

УДК 533.722

СИЛЬНАЯ ДОЗВУКОВАЯ КОНДЕНСАЦИЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

АБРАМОВ А. А., КОГАН М. Н.

Задача о конденсации газа на плоской поверхности сводится к исследованию течения в слое Кнудсена в рамках кинетической теории. Этому вопросу посвящена обширная литература [1–10]. В отличие от испарения конденсация определяется большим числом параметров и поэтому построение полной картины явления – сложная проблема. Некоторые случаи изучались как с помощью модельных кинетических уравнений, так и путем решения уравнения Больцмана различными моментными методами

Для решения полного уравнения ольцмана без присущих моментным методам априорных предположений о виде функций распределения, по-видимому, наиболее развитым представляется метод прямого статистического моделирования. В настоящей работе этим методом получены решения уравнения Больцмана для сильной дозвуковой конденсации в достаточно широком диапазоне параметров. На основе полученных точных решений оценена точность и область применимости моментных методов.

1. В [1] показано, что при сильных испарении и конденсации, т. е. когда нормальная к поверхности раздела фаз составляющая среднемассовой скорости порядка тепловой скорости $c_T = (2kT/m)^{1/2}$, внешним по отношению к слою Кнудсена является невязкое течение, описываемое уравнениями Эйлера. Условия на внешней границе слоя Кнудсена являются условиями на стенке для уравнений газодинамики. Исследование течения в слое Кнудсена позволяет связать эти условия с параметрами, определяющими состояние и свойства конденсированной фазы. Для нахождения этой связи необходимо решить уравнение Больцмана (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3)

$$\xi_x \frac{df}{dx} = J(f, f) \quad (1.1)$$

$$f(x=0, \xi_x > 0) = n_w (h_w/\pi)^{1/2} \exp\{-h_w \xi_x^2\} \quad (1.2)$$

$$f(x \rightarrow \infty) = n_\infty (h_\infty/\pi)^{1/2} \exp\{-h_\infty (\xi_x - u_\infty)^2\} \quad (1.3)$$

$$h_i = m/2kT_i, \quad i = w, \infty; \quad n_w = a_w n_{ev} + n_r$$

Здесь f – функция распределения молекул по скоростям, ξ – скорость молекулы, u_∞ – среднемассовая скорость газа, m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T_w – температура поверхности, n_{ev} – плотность насыщенного пара материала поверхности при температуре T_w , n_r – плотность отраженных молекул, a_w – вероятность прилипания молекулы на поверхности, $J(f, f)$ – интеграл столкновений молекул [2]. Ось x направлена по нормали к поверхности в сторону газа, ось y – вдоль поверхности по направлению касательной составляющей скорости.

В прямой постановке параметры поверхности n_{ev} , a_w , T_w считаются заданными. В граничное условие на внешней границе слоя Кнудсена (1.3) входят четыре параметра: n_∞ , T_∞ , $u_{\infty x}$, $u_{\infty y}$. Газ может натекать на стенку как с дозвуковой скоростью ($M_{\infty x} < 1$), так и со сверхзвуковой [1, 3]. Анализ эволюционности течения [4–5] показывает, что при $M_{\infty x} < 1$ на бесконечности необходимо задать $u_{\infty y}$ и любые две из трех оставшихся величин n_∞ , T_∞ и $u_{\infty x}$, а при $M_{\infty x} > 1$ – все эти величины. В случае дозвуковой

конденсации цель исследования состоит в установлении функциональной связи $Q(n_\infty, T_\infty, u_{\infty x}, u_{\infty y})=0$, а в области сверхзвуковой конденсации — в определении области параметров, для которых решение уравнения Больдмана существует. При этом предполагается, что n_{ev} и a_w являются известными функциями T_w .

2. Рассмотрим задачу о дозвуковой конденсации. Для решения задачи методом прямого статистического моделирования применяется процедура установления с некоторым достаточно малым шагом по времени Δt . В [6] показано, что для случая сильного испарения эффективно решение обратной задачи. При этом подходе предполагалось, что все параметры на бесконечности заданы и на каждом шаге по времени из законов сохранения находились параметры стенки n_{ev} и T_w . Задание условий на внешней границе слоя Кнудсена препятствует приходу возмущений из внешней области. Решение локализуется в слое Кнудсена толщиной порядка длины пробега молекулы, так что время установления решения оказывается порядка времени между столкновениями $t_c \sim l/c_T$.

В случае сильной конденсации такой подход приводит к раскату процесса установления, что, по-видимому, объясняется двумя факторами. С одной стороны, при умеренно сильной конденсации [10] с $M_{\infty x} \ll 1$ над слоем Кнудсена имеется вязкий слой толщиной $\delta \sim l/M_{\infty x} \gg l$, поэтому время установления $t_\delta \sim \delta/u_{\infty x} \sim t_c/M_{\infty x}^2 \gg t_c$, так что при уменьшении $M_{\infty x}$ время установления растет. С другой стороны, при $M_{\infty x} \rightarrow 1$ поток молекул к стенке J_w^- становится много больше потока от стенки J_w^+ , так что флуктуации J_w^- становятся соизмеримыми или даже больше J_w^+ .

В промежуточной области чисел $M_{\infty x}$ в той или иной мере сказываются оба фактора и определение n_{ev} из уравнения сохранения на каждом шаге по времени Δt не приводит к сходимости процесса. В связи с этим была применена следующая процедура двойной итерации.

Пусть на k -й итерации известны величины $n_\infty, T_\infty, u_{\infty x}, u_{\infty y}, T_w$ и $n_{ev}^{(v)}$. Тогда установлением по времени решается задача (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) только для влетающих в рассматриваемую область молекул при $x=0, L$. Расстояние между границами расчетной области L подбиралось таким образом, что дальнейшее увеличение его не приводило к изменению решения. Величина $n_{ev}^{(k)}$ на $(k+1)$ -й итерации находится из закона сохранения массы

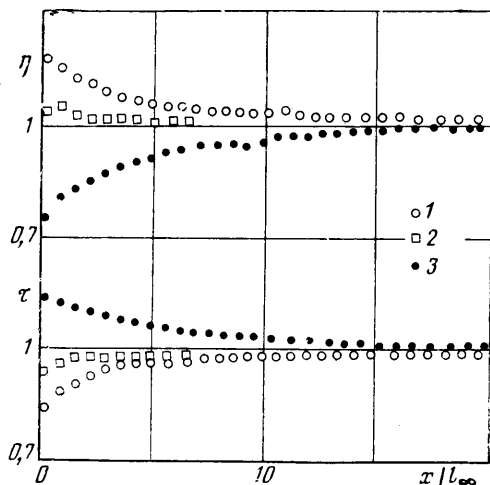
$$\frac{a_w n_{ev}^{(k+1)} c_{T_w}}{2 \sqrt{\pi}} = a_w J_w^{(k)-} + n_\infty u_{\infty x} \quad (2.1)$$

Можно ожидать, что этот процесс сходящийся, поскольку из (2.1) следует

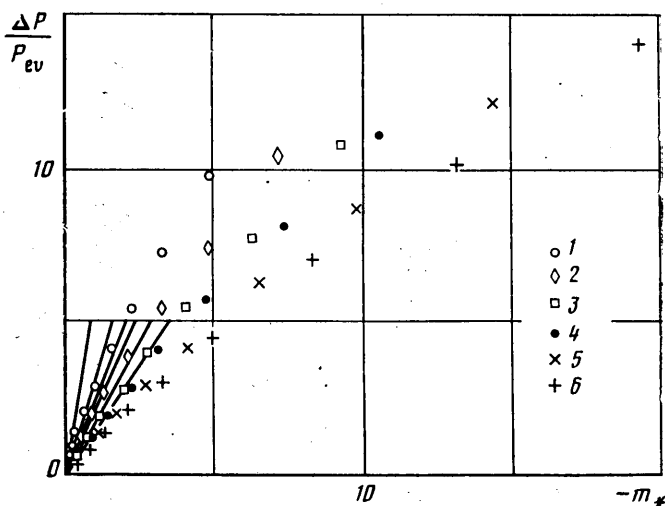
$$n_{ev}^{(k+1)} - n_{ev}^{(\infty)} = (J_w^{(k)-} - J_w^{(\infty)-}) 2 \sqrt{\pi} c_{T_w}^{-1}$$

Здесь индексом ∞ обозначено точное решение задачи ($k \rightarrow \infty$). Тогда если $n_{ev}^{(k)} > n_{ev}^{(\infty)}$, то $J_w^{(k)-} < J_w^{(\infty)-}$ — и в результате итерации произойдет уменьшение $n_{ev}^{(k+1)}$ по сравнению с $n_{ev}^{(k)}$ ($n_{ev}^{(k+1)} < n_{ev}^{(\infty)} < n_{ev}^{(k)}$) и наоборот. Таким образом, система реагирует так, чтобы погасить образовавшееся возмущение.

3. Для решения задачи пространство между плоскостями $x=0$ и $x=L$ разбивалось на ячейки с размером, меньшим длины свободного пробега молекул, внутри которых параметры газа n, u_x, u_y, T считались постоянными. В ячейки помещались моделирующие течение молекулы. Эволюция системы частиц на временном интервале Δt , меньшем среднего времени между столкновениями молекул, расщепляется на два этапа: 1) свободный перелет молекул за время Δt , 2) столкновение неподвижных молекул, принадлежащих данной ячейке, — этап релаксации. Для



Фиг. 1



Фиг. 2

осуществления последнего этапа применяется алгоритм работы [11]. Макропараметры в ячейках вычислялись путем усреднения по времени вдоль траекторий молекул соответствующих микроскопических величин [12].

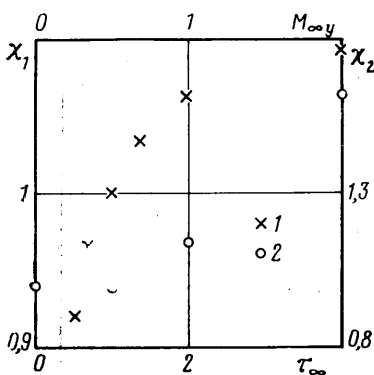
Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов, которые там, где это не оговаривается в тексте, приведены для модели молекул «псевдомаксвелловские сферы» с сечением взаимодействия $\sigma = \sigma_0/g$, где $\sigma_0 = \text{const}$, g — относительная скорость сталкивающихся молекул.

Фигура 1 иллюстрирует результаты расчетов распределения безразмерных величин плотности $\eta = n/n_\infty$ и температуры $\tau = T/T_\infty$ в кнудсеновском слое. Ось x нормирована на среднюю длину свободного пробега молекул на внешней границе слоя Кнудсена $l_\infty = (\sqrt{2}n_\infty\sigma_0)^{-1}c_{T_\infty}$. Точкам соответствуют параметры: 1 — $M_{\infty x} = 0,5$, $\tau_\infty = T_\infty/T_w = 2,0$, $P_\infty/P_{ev} = 3,0$; 2 — $M_{\infty x} = 0,8$, $\tau_\infty = 2,0$, $P_\infty/P_{ev} = 6,63$; 3 — $M_{\infty x} = 0,5$, $\tau_\infty = 0,667$, $P_\infty/P_{ev} = 3,07$. Отношение P_∞/P_{ev} определялось в результате решения задачи при заданных $M_{\infty x}$, τ_∞ .

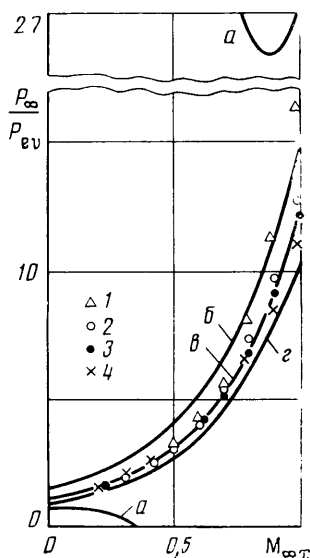
Из приведенных данных видно, что газ в кнудсеновском слое может как тормозиться, так и ускоряться. Аналогичные выводы получены в [9], где решалась задача о перекоонденсации в предположении, что на внеш-

ней границе кнудсеновского слоя газ находится в состоянии насыщения при температуре T_∞ . Следует отметить, что наложение связи на P_∞ и T_∞ сужает задачу.

Как отмечалось выше, между макропараметрами на внешней границе слоя Кнудсена существует одно функциональное соотношение, которое определяет поверхность в пространстве этих переменных. Рассмотрим некоторые сечения этой поверхности. На фиг. 2 представлены результаты расчета величины $\Delta P/P_{ev}$, где $\Delta P = P_\infty - P_{ev}$, как функции безразмерного расхода $m_* = nu_x/n_{ev}c_{T_w}$ при различных значениях τ_∞ и $u_{\infty y} = 0$ ($1 - \tau_\infty = 4,0, 2 - 2,0, 3 - 1,333, 4 - 1,0, 5 - 0,667, 6 - 0,5$). Верхние точки соответствуют числу $M_{\infty x} = 0,99$. Прямые линии, выходящие из начала коор-



Фиг. 3



Фиг. 4

динат, — решение поставленной задачи в линейном приближении [10] по величине m_* . Состояния газа на бесконечности, соответствующие малым значениям τ_∞ , относятся к пересыщенному пару, однако здесь не рассматривается возможная конденсация в объеме.

Влияние потенциала взаимодействия молекул на характеристики течения на внешней границе слоя Кнудсена проявляется только в режиме околосвуковой конденсации. Это связано, по-видимому, с влиянием вязкости в трансзвуковом режиме течения, отмеченным в случае пере конденсации газа между плоскопараллельными пластинами в [13]. На фиг. 3 приведено отношение $\chi_1 = P_{\infty M}/P_{\infty T}$ (точки 1), где $P_{\infty M, T}$ — давление газа на бесконечности соответственно для псевдомаксвелловских и твердых сфер, при $M_{\infty x} = 0,99$ в зависимости от величины τ_∞ ($u_{\infty y} = 0$).

На фиг. 3 точками 2 показано влияние продольной составляющей среднemasовой скорости на величину $\chi_2 = P_\infty(M_{\infty y})/P_\infty(M_{\infty y} = 0)$ при $M_{\infty x} = 0,99$, $\tau_\infty = 4,0$, где $M_{\infty y} = u_{\infty y}/a_\infty$, a_∞ — скорость звука на бесконечности.

Представляет интерес сравнение результатов, полученных различными методами, с решением уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования.

На фиг. 4 представлены результаты решения поставленной задачи моментным методом работы [8] (сплошные линии а—г) и методом прямого статистического моделирования (точки 1—4). Кривой а и точкам 1 соответствует $\tau_\infty = 0,5$; б, 2—0,667; в, 3—1,0; г, 4—4,0. Хорошее совпадение имеет место только вблизи точки $T_\infty = T_w$. При уменьшении T_∞ в решении системы моментных уравнений возникает особенность (кривая а). Отме-

тим, что моментный метод [8] не дает правильного предельного перехода в случае $T_w \neq T_\infty$, $M_{\infty x} \rightarrow 0$. При $T_\infty \rightarrow T_w$ в [8] этот переход обеспечивается автоматически, так как пар на внешней границе слоя Кнудсена находится все время на кривой насыщения.

В [14] использовался другой моментный метод — тринадцатимоментное приближение. Результаты, взятые из [14] и полученные в настоящей работе, приведены ниже. Сравнение их показывает, что неплохое совпадение с результатами, полученными на основе метода прямого статистического моделирования, имеет место при $T_\infty < 2T_w$ ($M_{\infty y} = 0$).

T_∞/T_w	1,9162	2,5319	1,8546	1,6303	2,2082
$M_{\infty x}$	0,5331	0,8939	0,7858	0,9280	0,9143
n_∞/n_{ev} [14]	1,7111	5,1365	3,2279	6,1327	5,4919
n_∞/n_{ev} (статистическое моделирование)	1,7082	3,3153	3,3536	6,0592	4,4548

Ниже приведены результаты сравнения расчетов по моментному методу работы [7] (восьмимоментное приближение для двухпоточковых максвеллов) с расчетами методом прямого статистического моделирования при тех же значениях параметров ($\tau_\infty = 2,3$):

$M_{\infty x}$	0,414	0,342	0,264
$M_{\infty y}$	1,445	2,167	2,889
P_∞/P_{ev} [7]	3,1	3,1	3,1
P_∞/P_{ev} (статистическое моделирование)	2,95	2,92	2,87

Из приведенных данных видно, что при указанных параметрах максимальное различие между моментным методом [7] и решением уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования составляет около 7%.

По-видимому, для приближенного решения задачи о сильной дозвуковой конденсации применять моментные методы целесообразно при $T_\infty \approx T_w$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 6. С. 3–11.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Кинет. теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
3. Бишаев А. М., Рыков В. А. Исследование задачи об одномерном стоке на основе кинетического уравнения // Численные методы в динамике разреженных газов. М.: ВЦ АН СССР, 1973. Вып. 1. С. 9–29.
4. Абрамов А. А., Коган М. Н. О режиме сверхзвуковой конденсации газа // ДАН СССР. 1984. Т. 278. № 5. С. 1078–1081.
5. Абрамов А. А. Сильное испарение газа с двумерной периодической поверхностью // Изв. АН СССР МЖГ. 1985. № 2. С. 132–139.
6. Абрамов А. А. Решение задачи о сильном испарении газа методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 185–187.
7. Hatakeyama M., Oguchi H. Kinetic approach to nonlinear condensation // Rarefied Gas Dynamics. V. 2. Paris. 1979. P. 1293–1303.
8. Ytrehus T., Alvestad J. A Mott - Smith solution for nonlinear condensation // Rarefied Gas Dynamics. V. 1. N. Y. 1981. P. 330–345.
9. Yen S. M. Numerical Solutions of the Boltzmann and Krook equations for a condensation problem // Rarefied Gas Dynamics. V. 2. N. Y. 1981. P. 356–362.
10. Макашев Н. К. Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 3. С. 49–62.
11. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1195–1208; № 6. С. 1553–1567.
12. Абрамов А. А. О вычислении макропараметров в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 315–318.
13. Бишаев А. М., Рыков В. А. Переохлаждение одноатомного газа при малых числах Кнудсена // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 3.
14. Labuntsov D. A., Kryukov A. P. Analysis of intensive evaporation and condensation // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 22. № 7. P. 989–1002.

Москва

Поступила в редакцию
30.VII.1987