

## О МЕХАНИЗМЕ ЗАТЕНЕНИЯ ПРИ ВРАЩЕНИИ ПЛОСКОГО РОТОРА

ИВАНОВ С. Г., ЯНШИН А. М.

Рассмотрен эффект затенения от вращения в свободномолекулярном потоке разреженного газа. Для произвольных угловых скоростей вращения ротора найдены потоки частиц, давление и касательные напряжения, действующие на ротор. Получены оценки относительного вклада эффекта затенения в лобовое сопротивление и демпфирующий момент ротора во всем диапазоне его скоростей вращения.

В работе [1] рассмотрен эффект затенения от вращения пластины в свободномолекулярном потоке разреженного газа. При больших значениях угловых скоростей  $\omega$  некоторые выводы [1] приводят к противоречиям, на что обратил внимание автор О. Г. Фридлендер. Так, относительный вклад эффекта затенения в демпфирующий момент пластины (см. [1, фиг. 3]) с ростом  $\omega$  асимптотически стремится к нулю. На самом деле с увеличением  $\omega$  стремится к нулю поток частиц на пластину  $N$ , т. е. роль эффекта затенения при  $\omega \rightarrow \infty$  становится определяющей.

По существу это противоречие следует из того, что в [1] условия (2) и (3), ограничивающие скорости затененных молекул, должны быть сформулированы не для молекулярных ( $s_r(c_r)$ ), а для тепловых скоростей молекул  $s_r^\omega = s_r - \Omega r_1 \sin \theta$ .

В выражении для потока частиц, падающих на единицу поверхности вращающейся пластины (см. [1, (1)]), перейдем от переменной  $s_r = c_r \sqrt{h}$  к новой переменной  $s_r^\omega = (c_r - \omega r_1 \sin \theta) \sqrt{h}$ . Тогда поток частиц можно представить в виде

$$N_{\pm} = \frac{1}{h^2} f_{\pm}(s_r^\omega \pm p)^2 \int_{\mp p}^{\infty} ds_r^\omega \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds_x$$

$$N_+ = N_{1+} + N_{2+} \quad (1)$$

$$N_{1+} = \frac{1}{h^2} f_+(s_r^\omega) (s_r^\omega + p)^2 \int_0^{\infty} dr_s^\omega \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds_x \quad (2)$$

$$N_{2+} = \frac{1}{h^2} f_+(-s_r^\omega) (-s_r^\omega + p)^2 \int_0^p ds_r^\omega \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds_x \quad (3)$$

$$N_- = \frac{1}{h^2} f_-(s_r^\omega - p)^2 \int_p^{\infty} ds_r^\omega \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} ds_x \quad (4)$$

$$f_{\pm}(s_r^\omega) = n(h/\pi)^{3/2} \exp[-(s_x - s_{x\infty})^2 - l_{\pm}^2 - (s_r^\omega - d_{\pm})^2]$$

$$l_{\pm} = s_{r\infty} \cos(\alpha \pm \theta) + \Omega r_1 \cos \theta$$

$$d_{\pm} = s_{r\infty} \sin(\alpha \pm \theta), \quad s_{x\infty} = V_{x\infty} \sqrt{h}$$

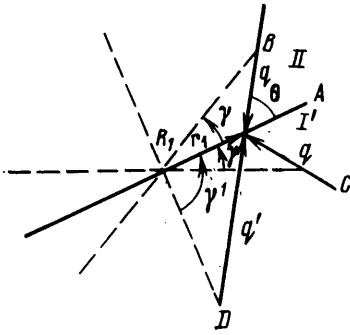
$$s_{r\infty} = V_{r\infty} \sqrt{h}, \quad h = 1/2RT_{\infty}, \quad p = \Omega r_1 \sin \theta$$

где  $V_{x\infty}$  и  $V_{r\infty}$  — составляющие поступательной массовой скорости вдоль и перпендикулярно оси  $x$ . Таким образом, мы условно представим поток частиц  $N_+$ , попадающих на освещенную поверхность пластины, в виде суммы  $N_{1+}$  — потока частиц, движущихся по направлению к пластине, и  $N_{2+}$  — потока частиц, движущихся от пластины, которые элемент поверхности догонит в результате своего движения с линейной скоростью  $\Omega r_1 \sin \theta$ . Напомним, что индексом плюс обозначены стороны пластины, нормаль к которым совпадает с направлением линейной скорости вращения, индексом минус — противоположные стороны. Обозначения  $\theta$  и  $r_1$  см. на фиг. 1.

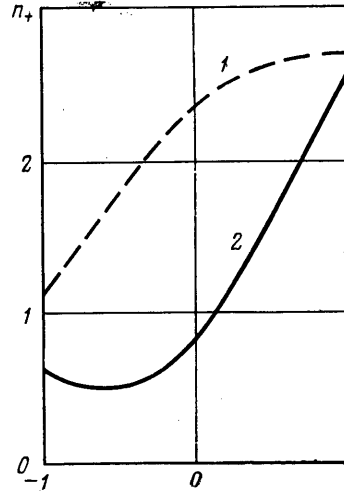
В [1] показано, что вследствие эффекта затенения скорости частиц, достигающих освещенной (плюс) и затененной (минус) поверхности пластины соответственно, ограничены следующими соотношениями:

$$s_r^\omega > \frac{q\Omega}{\pi - \gamma} = C_+ \quad (5)$$

$$s_r^\omega > \frac{q\Omega}{\gamma} = C_- \quad (6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для потока частиц  $N_-$  к условию (6) необходимо добавить неравенство

$$s_{r^{\omega}} > \Omega r_1 \sin \theta \quad (7)$$

обусловленное пределами интегрирования в (4). Совместно условия (6) и (7) можно записать в виде

$$s_{r^{\omega}} > q_- = \max(C_-, \Omega r_1 \sin \theta) \quad (8)$$

Рассмотрим теперь поток частиц  $N_{2+}$ , попадающих на освещенную сторону пластины под углом  $\theta$ . Как следует из (3), скорости этих частиц без учета затенения заключены в интервале

$$0 < s_{r^{\omega}} < \Omega r_1 \sin \theta \quad (9)$$

Пусть пластина поворачивается из положения  $D$  в положение  $A$  на угол  $\pi + \gamma'$ . Это значит, что в положении  $D$  находилась ее нижняя часть. При таком повороте она сметет медленные частицы, скорости которых  $s_{r^{\omega}} < q' \Omega / (\pi + \gamma') = C_{+}'$ . С учетом этого условие (9) примет вид

$$\frac{q' \Omega}{\pi + \gamma'} < s_{r^{\omega}} < \Omega r_1 \sin \theta \quad (10)$$

Пусть теперь пластина поворачивается из положения  $D$  в  $A$  на угол  $\gamma'$  (т. е. в положении  $D$  находилась ее верхняя часть). При таком повороте она отсекает частицы, скорости которых  $s_{r^{\omega}} > q'' \Omega / \gamma'$ . Кроме того, необходимо учесть, что пластина может догнать частицы в ее промежуточных положениях между  $D$  и  $A$ . Следовательно, мы получим следующее неравенство для падающих частиц:

$$s_{r^{\omega}} < \min_{0 < \gamma'' < \gamma'} C_{+}'' \quad (11)$$

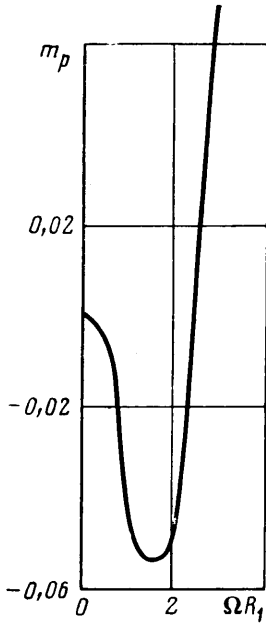
$$C_{+}'' = \frac{q'' \Omega}{\gamma''}, \quad \lim_{\gamma'' \rightarrow \gamma'} C_{+}'' = \frac{q' \Omega}{\gamma'}$$

Совместно неравенства (10) и (11) имеют вид

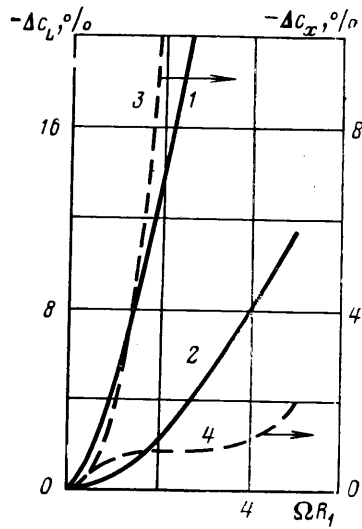
$$\frac{q' \Omega}{\pi + \gamma'} < s_{r^{\omega}} < \min \left( \min_{0 < \gamma'' < \gamma'} \frac{q'' \Omega}{\gamma''}, p \right) \quad (12)$$

Для конечной по оси  $x$  пластины на потоки частиц накладываются дополнительные условия (см. [1, (4), (5)]).

Таким образом, для определения потока частиц на единицу поверхности кувряющейся пластины необходимо из общего числа частиц (1) вычесть частицы, неудовлетворяющие указанным выше условиям (5), (8), (12), а также условиям (4) и (5) работы [1].



Фиг. 3



Фиг. 4

Тогда выражения для потоков частиц примут вид

$$N_{+z} = N_{+} - \frac{1}{h^2} f_{+}(s_r^{\omega}) (s_r^{\omega} + p)^2 \int_0^{c_{+}} ds_r^{\omega} \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-b_{+}}^{a_{+}} ds_x -$$

$$- \frac{1}{h^2} f_{+}(-s_r^{\omega}) (-s_r^{\omega} + p)^2 \left( \int_0^p ds_r^{\omega} - \int_{c_{+}'}^{q_{+}} ds_r^{\omega} \right) \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-b_{-}}^{a_{+}} ds_x \quad (13)$$

$$N_{-z} = N_{-} - \frac{1}{h^2} f_{-}(s_r^{\omega}) (s_r^{\omega} - p)^2 \int_p^{q_{-}} ds_r^{\omega} \sin \theta \int_0^{\pi} d\theta \int_{-b_{-}}^{a_{+}} ds_x \quad (14)$$

$$a_{+} = \frac{\Omega(x_0 - x)}{\pi - \gamma}, \quad a_{-} = \frac{\Omega(x_0 - x)}{\gamma}, \quad b_{+} = \frac{\Omega(x_0 + x)}{\pi - \gamma}, \quad b_{-} = \frac{\Omega(x_0 + x)}{\gamma}$$

Если пластина вращается относительно кромки, необходимо в  $a_{+}$ ,  $b_{+}$  и  $C_{+}$  заменить  $\pi - \gamma$  на  $2\pi - \gamma$ , а в  $C_{+}'$  заменить  $\pi + \gamma'$  на  $2\pi + \gamma'$ .

Давление и касательные напряжения, действующие на вращающуюся пластину, находятся аналогично (13), (14).

На фиг. 2 приведен график функции  $n_{+} = N_{+z} / (n/2\sqrt{\pi h})$  для конечной по оси  $x$  пластины при  $r_1 = 0,6$ ;  $\Omega r_1 = 3$ . Скорость набегающего потока  $V_{\infty}$  направлена вдоль оси вращения  $x$ . Кривая 1 соответствует случаю  $s_{x\infty} = 3$ , кривая 2 -  $s_{x\infty} = 1$ . В покое газе эффект затенения приводит к тому, что поток падающих частиц будет максимальным у кромок и минимальным в центре пластины. Наличие массовой скорости вдоль оси вращения сдвигает точку минимума от центра пластины к ее затененной кромке. Если пластина вращается относительно кромки, то эта неравномерность потока приводит к прецессионному моменту сил, стремящемуся развернуть пластину так, чтобы  $\omega$  было перпендикулярно  $V_{\infty}$ .

На фиг. 3 изображен прецессионный момент  $m_p = M_p / (\rho/2\sqrt{\pi h})$  при  $s_{x\infty} = 2$ . Отметим его особенность, которая свойственна и другим нестационарным аэродинамическим характеристикам. Прецессионный момент при увеличении  $\Omega R_1$  меняет знак. Это объясняется тем, что эффект затенения проявляется в большей мере на затененной стороне ( $\Omega \times r \cdot n < 0$ ) пластины. При малых  $\Omega R_1$  вклад освещенной и затененной сторон пластины в нестационарные аэродинамические характеристики - одного порядка и, следовательно, большее проявление эффекта затенения на за-

тененной стороне пластины приводит к тому, что  $m_p < 0$ . В дальнейшем при увеличении  $\Omega R_1$  увеличивается относительный вклад в нестационарные аэродинамические характеристики освещенной и уменьшается вклад затененной стороны пластины, а  $m_p$  растет и становится больше нуля. При вращении пластины относительно ее середины этот момент будет равен нулю, так как действие нижней части пластины будет компенсировать действие верхней.

На фиг. 4 изображен относительный вклад эффекта затенения в лобовое сопротивление пластины. Сплошные кривые 1, 2 соответствуют  $s_{r\infty} = 2,6$ . Кривые 3 ( $s_{x\infty} = 2$ ) и 4 ( $s_{x\infty} = 6$ ) соответствуют случаю, когда скорость набегающего потока  $v_{\infty x}$  направлена вдоль оси вращения  $x$ . Фигура 4 отражает поведение  $\Delta c_L$  и  $\Delta c_x$  при малых значениях  $\Omega R_1$ . При больших  $\Omega R_1$  лобовое сопротивление пластины стремится к конечному значению и, следовательно,  $\Delta c_L$  и  $\Delta c_x$  ограничены. Что касается демпфирующего момента, то эффект затенения на малых частотах вращения ротора приводит к его увеличению, а для больших  $\Omega R_1$  — тормозит его неограниченный рост.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов С. Г., Яншин А. М. Эффекты затенения и интерференции от вращения пластины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 140–148.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
24.VI.1987