

УДК 533.6.011:537.84

АВТОВОЛНОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В ШЕРОХОВАТЫХ КАНАЛАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

ГОРДЕЕВ Ю. Н., КУДРЯШОВ Н. А., МУРЗЕНКО В. В.

Исследование установившихся режимов течения проводящего газа в магнитогазодинамических каналах представляет интерес в связи с анализом процессов в МГД-генераторах, в плазменных ускорителях и в ряде других устройств [1, 2].

Исследованию сверхзвуковых магнитогазодинамических течений проводящего газа в МГД-канале при больших магнитных числах Рейнольдса ($Re_m \gg 1$) посвящены работы [3, 4], в которых определены параметры течения установившегося потока газа с проводимостью, зависящей от температуры, и показано существование периодического режима движения. Образование такого режима обусловлено неустойчивостью в областях с малой электропроводностью, вследствие которой в газе возникают узкие хорошо проводящие ток слои.

В данной работе рассматривается установившееся течение газа в шероховатом канале при действии сильных поперечных магнитного и электрического полей. Показано, что в этом случае также существует периодический режим, состоящий из последовательности волн торможения [5–7]. Возникновение периодического режима движения обусловлено действием сил гидравлического сопротивления при движении газа.

1. Постановка задачи. Течение слабопроводящего газа при действии сильных электрического (\mathbf{E}) и магнитного (\mathbf{H}) полей при $\Lambda \ll 1$ [1] ($\Lambda = 4\pi\sigma El(Hc)^{-1}$, σ — проводимость газа, c — скорость света, l — характерный размер области течения, в которой циркулируют электрические токи) описывается системой уравнений магнитной гидродинамики в «гальваническом приближении» [8, 9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & P &= A \rho T \\ \rho \frac{d}{dt} \mathbf{u} + \nabla P &= \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \mathbf{F}_c, & \mathbf{j} &= \sigma \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H} \right] \\ \frac{d}{dt} P + \gamma P \operatorname{div} \mathbf{u} &= (\gamma - 1) \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 + \mathbf{u} \mathbf{F}_c + Q \right], & \gamma &= \frac{c_p}{c_v} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь P , ρ , T , \mathbf{u} — давление, плотность, температура и скорость движения газа, \mathbf{H} , \mathbf{E} — векторы напряженности магнитного и электрического полей, \mathbf{j} — вектор плотности электрического тока, A — удельная газовая постоянная, c_p и c_v — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме соответственно, Q — объемные источники тепловой энергии, \mathbf{F}_c — гидродинамическая сила сопротивления.

Исследование движения газа в МГД-канале может проводиться в квазиодномерном приближении [10]. Сила гидравлического сопротивления \mathbf{F}_c при течения электропроводной сжимаемой жидкости в шероховатом канале при больших числах Рейнольдса предполагается зависящей от скорости движений \mathbf{u} по закону [11]

$$\mathbf{F}_c = \lambda \rho \frac{|\mathbf{u}| \mathbf{u}}{2w}, \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 + s_0 \frac{Ha^2}{Re} \right), \quad \lambda_0 = 2a \left(\frac{\varepsilon}{w} \right)^b \quad (1.2)$$

где $Na = Hw\sqrt{\sigma/\mu}$ — число Гартмана, $Re = \rho u w/\mu$ — число Рейнольдса, μ — вязкость, w — ширина канала, ε — абсолютная величина шероховатости канала, a и b — параметры, характеризующие гидравлический коэффициент сопротивления в отсутствие магнитного поля ($a \approx 0,1$, $b \approx 0,5$ [12, 13]), s_0 — коэффициент, зависящий от формы и размеров элементов шероховатости [11].

Выражение (1.2) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{F}_c = d_1 \mathbf{u} + d_2 \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} \\ d_1 = 1/2 \lambda_0 s_0 \sigma H^2, \quad d_2 = 1/2 \lambda_0 w^{-1}$$

Для описания теплообмена между газом и стенками канала используем закон Ньютона [14]

$$Q = 2\lambda_s (T - T_s)/w \quad (1.3)$$

Здесь λ_s — коэффициент теплопередачи, $2w^{-1}$ — удельная поверхность канала, T_s — температура стенок канала. Значение λ_s может быть определено из критериального уравнения [14].

Для плоского течения газа при постоянных поперечных электрическом (Е) и магнитном (Н) полях система уравнений (1.1)–(1.3) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \quad P = A \rho T \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial x} P = \frac{\sigma E H}{c} - \left[\sigma \left(\frac{H}{c} \right)^2 + d_1 \right] u - \lambda_0 \frac{\rho |u|}{2w} u \\ \frac{\partial}{\partial t} P + u \frac{\partial}{\partial x} P + \gamma P \frac{\partial}{\partial x} u = (\gamma - 1) \left\{ \frac{2\lambda_s}{w} (T - T_s) + \sigma E^2 - \right. \\ \left. - 2\sigma E \left(\frac{H}{c} \right) u + \left[\sigma \left(\frac{H}{c} \right)^2 + d_1 \right] u^2 + \frac{\lambda_0 \rho |u|}{2w} u^2 \right\} \quad (1.4)$$

2. Устойчивость стационарных решений (1.4). Система уравнений (1.4) имеет стационарное решение $P = P_0$, $u = u_0$, $\rho = \rho_0$, которое определяется из равенства нулю правых частей (1.4).

Для анализа эволюции возмущений стационарного потока газа (2.1) исследуем поведение решений уравнений (1.4) вблизи волнового фронта возмущений. Для этого будем искать решение в виде [15]

$$A = A_0 + A_1(t) \xi + \frac{A_2(t) \xi^2}{2} + \dots \quad (2.1)$$

где $\xi = x - X(t)$, $X(t)$ — траектория волнового фронта, $A = (P, \rho, u)$.

Подставив (2.1) в (1.4), получим

$$\dot{X}_1 = u_0, \quad \dot{X}_{2,3} = u_0 \pm c_0, \quad c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0} \\ \frac{d}{dt} \rho_1 - \frac{\gamma + 1}{2\rho_0} (u_0 - \dot{X}_k) \rho_1^2 = \Omega_k \rho_1, \quad k = 1, 2, 3 \\ \Omega_k = \frac{1}{2c_0^2} \left\{ \frac{\lambda_0 u_0 \dot{X}_k}{2w} (\gamma u_0 - \dot{X}_k) - \frac{\sigma E H c_0^2}{\rho_0 u_0 c} - \frac{2\lambda_s (\gamma - 1)^2 P_0}{w A \rho_0^2} \right\} \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что возмущение либо переносится потоком ($\dot{X} = \dot{X}_1 = u_0$), либо распространяется со скоростью звука относительно потока.

Если $\dot{X} = \dot{X}_1 = u_0$, то из (2.2) получим

$$\rho_1^i(t) = \rho_1^i(0) \exp \{ \Omega_i t \}$$

При $\Omega_1 > 0$ возмущение $\rho_1(t)$ будет с течением времени монотонно возрастать, при $\Omega_1 < 0$ убывать.

Остановимся на случаях, когда возмущение переносится относительно потока со звуковой скоростью c_0 ($\dot{X} = \dot{X}_{2,3}$). Найдем ρ_1^k в зависимости от t

$$\rho_1^k(t) = \frac{\rho_1^k(0) \exp\{\Omega_k t\}}{1 + \alpha_k \rho_1^k(0) (1 - \exp\{\Omega_k t\})}, \quad \alpha_k = \frac{(\gamma + 1)(u_0 - \dot{X}_k)}{2\rho_0 \Omega_k} \quad (2.3)$$

При $\Omega_k > 0$, $\alpha_k \rho_1^k(0) > 0$ крутизна волнового фронта возмущения растет с течением времени ($\rho_1^k(t) \rightarrow \infty$) и при

$$t = t^* = \Omega_k^{-1} \ln[1 + (\alpha_k \rho_1^k(0))^{-1}] \quad (2.4)$$

происходит опрокидывание волнового фронта. Если $\Omega_k > 0$ и $\alpha_k \rho_1^k(0) < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ ρ_1^k стремится к постоянному значению $-\alpha_k^{-1}$.

В случае $\alpha_k \rho_1^k(0) < -1$ в момент времени t^* , определяемый выражением (2.5), также происходит опрокидывание фронта. При $\alpha_k \rho_1^k(0) > -1$ возмущение $\rho_1^k(t)$ убывает.

Рассмотрим движение газа через МГД-канал в предельном случае, когда температура газа постоянна ($T = \text{const}$) и не зависит от времени (изотермический режим течения). Такое течение описывается системой уравнений (1.4) при $\gamma = 1$. Возмущения в стационарном потоке распространяются либо вверх, либо вниз по течению со скоростью звука c_0 ($\dot{X} = \dot{X}_2$ и $\dot{X} = \dot{X}_3$). Крутизна фронта возмущения $\rho_1(t)$ в этом случае выражается формулой (2.3), где

$$\Omega_{2,3} = \mp \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda_0 u_0}{2wc_0} (u_0 \pm c_0) \pm \frac{\sigma EH}{c\rho_0 u_0} \right\}, \quad \alpha_k = \frac{u_0 - \dot{X}_k}{\rho_0 \Omega_k} \quad (2.5)$$

Здесь верхние знаки соответствуют возмущению, распространяющемуся вниз по потоку (Ω_2), нижние знаки — вверх против потока (Ω_3).

Из (2.5) следует, что малые возмущения, распространяющиеся вниз по потоку, убывают с течением времени. В волне, бегущей против потока, крутизна фронта возмущения $\rho_1(t)$ растет, если скорость потока u_0 удовлетворяет условию

$$u_0 \geq c_0 \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2w}{\lambda_0 c_0 \rho_0} \left[\sigma \left(\frac{H}{c} \right)^2 + d_1 \right]} \right\} \quad (2.6)$$

В момент времени t^* (2.4) происходит опрокидывание волнового фронта.

Из дисперсионного соотношения, связывающего частоту и волновое число для малых возмущений при течении слабопроводящего газа в шероховатом канале, следует, что при условии (2.6) стационарный поток неустойчив.

Как следует из приведенного выше исследования поведения решения вблизи волнового фронта возмущения, неустойчивость потока приводит к увеличению крутизны волнового фронта и в конечном итоге к опрокидыванию его.

3. Автоволновой режим при изотермическом течении газа ($P = c_0^2 \rho$). Будем искать решения системы уравнений (1.4) в виде установившейся одномерной плоской бегущей волны.

Перейдем в (1.4) к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* \rho', \quad u = c_0 u', \quad P = c_0^2 \rho^* \rho', \quad D = c_0 D' \\ \xi &= (x - Dt)/L_0, \quad L_0 = 2w/\lambda_0, \quad \alpha = L_0 \sigma EH / \rho^* c_0^2 c \\ \beta &= L_0 [\sigma (H/c)^2 + d_1] / c_0 \rho^*, \quad \rho_0 = \rho^* \rho_0' \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$u_0 = c_0 u_{01} = c_0 (\sqrt{\beta^2 + 4\alpha \rho_0'} - \beta) / 2\rho_0'$$

$$d(\rho'(u' - D'))/d\xi = 0$$

$$\rho'(u' - D') du'/d\xi + d\rho'/d\xi = \alpha - \beta u' - \rho' |u'| u' \quad (3.2)$$

Штрихи над безразмерными величинами далее опускаем. Первое уравнение (3.2) имеет интеграл $\rho(u-D)=q$. Поскольку параметры установившегося течения $\rho=\rho_0$, $u=u_{01}$ должны удовлетворять (3.2), то $q=\rho_0(u_{01}-D)$.

При фиксированном D уравнение (3.2) имеет еще одно тривиальное решение

$$u=u_{02}=D(\rho_0 u_{01}+\beta)(\beta+q)^{-1}, \quad \rho=\rho_1=\rho_0(D-u_{01})(D-u_{02})^{-1}$$

физический смысл которого выясним ниже.

При условии (2.6) (что соответствует большим скоростям движения газа) указанные стационарные течения являются неустойчивыми относительно малых возмущений.

В случае $d\rho/d\xi \neq 0$, $du/d\xi \neq 0$ из уравнений (3.2) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для $u(\xi)$ ($\varepsilon=\beta+q$)

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{(u-D)F(u)}{q[(u-D)^2-1]} \quad (3.3)$$

$$F(u) = \begin{cases} \varepsilon(u-u_{01})(u_{02}-u), & u \geq 0 \\ \varepsilon(u-u_{01})(u_{02}-u) + 2qu^2, & u < 0 \end{cases}$$

Интегрируя уравнение (3.3), получим

$$\xi - \xi_0 = \frac{q}{\varepsilon} \left\{ \frac{1 - (u_{02}-D)^2}{(u_{02}-u_{01})(u_{02}-D)} \ln|u-u_{02}| + \right. \\ \left. + \frac{1 - (u_{01}-D)^2}{(u_{01}-u_{02})(u_{01}-D)} \ln|u-u_{01}| + \frac{1}{(u_{01}-D)(u_{02}-D)} \ln|u-D| \right\} \quad (3.4)$$

Для того чтобы выделить ограниченные решения $u(\xi)$ уравнения (3.3), проведем качественный анализ интегральных кривых данного уравнения.

Рассмотрим относительное расположение неподвижных и особых точек уравнения (3.2) для прямой и обратной волн ($u < D$, $u > D$). Уравнение (3.3) имеет две особые точки: $D+1$ и $D-1$.

При $D > 0$ в обратной волне ($u > D$, $q > 0$) правая часть уравнения (3.3) обращается в нуль в трех точках: D , u_{01} и $u_{02} > D$. В случае $D < 0$ правая часть (3.3) при $u \geq D$ имеет только два корня: D и $u_{01} > 0$.

Для прямой ($u < D$, $q < 0$) множество неподвижных точек (3.3) состоит из u_{01} и D , поскольку при $u < 0$ уравнение $F(u)=0$ корней не имеет. На интервале $0 \leq u \leq D$ $F(u)$ обращается в нуль только при $u=u_{01}$, так как при $\varepsilon > 0$ $u_{02} > D$, а при $\varepsilon < 0$ $u_{02} < 0$.

В случае $q > 0$, $D > 0$ уравнения (3.2) имеют при $u > D$ стационарные решения: 1) $u=u_{01}$, $\rho=\rho_0$; 2) $u=u_{02}$, $\rho=\rho_1$. Скорость D при заданном ρ_1 определяется выражением

$$D = \frac{2\alpha}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\rho_0} + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\rho_1}}$$

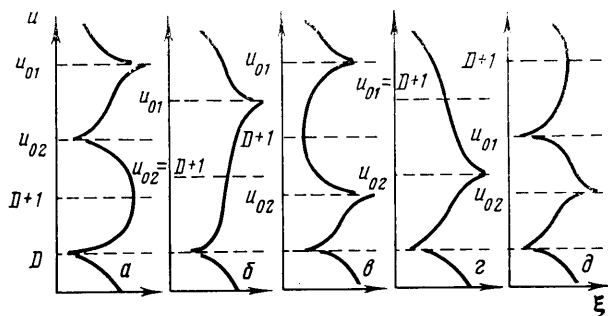
$$\rho_1 \geq \rho_0, \quad 0 \leq D \leq D^* = u_{01}(u_{01}\rho_0 + \beta)(2u_{01}\rho_0 + \beta)^{-1}, \quad D \leq u_{02} \leq u_{01}$$

$$\rho_1 < \rho_0, \quad D^* < D < u_{01} < u_{02}$$

Второй случай может быть сведен к первому путем введения новых безразмерных переменных (3.1). Поэтому ограничимся рассмотрением $D < u_{02} < u_{01}$ ($\rho_1 > \rho_0$).

Стационарные решения уравнения (3.3) u_{01} и u_{02} могут располагаться относительно $D+1$ пятью способами: $D+1 < u_{02}$, $D+1 = u_{02}$, $u_{02} < D+1 < u_{01}$, $D+1 = u_{01}$ и $D+1 > u_{01}$. Возникающие при этом поля интегральных кривых уравнения (3.3) приведены на фиг. 1а-д.

Из фиг. 1 и уравнений (3.2) видно, что условиям ограниченности и однозначности $u(\xi)$ и $\rho(\xi)$ удовлетворяют только интегральные кривые на фиг. 1а, б, расположенные между прямыми u_{01} и u_{02} . Эти интегральные кривые описывают плавный переход из одного стационарного течения в



Фиг. 1

другое — волны переключения. На фиг. 1а интегральные кривые соответствуют волне, движущейся относительно газа со сверхзвуковой скоростью против потока. При распространении волны скорость газа уменьшается от u_{01} до u_{02} . Интегральные кривые, представленные на фиг. 1б, соответствуют волне, движущейся с дозвуковой скоростью против потока. Скорость газа при этом увеличивается от u_{02} до u_{01} .

Волна переключения между двумя стационарными решениями может возникнуть в асимптотическом пределе, к которому стремится течение, возникающее в результате распада разрыва. При этом, если справа от разрыва находится газ с плотностью ρ_1 , а слева — с плотностью $\rho_0 < \rho_1$, то при условии

$$R_1 = (\rho_1 \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\rho_0} - \rho_0 \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\rho_1}) / (\rho_1 - \rho_0) > \beta + 2\rho_1$$

возникает сверхзвуковая волна переключения. В случае когда $\rho_1 > \rho_0$ и $R_1 < \beta + 2\rho_1$, по газу против потока распространяется волна с дозвуковой скоростью.

Кроме непрерывных решений типа «бегущих» волн в газе существуют и разрывные решения — ударные волны. При этом на скачке должны быть выполнены условия Гюгонно:

$$\rho^-(u^- - D) = \rho^+(u^+ - D) \quad (3.5)$$

$$P^- + \rho^-(u^- - D)^2 = P^+ + \rho^+(u^+ - D)^2$$

и условия эволюционности, которые для отраженных ударных волн ($u > D$) имеют вид $u^- - D > 1$, $u^+ - D < 1$.

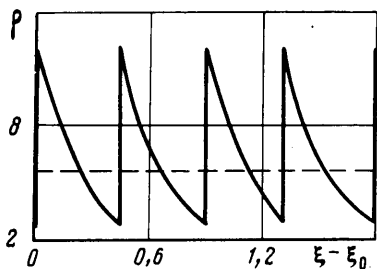
Здесь индексы плюс и минус соответствуют значениям параметров газа за фронтом и перед фронтом ударной волны.

Знаменатель в правой части уравнения (3.3) в точках $u = D+1$ и $u = D-1$ обращается в нуль. Поэтому из (3.3), (3.4) и условий эволюционности следует, что непрерывное решение, связывающее u^- и u^+ , возможно при $u_{01} = D+1$ (или $u_{02} = D+1$). Эти интегральные кривые приведены на фиг. 1б, г.

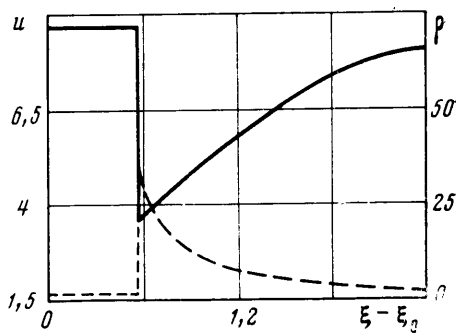
Поскольку $u^- > u^+$, то в силу монотонности решения (3.4) должно быть $du/d\xi > 0$. Случай $u_{01} = D+1$ этому условию не удовлетворяет, поэтому решение существует при $u_{02} = D+1$.

Определим условия, которым должны удовлетворять параметры α и β , чтобы имело место периодическое решение с разрывами. Из условия $u_{02} = D+1$ следует, что скорость волны D равна

$$D = D^{**} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4u_{01} + 4\frac{\beta}{\rho_0}} - 1 \right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Выше показано, что при $0 < D < D^*$ для существования периодического разрывного решения необходимо $D^{**} < D^*$ или

$$\alpha > \alpha^* = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0} + 1} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\rho_0} + 1} + 1 \right)^2 \quad (3.6)$$

Условие (3.6) эквивалентно неравенству $u_{01} > 1 + \sqrt{1 + \beta/\rho_0}$, которое совпадает с условием возникновения неустойчивости потока (2.6).

Решение, имеющее скачок, в области непрерывности описывается зависимостью

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{\varepsilon} \{ \ln |u - u_{01} + q| - (1 + q) \ln |u - u_{01}| \} \quad (3.7)$$

где величина $q = u_{01} - D^{**}$ является функцией параметров α и β .

Из (3.5) следует, что значения u^+ и u^- связаны выражением

$$(u^- - D)(u^+ - D) = 1 \quad (3.8)$$

Пусть при $\xi = \xi_1$ достигается значение $u = u^+$, а при $\xi = \xi_1 + \lambda$ — значение u^- . Тогда из (3.7), (3.8) получаем период λ разрывной волны в зависимости от максимального значения скорости в волне (u^-)

$$\lambda = \frac{2}{\varepsilon} \ln |u^- - u_{01} + q| - \frac{1 + q}{\varepsilon} \left\{ \ln |u^- - u_{01}| - \ln \left| \frac{1}{u^- - u_{01} + q} - q \right| \right\}$$

Таким образом, величина λ зависит от параметров α , β и от амплитуды волны u^- . Конкретное значение u^- определяется начальным возмущением стационарного течения.

Периодическая волна движется относительно газа против его потока. На фиг. 2 представлены профили плотности ρ газа для параметров $\alpha = 100$, $\beta = 3$ и $u^- = 5$ (период $\lambda \approx 0.45$, $\rho^* = \rho_0$).

Если устремить u^- к u_{01} , то $\lambda \rightarrow \infty$ и в результате получается решение, соответствующее уединенной волне. Профили скорости u и плотности газа ρ в уединенной волне для тех же значений параметров приведены на фиг. 3.

Пусть $q > 0$, $D < 0$. В области $u > D$ существует единственный корень уравнения $F(u) = 0$ — $u = u_{01}$, поэтому волн переключения нет.

Для существования разрывных периодических решений требуется, чтобы $u_{01} = D + 1$. В этом случае условия эволюционности не выполняются. Периодических разрывных решений при $q > 0$, $D < 0$ нет.

Пусть $q < 0$. При $u < D$ существует единственный корень уравнения $F(u) = 0$, равный u_{01} . Поэтому волн, распространяющихся вниз по потоку, нет.

Условия эволюционности разрывов, распространяющихся вниз по потоку, имеют следующий вид:

$$D-u^- < 1, D-u^+ > 1 \quad (3.9)$$

При $u < D$ точки u^- и u^+ могут быть соединены непрерывным отрезком интегральной кривой уравнения (3.5) только при $u_{01} = D - 1$. Однако при этом $du/d\xi < 0$ и условие (3.9) не удовлетворяется, периодических разрывных волн, распространяющихся вниз по потоку, не существует.

В работе получено условие устойчивости стационарного течения слабопроводящего газа в шероховатом канале в однородных поперечных магнитном и электрическом полях. Показано, что при нарушении условия устойчивости в потоке может возникнуть периодическая система ударных волн, распространяющихся против потока. Профили скорости и плотности газа получены в аналитическом виде. Установлено, что с увеличением амплитуды волны возрастает ее период. Показана возможность образования уединенной волны, движущейся против потока газа. Полученные аналитические решения могут быть использованы при тестировании расчетных схем магнитной газовой динамики при малых магнитных числах Рейнольдса.

Авторы благодарят А. А. Бармина и А. Г. Куликовского за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
2. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 88–163.
3. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об особенностях сверхзвуковых МГД-течений, связанных с включением проводимости при охлаждении газа // Избранные вопросы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1981. Ч. 1. С. 153–164.
4. Бармин А. А., Глинов А. П., Куликовский А. Г. Возникновение периодических режимов в стационарных сверхзвуковых МГД-течениях вследствие выключения электропроводности среды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 138–149.
5. Зайцев С. Г., Фаворская И. К. Расчет распространения ударной волны в магнитогазодинамическом канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 5. С. 180–184.
6. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Ударные волны в изотермическом газе при наличии сил сопротивления // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 171–175.
7. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Численное исследование движения газа с учетом сил сопротивления // ПМТФ. 1985. № 4. С. 100–105.
8. Брагинский С. И. К магнитной гидродинамике слабо проводящих жидкостей // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 5(11). С. 1417–1430.
9. Седов Л. Н., Коробейников В. П., Марков В. В. Теория распространения взрывных волн // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1986. Т. 175. С. 178–216.
10. Битюрин В. А., Желнин В. А., Любимов Г. А., Медин С. А. О гидравлических моделях течения в канале МГД-генератора, основанных на уравнениях плоского пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 67–75.
11. Тананаев А. В., Черняев Ю. П. О гидравлическом сопротивлении шероховатых каналов при течении несжимаемой токопроводящей жидкости в присутствии постоянного поперечного магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 66–71.
12. Nilson R. H., Proffer W. J., Duff R. E. Modelling of gas-driven fractures induced by propellant combustion within a borehole // Int. J. Rock Mech. Sci. and Mining Sci. and Geomech. Abstr. 1985. V. 22. № 1. P. 3–19.
13. Huitt J. L. Fluid flow in simulated fractures // A. I. Ch. E. Journal. 1956. V. 2. № 2. P. 259–264.
14. Лыков А. В. Тепломассообмен. Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.
15. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XI.1987