

УДК 532.526

**УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНОЙ  
ТУРБУЛЕНТНОЙ СВОБОДНОЙ СТРУИ**

КОЗЛОВ В. Е.

Расчет трехмерных струйных течений имеет важное практическое значение. Одним из частных случаев является расчетное истечение газа.

В [1] было предложено рассматривать трехмерную свободную струю в рамках системы усеченных уравнений Навье – Стокса без учета продольного градиента статистического давления, что позволяет построить маршевый метод расчета по продольной координате. Несмотря на значительное упрощение, поперечные компоненты скорости определяются при таком подходе с помощью решения все еще достаточно сложного эллиптического уравнения в плоскости поперечного сечения струи [2, 3], что приводит к большим временам счета. Видимо, по этой причине в литературе отсутствуют примеры расчетов реальных струй длиной порядка десятков высот сопла. В настоящей работе предлагается ещё более упрощенный подход, впервые позволивший рассчитать за приемлемое время процесс перестройки трехмерной струи в осесимметричную.

1. Рассматриваются течения, обладающие двумя плоскостями симметрии  $xy$ ,  $xz$  (см. схему течения на фиг. 1). Система усеченных трехмерных уравнений Навье – Стокса имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial h_0}{\partial x} + v \frac{\partial h_0}{\partial y} + w \frac{\partial h_0}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho \epsilon}{\text{Pr}} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho \epsilon}{\text{Pr}} \frac{\partial h_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho \epsilon \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \epsilon \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

$$h_0 = \frac{u^2}{2} + \frac{kP}{(k-1)\rho} \quad (1.4)$$

Здесь  $\text{Pr}=0,7$  – эффективное число Прандтля,  $k$  – отношение теплоемкостей,  $h_0$  – энтальпия торможения. Для рассматриваемых свободных расчетных струй с малыми начальными скоростями потока ( $v(0, y, z) \ll u(0, 0, 0)$ ;  $w(0, y, z) \ll u(0, 0, 0)$ ) предполагаем, что  $P = \text{const}$ , хотя в принципе общая идея метода пригодна и для струйных течений с  $P = P(x)$ .

Двухпараметрическая модель турбулентности [4] для коэффициента турбулентной вязкости  $\epsilon$  и энергии турбулентности  $e$  была распространена на случай трехмерной струи следующим образом (см., например, [5]):

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( 2,4 \rho \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( 2,4 \rho \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + 0,9 \frac{\epsilon^2}{e} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - 0,14 \epsilon \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} - 0,5 \frac{\rho \epsilon^2}{kP} \quad (1.5)$$

$$u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( 1,2\rho e \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( 1,2\rho e \frac{\partial e}{\partial z} \right) + \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - 0,07 \frac{e^2}{\varepsilon} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{e} \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \right] \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.1) – (1.6) замыкается при помощи гипотезы о направленности вектора вторичного течения  $\mathbf{V} = jv + kw$ . По аналогии с плоским слоем смешения предполагаем, что вектор вторичного течения перпендикулярен к изотакхе  $u = \text{const}$  в плоскости поперечного сечения струи  $x = \text{const}$ . В начальном сечении изотакхи должны обладать непрерывными касательными, поэтому угловые точки прямоугольного сопла предварительно округлялись. При малых толщинах пограничных слоев сформулированное допущение выполняется в слое смешения вблизи от среза сопла (за исключением окрестности угловых точек сопла). Вдали от сопла, где форма струи близка к осесимметричной, это предположение также выполняется. Так как используемое допущение в указанных предельных случаях в основном выполняется, то можно надеяться и на применимость его в переходной области течения. Гипотеза о направленности вектора вторичного течения может быть записана с помощью следующего соотношения для плоскости  $x = \text{const}$ :

$$[\mathbf{V} \times \text{grad}(u)] = 0 \quad (1.7)$$

Вектор  $\mathbf{V}$  образует с осью  $z$  угол  $\varphi$ . Удобство введения угла  $\varphi$  состоит в том, что эта величина определяется только продольной компонентой скорости  $u$  в плоскости  $x = \text{const}$ . Зная угол  $\varphi$ , выразим две поперечные компоненты скорости  $(v, w)$  через одну неизвестную безразмерную функцию  $S$

$$v = Su \sin \varphi; \quad w = Su \cos \varphi \quad (1.8)$$

Иначе говоря, вместо неизвестных функций  $(v, w)$  теперь вычисляется одна только функция  $S$ . Эта функция определяется в результате решения модифицированного уравнения неразрывности в плоскости поперечного сечения струи. Модификация осуществляется по аналогии с двумерным случаем. Для этого производные  $(\partial u / \partial x)$  и  $(\partial \rho / \partial x)$ , входящие в (1.3), выражаются с помощью (1.1), (1.2) и (1.4) через производные от различных функций по поперечным направлениям. Результат с учетом (1.8) можно представить в виде уравнения

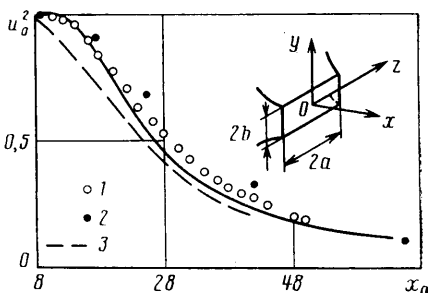
$$\frac{\partial}{\partial y} (S \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (S \cos \varphi) = I \quad (1.9)$$

$$I = \frac{k-1}{kPr} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho e}{Pr} \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho e}{Pr} \frac{\partial h_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho e \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho e \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right] \right\} - \left( \frac{1}{\rho u^2} + \frac{k-1}{kP} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho e \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho e \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

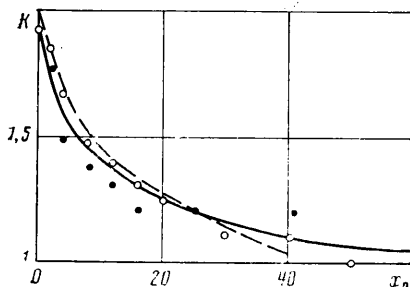
Соотношение (1.9) является линейным (относительно  $S$ ) дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Характеристики этого уравнения однозначно определяются соотношением (1.7), за исключением оси струи. В качестве граничных условий для уравнения (1.9) достаточно задать, что на оси струи  $S=0$ .

Таким образом, в каждом сечении струи  $x = \text{const}$  поперечные компоненты скорости  $v$  и  $w$  определяются с помощью решения относительно простого уравнения первого порядка, в то время как в более точных методах [2, 3] требуется решать сложное эллиптическое уравнение второго порядка. Ещё одним упрощающим моментом является то, что в данном методе, как и в осесимметричном случае, не надо задавать начальных значений для поперечных компонент скорости, так как они определяются по начальным значениям других параметров.

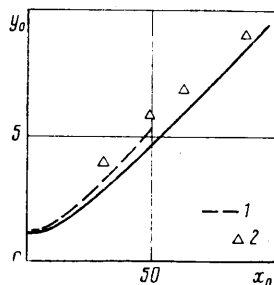
Продольная компонента скорости, энтальпия торможения и характеристики турбулентности описываются уравнениями параболического типа. Для этих параметров задаются начальные данные и ставятся граничные условия. На горизонтальной ( $y=0$ ) и на вертикальной ( $z=0$ ) осях это условия симметрии ( $\partial/\partial y=0$  и  $\partial/\partial z=0$  соответственно), а на границах, удаленных от оси струи, это условия выхода на значения параметров спутного потока.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для решения трехмерных уравнений параболического типа использовалась разностная схема расщепления по поперечным направлениям [6]. На каждом этапе расщепления применялась неявная гибридная схема (см., например, [7]), отличие которой от известной монотонной схемы [8] состояло в аппроксимации частных производных первого порядка по поперечным направлениям явным образом центральными разностями, если сеточное число Рейнольдса  $Re_c < 2$ . После этого для продольной компоненты скорости и энтальпии торможения осуществлялся ещё один этап вычислений, на котором применялась явная схема к уравнениям для  $u$  и  $h_0$ , записанным в дивергентном виде. Такой прием известен под названием предиктор — корректор (см., например, [9]). Для вычисления функции  $S$  использовался метод характеристик.

2. В качестве примера расчета рассмотрим истечение струи из прямоугольного сопла. В настоящей методике используется предположение об изобаричности течения, поэтому наиболее обоснованным представляется применение этой методики к расчетному режиму истечения струи с малыми начальными скачками потока. Для реализации малых начальных скачков потока в экспериментах с низкоскоростными струями обычно используются дополнительные насадки к соплу. В настоящей работе для сопоставления с расчетными данными привлекались (за единственным исключением) экспериментальные данные, полученные на соплах с дополнительным цилиндрическим насадком прямоугольного сечения.

Начальные данные для затопленных низкоскоростных струй задавались в соответствии с условиями эксперимента [10]. Распределение параметров внутри пограничного слоя на внутренней стенке сопла моделировалось так же, как и в работе [11].

На фиг. 1 представлено сравнение расчетных (сплошная линия) и экспериментальных данных для распределения вдоль оси ( $x_0 = x/b$ ) квадрата продольной компоненты скорости  $u_0^2 = u_n^2/U^2$  при истечении струи из сопла с соотношением сторон 2 : 1. Цифры 1, 2 и 3 на фиг. 1 относятся к экспериментальным данным [10, 12, 13] соответственно. Расчетная кривая не выходит за разброс экспериментальных данных. Аналогичный результат имел место и в случае истечения струи из сопла с соотношением сторон 3 : 1.

Динамика перестройки формы поперечного сечения прямоугольной струи прослеживается по изменению вдоль оси величины отношения  $K$  размеров струи по поперечным направлениям ( $K = r_z/r_y$ ;  $u(x, r_y, 0) = u(x, 0, r_z) = 0,05u(x, 0, 0)$ ). Расчетная зависимость в случае истечения струи из сопла с соотношением сторон 2 : 1 представлена на фиг. 2 сплошной линией. Экспериментальные данные обозначены так же, как и на фиг. 1. Видно, что параметр  $K$  монотонно стремится к единице с удалением от среза сопла. Соответствие экспериментальных и расчетных данных хорошее.

Расширение струи в вертикальном направлении можно оценить по изменению вдоль оси струи величины  $y_0 = y_e/b$ , где  $y_e$  определяется с помощью следующего соотношения:  $u(x, y_e, 0) = 0,5u(x, 0, 0)$ .

Расчетная зависимость в случае истечения струи из сопла с соотношением сторон 3 : 1 представлена на фиг. 3 сплошной линией. Цифры 1 и 2 относятся к экспериментальным данным [12, 14] соответственно. Видно, что величина  $y_0$  монотонно увеличивается по мере удаления от среза сопла. Соответствие экспериментальных и расчетных данных удовлетворительное.

Заметим, что в работе [14] не использовался дополнительный насадок к соплу, имевшему четырехкратное поджатие, и на больших удалениях от сопла были получены значения  $K$ , меньшие единицы, в то время как вблизи сопла  $K > 1$  (так называемый эффект переориентации осей струи, см. также [15]). Этот эффект обсуждался в [16] и обусловлен, по-видимому, неизобаричностью и скачками потока в начальном сечении струи. В рассмотренных примерах расчета переориентации осей струи не происходило.

Кроме приведенных примеров рассчитывались струи из прямоугольных сопел с соотношением сторон 1 : 1 и 5 : 1, струя из эллиптического сопла с эксцентриситетом  $d = 2$ , а также рассчитывалось слияние двух нагретых сверхзвуковых затопленных осесимметричных струй радиусом  $R$ , удаленных друг от друга на расстояние  $0,3R \leq$

$\leq l \leq 6R$ . Экспериментальные данные, относящиеся к расчетному режиму истечения с малыми начальными скосами потока, имелись только для струй из прямоугольных сопел (см. [10, 15]). Эти экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с результатами расчетов.

Расчет по предлагаемой упрощенной методике осуществляется в 7 раз быстрее, чем в [3], и при этом используется сетка с втрое большим количеством узлов ( $36 \times 36$ ).

Автор благодарит А. Н. Секундова за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1972. V. 15. № 10. P. 1787–1806.
2. Васильев В. И., Крашенинников С. Ю. К расчету трехмерного слаборасширяющегося течения в струе и канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 36–44.
3. Ганель Б., Шольц Р. Расчет трехмерных стационарных течений конечно-разностным методом // Успехи механики. 1986. Т. 9. № 1. С. 36–63.
4. Козлов В. Е., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 38–44.
5. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. М.: Машиностроение, 1975. 94 с.
6. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы: Введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.
7. Claus R. W. Numerical calculation of subsonic jets in cross flow with reduced numerical diffusion // AIAA paper. 1985. № 1441.
8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
9. Численное решение многомерных задач газовой динамики // Под ред. Годунова С. К. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. Палагник И. Б., Темирбаев Д. Ж. О распространении свободных турбулентных струй, вытекающих из насадка прямоугольной формы // Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Вып. 1. Прикладная теплофизика. Алма-Ата, 1964. С. 18–28.
11. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 30–40.
12. Туркус В. А. Структура воздушного приточного факела, выходящего из прямоугольного отверстия // Отопление и вентиляция. 1933. № 5. С. 11–19.
13. Двойнишников В. А., Ларюшкин М. А. Влияние начальной формы струи на развитие ее в затопленном пространстве // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1980. № 5. С. 157–160.
14. Крашенинников С. Ю., Рогольская Е. Г. Распространение струй из прямоугольных сопел, свободных и вблизи экрана // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 4. С. 39–48.
15. Tsuchiga Yoshiaki, Haneda Yoshiaki, Horikoshi Choji, Sato Takashi. Study on the spread of the rectangular jets. 2nd report. Effect of exit shape on the mean velocity fields. // Trans. Jap. soc. mech. Eng. Ser. B. 1985. V. 51. № 461. P. 85–93.
16. Абрамович Г. Н. О деформации поперечного сечения прямоугольной турбулентной струи // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 54–63.

Москва

Поступила в редакцию  
20.VII.1987

УДК 532.526.2

### О ВЛИЯНИИ НЕСИММЕТРИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ОКОЛО КОНУСА ПОД УГЛОМ АТАКИ

КОРНИЕНКО Е. С., ШУЧИНОВ В. М.

При обтекании под углом атаки вращающегося вокруг оси конуса на каждую точку его поверхности действует изменяющийся во времени тепловой поток. При достаточно большой угловой скорости вращения и медленном изменении усредненных (за один оборот) параметров набегающего потока и параметров газа на поверхности конуса указанный тепловой поток можно считать периодическим. Под его воздействием энтальпия поверхности материала  $h_w$  и величина расхода  $\rho_w v_w$  выдуваемого из материала газа (при наличии сублимации материала) также изме-