

УДК 533.6.011.5

**КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВОГО
ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА СО СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗАТУПЛЕННОЙ
ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ**

ВОЕВОДЕНКО Н. В., ПАНТЕЛЕЕВ И. М.

В предположении малости угла атаки, относительной толщины и радиуса затупления передней кромки крыла предлагается комбинированный численный метод, основанный на последовательном расчете областей течения около затупленной передней кромки крыла и центральной его части. Течение в окрестности передней кромки крыла предполагается тождественным течению на наветренной поверхности тонкого тела, совпадающей по форме с поверхностью затупленного носка крыла, и численно определяется в соответствии с [1]. Параметры течения около центральной части крыла рассчитываются в рамках закона плоских сечений [2]. Численное интегрирование уравнений движения газа в обеих областях проводится с помощью метода С. К. Годунова. В рамках комбинированного метода и метода [3] получены поля течений около эллиптических конусов. Сравнительный анализ результатов расчетов позволяет оценить область применимости предлагаемого метода.

1. Рассмотрим крыло малой относительной толщины с прямой или слабо изогнутой затупленной передней кромкой, помещенное в однородный сверхзвуковой поток идеального газа под малым углом атаки.

Дифференциальные уравнения Эйлера, описывающие невязкое течение около крыла в системе координат, связанной с телом (фиг. 1, 1 — ударная волна, 2 — крыло), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = 0, \quad s = \frac{p}{\rho^\kappa} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия задаются на поверхности крыла (условие непротекания)

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$$

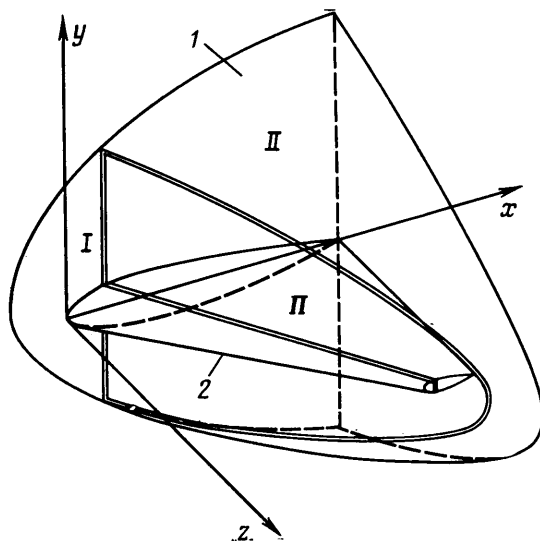
и на ударной волне

$$\rho_\infty U_\infty n = \rho U_n, \quad \rho_\infty U_\infty n U_\infty + p_\infty \mathbf{n}_b = \rho U_n U + p \mathbf{n}_b \\ \rho_\infty U_\infty n \left(\frac{U_\infty^2}{2} + e_\infty \right) + p_\infty U_\infty n = \rho U_n \left(\frac{U^2}{2} + e \right) + p U_n, \quad e = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности тела, \mathbf{U} — скорость частиц газа, U_n — проекция скорости на нормаль к поверхности ударной волны, e — внутренняя энергия единицы массы совершенного газа с постоянными теплоемкостями, \mathbf{n}_b — нормаль к поверхности ударной волны.

Рассмотрим случай $M_\infty \gg 1$, $M_n = M_\infty \sin \theta > 1$, где θ — угол между осью x и передней кромкой крыла (фиг. 1).

Если затупление крыла локализовано в области передней кромки, то всю область течения около крыла можно разделить на две (фиг. 1) таким образом, чтобы в области I выполнялось условие $\delta = d/L \ll 1$, а в области



Фиг. 1

II — условие $\tau \ll 1$. Здесь L — длина передней кромки крыла, d — максимальный поперечный размер носка крыла, лежащего в области I, τ — максимальный наклон поверхности крыла к направлению набегающего потока в области II.

Граница областей I и II — плоскость II — должна полностью лежать в сверхзвуковой зоне течения, причем все характеристические коноиды, выходящие из точек плоскости II и лежащие вниз по течению, должны касаться ее только своей вершиной, не пересекая ее, т. е. плоскость II должна иметь пространственный тип.

Течение в области I тождественно течению с наветренной стороны тонкого тела, поверхность которого, обращенная к набегающему потоку, совпадает с поверхностью носка крыла, а подветренная сторона может быть произвольной. Угол атаки тонкого тела $\alpha_T \approx \theta$.

Для обтекания наветренной стороны тонкого тела, все наклоны поверхности которого к оси тела малы ($\delta = d/L \ll 1$), обобщение закона плоских сечений на случай произвольного угла атаки дано в [1] при условии, что толщина возмущенного слоя с наветренной стороны тела мала, для чего достаточно выполнения условия $M_n \gg 1$. Следуя работе [1], введем безразмерные переменные в соответствии с оценками порядков величин

$$x^\circ = \frac{x}{L}, \quad y^\circ = \frac{y}{d}, \quad z^\circ = \frac{z}{d}$$

$$u^\circ = \frac{u}{U_\infty \cos \alpha_T}, \quad v^\circ = \frac{v}{U_\infty \sin \alpha_T}, \quad w^\circ = \frac{w}{U_\infty \sin \alpha_T}$$

$$p^\circ = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2 \sin^2 \alpha_T}, \quad \rho^\circ = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

Здесь ось абсцисс направлена вдоль оси тонкого тела, т. е. в рассматриваемом случае — вдоль передней кромки тела.

Подставив новые переменные в уравнения (1.1), отбросив величины второго порядка малости и опустив уравнение, которое с точностью $O(\delta^2)$ превращается в тождество, получим приближенные соотношения, при замене $x^\circ/(\delta \operatorname{ctg} \alpha_T)$ на t° переходящие в уравнения для двумерного нестационарного течения

ционарного течения в плоскости $x=\text{const}$

$$\frac{\partial \rho^\circ}{\partial t^\circ} + \frac{\partial \rho^\circ v^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{\partial \rho^\circ w^\circ}{\partial z^\circ} = 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\circ}{\partial t^\circ} + v^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial v^\circ}{\partial z^\circ} + \frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial y^\circ} &= 0 \\ \frac{\partial w^\circ}{\partial t^\circ} + v^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial z^\circ} + \frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial z^\circ} &= 0 \\ \frac{\partial s^\circ}{\partial t^\circ} + v^\circ \frac{\partial s^\circ}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial s^\circ}{\partial z^\circ} &= 0, \quad s^\circ = \frac{p^\circ}{\rho^\circ \alpha} \end{aligned}$$

Приближенные условия на поверхности тела $f(x^\circ, y^\circ, z^\circ)=0$ будут иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t^\circ} + v^\circ \frac{\partial f}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial f}{\partial z^\circ} = 0 \quad (1.3)$$

Преобразование условий на ударной волне $F(x^\circ, y^\circ, z^\circ)=0$ приводит к следующим соотношениям:

$$\left[\rho^\circ \frac{DF}{Dt^\circ} \right] = 0, \quad \left[\rho^\circ \frac{DF}{Dt^\circ} v^\circ + p^\circ \frac{\partial F}{\partial y^\circ} \right] = 0, \quad \left[\rho^\circ \frac{DF}{Dt^\circ} w^\circ + p^\circ \frac{\partial F}{\partial z^\circ} \right] = 0 \quad (1.4)$$

$$\rho^\circ \frac{DF}{Dt^\circ} \left(\frac{v^{\circ 2} + w^{\circ 2}}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p^\circ}{\rho^\circ} + p^\circ \left(v^\circ \frac{\partial F}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial F}{\partial z^\circ} \right) \right) = 0,$$

$$\frac{DF}{Dt^\circ} = \frac{\partial F}{\partial t^\circ} + v^\circ \frac{\partial F}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial F}{\partial z^\circ}$$

Здесь выражение, заключенное в квадратные скобки, означает разность соответствующей величины до и после скачка, за скорость потока до ударной волны принимается проекция скорости U_∞ на плоскость $x=\text{const}$.

Таким образом, приближенные граничные условия совпадают с соотношениями, которые должны выполняться в плоском нестационарном течении.

В области течения II также возможно упрощение уравнений движения идеального газа в соответствии с теорией гиперзвуковых малых возмущений при условии малости углов наклона поверхности тела к направлению набегающего потока [2]. Действительно, вводя безразмерные переменные в соответствии с оценкой порядка величин в этой области течения

$$\begin{aligned} u &= U_\infty + u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1 \\ x' &= \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l\tau}, \quad z' = \frac{z}{l\tau} \\ u' &= \frac{u_1}{U_\infty \tau^2}, \quad v' = \frac{v_1}{U_\infty \tau}, \quad w' = \frac{w_1}{U_\infty \tau} \\ p' &= \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2 \tau^2}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty} \end{aligned}$$

и отбрасывая члены порядка $\varepsilon^2 = \tau^2 + M_\infty^{-2}$, можно получить соотношения, идентичные (1.2)–(1.4), если переменную x' заменить на t' (в этом случае система координат связана с крылом, как показано на фиг. 1). Здесь считается для общности, что тело имеет в плоскости $x=\text{const}$ соизмеримые

поперечные размеры порядка lt , где l — характерный линейный размер крыла.

Таким образом, в обеих расчетных областях течения около крыла может быть применен единый универсальный численный метод, в основе которого лежит использование закона плоских сечений (нестационарной аналогии). При этом граничные условия в области II ставятся не только на поверхности тела и ударной волне, но и на граничной плоскости II. Граничными газодинамическими функциями на плоскости II для области II являются функции, полученные на граничной плоскости из области I.

Физический смысл разделения поля течения на две характерные области состоит в том, что нормальные к оси крыла неподвижные плоскости, в которых, согласно закону плоских сечений, как бы остается жидкость, в области затупления крыла деформируются — разворачиваются перпендикулярно передней кромке.

Комбинированный метод, предполагающий последовательный расчет течения в обеих областях в рамках закона плоских сечений, численно реализован с помощью метода С. К. Годунова [4].

Отметим, что комбинированный метод дает принципиальную возможность расчета течений с образующимися около затупленного носка крыла дозвуковыми зонами. Действительно, соотношения (1.2) справедливы при $\delta \ll \alpha_T < \pi/2$ [1], что соответствует в том числе и большим значениям θ , при которых за ударной волной около передней кромки крыла местные числа $M < 1$.

Оценим погрешность определения газодинамических величин во всем поле течения. Предположим, что профиль крыла в сечении, нормальном передней кромке крыла, вблизи носка можно приближенно представить в виде

$$y = \pm \sqrt{2rx} + \tau c_1 x_1 + \dots$$

где x_1 — расстояние до передней кромки крыла, r — радиус затупления, $c_1 \sim 1$.

Пусть $r \ll L$, $d = O(r^m)$, $0 < m < 1$, $\theta \sim 1$, тогда погрешность определения течения в области II будет $\epsilon_2 = r/d + M_\infty^{-2} + \tau^2$. Здесь d определяет расстояние между граничной плоскостью II и передней кромкой крыла, а τ характеризует угол атаки, относительную толщину и кривизну профиля крыла. Очевидно, погрешность определения параметров течения в области I составляет величину порядка $\epsilon_1 = (d/L)^2$. Если выбрать $d \sim r^{1/3} L^{2/3}$, то во всей области течения газодинамические функции определяются с точностью до членов порядка $\epsilon_3 = (r/L)^{2/3} + \tau^2 + M_\infty^{-2}$.

Отметим, что, так как численное сращивание на граничной плоскости II проводится только по двум поперечным проекциям скорости, давления и плотности, дефект продольной скорости, возникающий на плоскости II в некоторых случаях (например, при небольших числах M_∞ или умеренных значениях τ), может приводить к нарушению гладкости газодинамических функций вблизи границы областей, а иногда и к появлению фиктивных скачков давления.

2. С помощью комбинированного метода и метода [3] проведены расчеты течения около эллиптических конусов, описываемых уравнением $(y/A_2)^2 + z^2 - (x/A_1)^2 = 0$ и обтекаемых под нулевым углом атаки, при различных значениях коэффициентов A_1 и A_2 . Из сопоставления результатов расчетов определена область применимости метода по числам M_∞ и углу θ (на фиг. 2 область I), в пределах которой погрешность определения давления на поверхности крыла составляет 5–7% при $\tau < 0,3$ (соответствует среднему углу наклона поверхности центральной части крыла к направлению набегающего потока $\sim 17^\circ$) и $\delta < 0,23$. При этом были использованы результаты работы [5], в которой исследуются пределы применимости законов подобия для тонких тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком под большими углами атаки, в том числе и соответствующими появлению дозвуковых зон течения около затупленного носка крыла.

Отметим, что в случае небольших значений θ ($\theta < 20^\circ$) решение задачи обтекания крыла с затупленной передней кромкой при $\tau < 0,3$ в рамках классической гиперзвуковой теории малых возмущений [2] дает примерно такую же погрешность в определении распределения давления по поверх-

ности крыла (фиг. 2, заштрихованная область 2), т. е. общая область применимости закона плоских сечений, в том числе и в комбинированном виде, охватывает почти весь диапазон чисел $M_\infty=1,8-6,0$ и значений θ , за исключением области, соответствующей околосвуковой передней кромке при $M_\infty=1,8-3,0$ (зубец на нижней границе области применимости, фиг. 2).

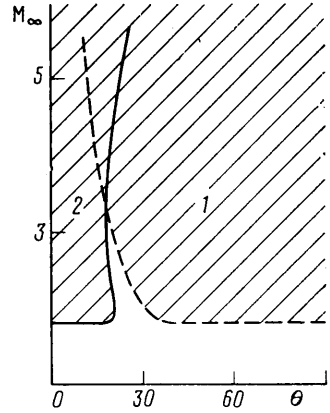
Верхняя граница по числам M набегающего потока в данном случае довольно условна, так как при $M_\infty > 6$ исследование точности результатов не проводилось. Очевидно, что при больших значениях M_∞ вследствие возникновения интенсивного энтропийного слоя, распространяющегося по всей поверхности крыла, закон плоских сечений в области II перестает быть справедливым из-за значительного дефекта продольной составляющей скорости. Поэтому комбинированный метод ориентирован на использование при числах $M_\infty=1,8-6,0$, хотя расчет течения около носка крыла остается справедливым, и при больших значениях M_∞ .

Некоторые результаты сравнений для предельных значений M_∞ , δ и τ приведены на фиг. 3-5, где сплошными кривыми изображены зависимости, рассчитанные с помощью [3], штрихпунктирными — результаты, полученные в рамках классической гиперзвуковой теории малых возмущений [2], штриховыми — результаты настоящего расчета. Распределения давления по поверхности эллиптического конуса при $\alpha=0$ в сечении, нормальном оси конуса, приведены на фиг. 3. Геометрические параметры конуса определялись коэффициентами

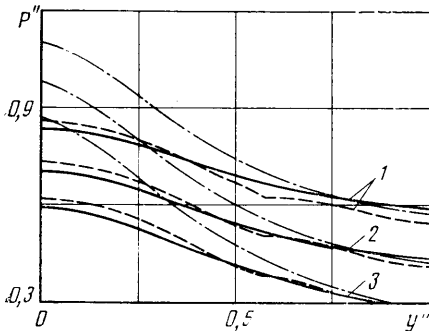
$$A_1 = \sqrt{3}, \quad A_2 = 0,4, \quad y'' = \frac{A_1 y}{A_2 x}, \quad p'' = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}$$

кривые 1 соответствуют значению $M_\infty=2,0$; 2 — $M_\infty=2,5$; 3 — $M_\infty=3,5$.

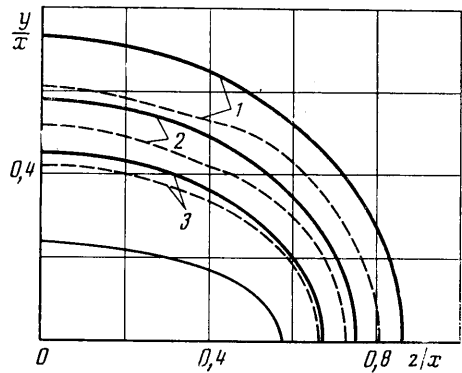
Отметим, что с увеличением θ погрешность в определении давления в рамках гиперзвуковой теории малых возмущений [2] в области максимальных углов наклона поверхности к направлению набегающего потока существенно увеличивается и достигает, например, при $\theta=45^\circ$, $M_\infty=3,5$ почти 100%, тогда как погрешность комбинированного метода составляет ~6%. Положение ударной волны (фиг. 4) определяется с помощью комбинированного метода менее точно, чем давление, а давление на поверхности тела рассчитывается с удовлетворительной точностью даже при $M_n=1$ (фиг. 3).



Фиг. 2



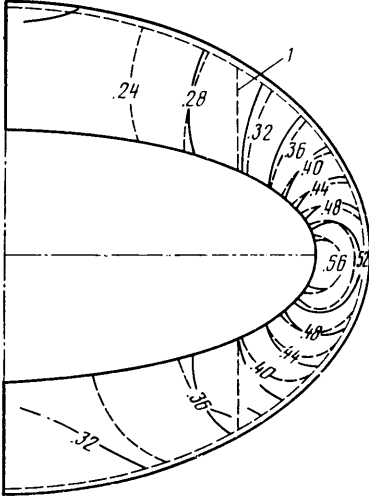
Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 положения ударных волн I соответствуют $M_\infty=2,0$; $2 - M_\infty=2,5$; $3 - M_\infty=3,5$.

Изобары в сечении $x=\text{const}$ при $M_\infty=3,5$, $\alpha=2^\circ$, $A_1=\sqrt{3}$ и $A_2=0,4$ приведены на фиг. 5. Отрезки прямых I соответствуют границе областей I и II. Некоторое нарушение гладкости распределения давления по поверхности конуса (фиг. 3), а также появление фиктивных скачков давления (фиг. 5) вблизи границы областей являются, по-видимому, результатом дефекта продольной скорости на плоскости II. Максимальная погрешность определения давления в поле течения около конуса даже при значениях $\tau=0,34$, $\delta=0,28$ составляла всего 7%.



Фиг. 5

Следует отметить, что предложенная здесь методика расчета затупленных кромок может быть достаточно просто включена в комплекс программ как составная часть расчетов течения около летательных аппаратов, причем угол атаки в этом случае может быть произвольным. Для этого окрестность передней кромки выделяется в самостоятельную расчетную подобласть, где используется закон плоских сечений, обобщенный для тонкого тела на случай произвольного угла атаки. Расчет остального поля течения может быть проведен каким-либо маршевым численным методом.

Описанный комбинированный метод помимо ощутимого выигрыша во времени расчета на ЭВМ по сравнению с численным интегрированием полных уравнений Эйлера вследствие удачного сочетания гиперзвуковой теории малых возмущений и метода С. К. Годунова дает возможность определения течения около тел довольно сложной формы. При таком подходе исключается возможность нарушения гиперболичности системы в расчетном поле и процедура расчета не теряет устойчивости при значительном изменении способов построения расчетных сеток, аппроксимации поверхности тела и т. д. Все это дает возможность в значительной степени формализовать процесс расчета, что в свою очередь создает предпосылки для проведения широкого численного эксперимента. Расчет обеих областей течения на сетке 10×30 требует 25 мин времени центрального процессора на ЭВМ ЕС-1060, причем в результате таких расчетов с приемлемой точностью можно определить картину течения с локальными дозвуковыми зонами.

Авторы выражают благодарность А. А. Гладкову за обсуждение работы, Г. П. Воскресенскому, О. В. Иванову, В. А. Стебунову за предоставленную возможность использования программы расчета сверхзвукового обтекания крыла с отошедшей ударной волной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. Пространственные гиперзвуковые течения газа около тонких тел при больших углах атаки // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 295–242.
2. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. Т. 733–755
3. Воскресенский Г. П., Орлова М. Г., Стебунов В. А. Сверхзвуковое невязкое обтекание крыльев при отошедшей ударной волне: Препринт № 152. М.: Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981. 34 с.
4. Воеводенко Н. В., Широносов В. А. Исследование точности закона плоских сечений // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 4. С. 35–43.
5. Бачманова Н. С., Липницкий Ю. М. О законе подобия для острых круговых конусов при больших углах атаки в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 3. С. 78–83.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII.1987