чисел и частот нейтральных колебаний для этих случаев даны на фиг. 4; обозначения те же, что и на фиг. 3. Видно, что концентрация ис-



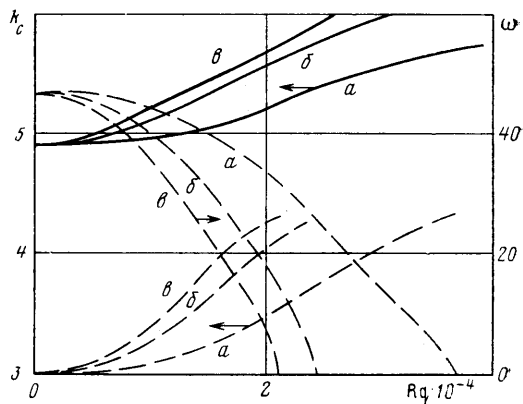
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

точников тепла к центру слоя приводит к росту k_c и, следовательно, к уменьшению горизонтального размера конвективных ячеек, а также уменьшению частоты нейтральных колебаний.

Влияние концентрации источников тепла к центру слоя на дестабилизацию теплопроводного режима и рост k_c связано с тем, что при наличии источников тепла в верхней части исследуемого слоя образуется неустойчивый подслой с градиентом температуры ∇T_+ большим, чем в среднем по слою, а в нижней — устойчивый подслой со стабилизирующим градиентом температуры. Поскольку с увеличением концентрации источников тепла к центру при одной и той же мощности источников Q градиент ∇T_+ растет, а толщина неустойчивого подслоя уменьшается, возникает указанная зависимость Ra_c и k_c от $f(z)$.

Так же как и в отсутствие источников тепла, при достаточно малых значениях чисел Прандтля и достаточно быстром вращении наиболее

опасной может оказаться колебательная неустойчивость (фиг. 1 и 3). Однако с ростом интенсивности источников тепла при фиксированных значениях Ta и Pr колебательная конвекция на пределе устойчивости сменяется монотонной при $Rq > Rq^*(Ta, Pr, f(z))$, а при еще больших интенсивностях вообще оказывается невозможной. Все это является результатом повышения эффективного потока тепла, проходящего через слой. Значения Rq^* тем меньше, чем больше концентрация источников к центру слоя. Граница $Rq^*(Ta)$ между колебательной (область I) и монотонной (область II) неустойчивостями в плоскости (Ta, Rq) при $Pr=0,025$ и равномерном распределении источников тепла приведена на фиг. 5.

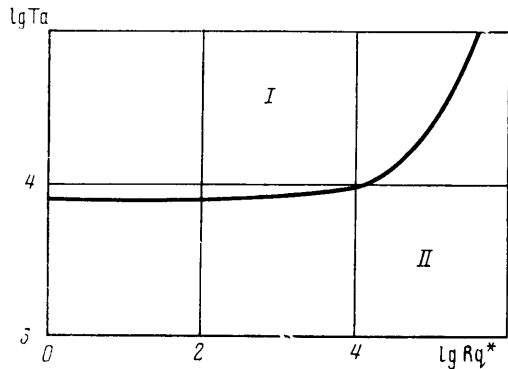
Волновое число при колебательной конвекции меньше, чем при монотонной, растет с увеличением интенсивности источников тепла при фиксированных Ta и Pr и минимально при их равномерном распределении (фиг. 4). Частота колебаний падает с ростом Rq , причем наиболее быстро при максимальной концентрации источников к центру (случай ϵ , фиг. 4).

Обращение в нуль частоты колебаний при некотором $Rq^{**}(Ta, Pr, f(z))$ означает отсутствие колебательных возмущений в слое при $Rq > Rq^{**}$. Как следует из фиг. 4, колебания с меньшим горизонтальным размером имеют обычно меньшую частоту. Однако при $Ta \approx 10^6$ зависимость частоты нейтральных колебаний от интенсивности источников оказывается немонотонной, тогда как волновые числа продолжают монотонно возрастать с Rq .

Увеличение числа Прандтля повышает предел устойчивости слоя относительно колебательных возмущений, приводит к росту волнового числа и уменьшению частоты колебаний при прочих равных условиях (фиг. 1 и 2).

Эффект вращения в слое с источниками тепла качественно такой же, как и в случае чисто внешнего подогрева ($Rq=0$): рост угловой скорости приводит к стабилизации теплопроводного режима, уменьшению длины волны и увеличению частоты нейтральных колебаний для колебательной конвекции (фиг. 1 и 2). Причем стабилизация эффективнее в случае равномерного распределения источников тепла (фиг. 3).

Резюмируем полученные результаты. Рост внутреннего тепловыделения Rq при фиксированной угловой скорости вращения: 1) понижает пределы монотонной и колебательной устойчивости слоя; дестабилизация тем существеннее, чем больше концентрация источников к центру при одинаковой мощности Q и меньше число Pr (при колебательной неустойчивости); 2) повышает волновое число монотонных и колебательных возмущений на пределе устойчивости; чем сильнее концентрация источников к центру слоя, тем больше k_c и круче зависимость k_c от Rq ; 3) вызывает на пределе устойчивости при малых Pr смену колебательной конвекции монотонной при $Rq > Rq^*(Ta, Pr, f(z))$; Rq^* растет с увеличением скорости вращения слоя и уменьшается с увеличением концентрации источников к центру слоя и ростом числа Pr ; 4) уменьшает в большинстве случаев частоту нейтральных колебаний; чем сильнее концентрация источников к центру слоя, тем меньше частота колебаний и круче ее падение с ростом Rq .



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon press, 1961. 652 p.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. *Яворская И. М., Беллев Ю. Н.* Конвективные течения во вращающихся слоях // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 17. С. 3-85.
4. *Sparrow E. M., Goldstein K. J., Jonsson V. K.* Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary condition and non-linear temperature profile // J. Fluid Mech. 1964. V. 16. № 4. P. 513-521.
5. *Watson P. M.* Classical cellular convection with a spatial heat source // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. № 2. P. 399-411.
6. *Ning K. S., Faw R. E., Lester T. W.* Hydrodynamic stability in horizontal fluid layers with uniform volumetric energy sources // Trans. ASME, J. Heat and Mass Transfer. 1978. V. 100. № 4. P. 729-730.
7. *Yücel A., Bayazitoglu Y.* Onset of convection in fluid layers with non-uniform volumetric energy sources // Trans ASME, J. Heat Transf. 1979. V. 101. № 4. P. 666-671.
8. *Riahi N.* Convection in a low Prandtl number fluid with internal heating // Int. J. Non-Linear Mech. 1986. V. 21. № 1. P. 97-105.
9. *Hamada H., Takashima M.* The effect of rotation on convective instability in a horizontal fluid layer with internal heat generation // J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 52. № 12. P. 4145-4151.
10. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171-174.
11. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1987