МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1989

УДК 532.5.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ СИЛЬНОВЯЗКОГО СЛОЯ НА ЭРОДИРУЕМОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

МАЗО В. Л.

Рассматривается течение слоя сильновязкой несжимаемой жидкости по наклонной поверхности под действием силы тяжести. При этом подстилающая поверхность предполагается эродируемой. Подобного рода течения встречаются в задачах геофизики, в частности в задачах динамики ледниковых покровов и связанных с ними задачах эволюции ледникового рельефа [1]. Как показывают натурные данные, течение льда в ледниковых покровах канализируется в небольшое число правильно расположенных потоков, скорость льда в которых заметно превосходит скорость прочих масс льда. Кроме того, на подстилающих поверхностях возникают согласованные с потоками каналы с периодическим продольным профилем. Натурные данные также показывают, что процесс образования подобных пространственных неоднородностей нельзя свести к какому-либо универсальному механизму, обусловленному лишь геологическими особенностями подстилающей поверхности. В то же время эрозионное взаимодействие ледникового покрова с подстилающей поверхностью – сильнейший геологический фактор.

Естественно предположить, что пространственные неоднородности в течении эродирующей жидкости по эродируемой подстилающей поверхности возникают как вторичные структуры в результате неустойчивости или дисперсии скоростей распространения возмущений пространственно однородного течения. В работе возмущения рассматриваются в линейном длинноволновом приближении и найдены характерные масштабы возникающих пространственных структур. Поперечные возмущения с достаточно большими длинами волн неустойчивы и приводят к образованию потоков в жидкости и согласованных с ними каналов на подстилающей поверхности. Для продольных возмущений имеет место дисперсия скоростей их распространения, в результате которой в продольном профиле каналов возникает периодичность. Подобного рода подход к задачам взаимодействия эродирующей жидкости с эродируемой подстилающей поверхностью традиционен (см. обзор [2]) и берет свое начало с работы [3]. Однако до сих пор рассматривался случай невязкой жидкости. В работе изучается противоположный предельный случай сильновязкой жидкости, в котором развиваются иные типы неустойчивости.

1. Рассматривается течение слоя сильновязкой несжимаемой жидкости по наклонной поверхности под действием силы тяжести. Подстилающая поверхность предполагается эродируемой: вектор скорости эрозии предполагается направленным по нормали к подстилающей поверхности, а его модуль — пропорциональным касательному напряжению в жидкости у подстилающей поверхности. В работе в линейном длинноволновом приближении исследуется устойчивость и дисперсия скоростей распространения возмущений пространственно однородного течения жидкости.

Выберем следующие масштабы: длины — d, времени — ν/gd, скорости — gd^2/ν, давления и напряжений — ρgd, где d — средняя толщина слоя жидкости, ρ и ν — ее плотность и кинематическая вязкость, g — ускорение силы тяжести, и будем использовать безразмерные переменные.

Проведем ось x в направлении максимального наклона подстилающей поверхности (это имеет смысл, поскольку в дальнейшем рассматривается только слабо возмущенная плоская подстилающая поверхность), ось y направим горизонтально, перпендикулярно оси x и ось z — вверх по нормали к осям x и y. Пусть θ — наклон подстилающей поверхности, $z=b(x, y)$ и $z=f(x, y)$ — уравнения подстилающей и свободной поверхностей, $h(x, y)=f(x, y)-b(x, y)$ — толщина слоя, U, V, W — компоненты скорости жидкости, P — давление. Кроме того, для какого-либо элемента поверхности $z=a(x, y)$ с единичным нормальным вектором $\mathbf{n}$ и касательными векторами $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$, которые в дальнейшем выбираются равными

$$\mathbf{n}=(-a_x, -a_y, 1)/\sqrt{1+a_x^2+a_y^2}$$
$$\mathbf{t}_1=(1, 0, a_x)/\sqrt{1+a_x^2}, \quad \mathbf{t}_2=(0, 1, a_y)/\sqrt{1+a_y^2}$$

положим: Σ — проекция вектора вязких напряжений на нормаль n, $\mathbf{T}$ — проекция вектора вязких напряжений на касательную плоскость и T_1 и T_2 — проекции вектора вязких напряжений на касательные векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ $(\mathbf{T}=T_1\mathbf{t}_1+T_2\mathbf{t}_2)$.

Поведение слоя жидкости управляется уравнениями неразрывности и сохранения импульса в приближении Стокса

$$\begin{gathered} U_x+V_y+W_z=0 \\ -P_x+\Delta U+\sin\theta=0, \quad -P_y+\Delta V=0, \quad -P_z+\Delta W-\cos\theta=0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

и граничными условиями

$$U=V=W=0, \quad z=b(x, y) \tag{1.2}$$

$$T_1=T_2=-P+\Sigma=0, \quad z=f(x, y) \tag{1.3}$$

Эволюция свободной и подстилающей поверхностей определяется кинематическими уравнениями

$$\begin{gathered} f_t+Uf_x+Vf_y=W, \quad z=f(x, y) \\ b_t+Ab_x+Bb_y=C, \quad z=b(x, y) \end{gathered} \tag{1.4}$$

В последнем A, B, C — компоненты вектора скорости эрозии $\mathbf{E}$. Предполагается, что скорость эрозии $\mathbf{E}$ направлена по нормали к подстилающей поверхности: $\mathbf{E}=-E\mathbf{n}$, и что модуль вектора скорости эрозии E пропорционален модулю вектора касательного напряжения T: $E=\varepsilon T$ $(z=b(x, y))$, где ε — некоторый положительный параметр. Переходя к новому масштабу времени $\tau=\varepsilon t$, имеем окончательную форму кинематического уравнения для подстилающей поверхности

$$b_\tau+T\sqrt{1+b_x^2+b_y^2}=0, \quad z=b(x, y) \tag{1.5}$$

Как правило, скорость эрозионного изменения подстилающей поверхности много меньше характерной скорости изменения свободной. Отношение этих скоростей определяется параметром ε, причем малость отношения соответствует условию $\varepsilon \ll 1$ (это легко проверяется для основного течения). Откуда следует, что свободная поверхность в своем «быстром» времени успевает подстраиваться под «медленно» меняющуюся подстилающую поверхность — успевает прийти в стационарное по отношению к подстилающей поверхности состояние, разумеется, если оно устойчиво в быстром времени. Другими словами, сначала по уравнениям (1.1) и (1.4) и граничным условиям (1.2) и (1.3) при заданной подстилающей поверхности следует найти стационарную форму свободной поверхности и стационарное распределение скорости и давления в жидкости и проверить устойчивость такого стационарного решения в быстром времени. Затем по уравнению (1.5) можно определить медленную эволюцию формы подстилающей поверхности.

Основное — невозмущенное течение предполагается однородным по x и y. Тогда имеем (все характеристики основного течения отмечаются верхним индексом 0)

$$f_\tau^\circ=b_\tau^\circ=-\sin\theta, \quad h_\tau^\circ=0 \quad (h^\circ\equiv 1)$$
$$U^\circ=\sin\theta[(z-b^\circ)={}^1/_2(z-b^\circ)^2], \quad V^\circ=W^\circ=0, \quad P^\circ=\cos\theta(f^\circ-z)$$

Остальная часть работы посвящена исследованию в линейном длинноволновом приближении динамики поперечных и продольных возмущений основного течения. Отметим, что для рассматриваемого течения сильновязкой несжимаемой жидкости неустойчивость можно ожидать, если только подстилающая поверхность способна изменяться, например под действием эрозии. Действительно, если однородная подстилающая поверхность предполагается неизменяемой, то тогда продольные возмущения устойчивы [4], а добавление поперечных возмущений в силу теоремы Сквайра для течений со свободной поверхностью [5] лишь усиливает устойчивость. В то же время при изменяемой подстилающей поверхности теорема Сквайра, вообще говоря, неверна.

Перейдем в уравнениях (1.1), (1.4), (1.5) и граничных условиях (1.2), (1.3) от возмущенных величин к возмущениям и, предполагая малость возмущений, линеаризуем уравнения и граничные условия и снесем граничные условия на невозмущенные поверхности. Для этого представим характеристики возмущенного течения в виде сумм соответствующих характеристик основного течения и возмущений

$$f=f^\circ+\alpha,\quad b=b^\circ+\beta,\quad h=h^\circ+\eta\quad (\eta=\alpha-\beta)$$
$$U=U^\circ+u,\quad V=V^\circ+v,\quad W=W^\circ+w,\quad P=P^\circ+p$$

Кроме того, ограничимся для простоты длинноволновым приближением, когда рассматриваются возмущения с длинами волн, много большими единицы: как показывают точные вычисления, коротковолновые возмущения быстро затухают и длинноволновое приближение вносит слабые искажения в границы устойчивости.

2. Рассмотрим случай поперечных возмущений, когда подстилающая поверхность и течение жидкости однородны в продольном направлении — вдоль оси x. Тогда уравнение неразрывности — первое уравнение (1.1) — имеет вид $V_y+W_z=0$ и потому можно перейти от компонент скорости V, W к поперечной функции тока Ψ: $V=\Psi_z$, $W=-\Psi_y$. Тогда уравнения сохранения импульса — последние три уравнения (1.1) — и граничные условия (1.2), (1.3) примут следующий вид:

$$U_{zz}+U_{yy}+\sin\theta=0$$
$$-P_y+\Psi_{zzz}+\Psi_{zyy}=0,\quad -P_z-\Psi_{zzy}-\Psi_{yyy}-\cos\theta=0 \tag{2.1}$$

$$U=\Psi=\Psi_z=0,\quad z=b(y) \tag{2.2}$$

$$U_z-f_yU_y=0,\quad z=f(y)$$

$$\frac{1-f_y^2}{1+f_y^2}(\Psi_{zz}-\Psi_{yy})-\frac{4f_y}{1+f_y^2}\Psi_{zy}=0,\qquad z=f(y) \tag{2.3}$$

$$P+2\left[\frac{1-f_y^2}{1+f_y^2}\Psi_{zy}-\frac{f_y}{1+f_y^2}(\Psi_{zz}-\Psi_{yy})\right]=0,\qquad z=f(y)$$

Для кинематических уравнений свободной и подстилающей поверхностей имеем

$$f_t+f_y\Psi_z+\Psi_y=0,\quad z=f(y) \tag{2.4}$$

$$b_\tau+|U_z-b_yU_y|=0,\qquad z=b(y) \tag{2.5}$$

Прежде всего заметим, что давление P и поперечная функция тока Ψ не зависят от продольной компоненты скорости U. Кроме того, эволюция свободной поверхности $z=f(y)$ также не зависит от продольной компоненты скорости U. Поэтому сначала можно независимо определить давление P, поперечную функцию тока Ψ и эволюцию свободной поверхности $z=f(y)$ и лишь затем найти продольную компоненту скорости U и эволюцию подстилающей поверхности $z=b(y)$.

Перейдем от возмущенных величин к возмущениям. Соответствующие линеаризованные уравнения (2.1) и граничные условия (2.2) и (2.3) для определения возмущения давления p и поперечной функции тока ψ имеют следующий вид:

$$-p_y+\psi_{zzz}+\psi_{zyy}=0, \quad -p_z-\psi_{zzy}-\psi_{yyy}=0$$
$$\psi=\psi_z=0, \quad z=b^\circ$$
$$\psi_{zz}-\psi_{yy}=0, \quad \cos\theta\alpha-p-2\psi_{zy}=0, \quad z=f^\circ$$

В длинноволновом приближении имеем

$$\psi=\cos\theta\alpha_y-[-{}^1/_2(z-b^\circ)^2+{}^1/_6(z-b^\circ)^3]$$

Кинематическое уравнение для свободной поверхности [2.4] примет вид $\alpha_t+\psi_y=0$, $z=f^\circ$. Откуда

$$\alpha_t=(\cos\theta/3)\alpha_{yy}$$

Это означает, что стационарное в быстром времени возмущение свободной поверхности, убывающее на бесконечности, является всюду нулевым при ненулевых возмущениях подстилающей поверхности и устойчиво. Другими словами, слабые поперечные возмущения подстилающей поверхности не вызывают возмущений свободной.

Для определения возмущений продольной компоненты скорости воспользуемся первым уравнением (2.1) и первыми граничными условиями (2.2) и (2.3), которые в линеаризованном варианте имеют вид

$$u_{zz}+u_{yy}=0$$
$$\sin\theta\beta+u=0, \quad z=b^\circ, \qquad -\sin\theta\alpha+u_z=0, \quad z=f^\circ$$

Откуда в длинноволновом приближении при стационарном (нулевом) возмущении свободной поверхности имеем

$$u^\circ=-\sin\theta\beta+\sin\theta\beta_{yy}[-(z-b^\circ)+{}^1/_2(z-b^\circ)^2]$$

Тогда кинематическое уравнение (2.5) для определения эволюции возмущений подстилающей поверхности примет вид

$$\beta_\tau=\sin\theta(\beta+\beta_{yy}) \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) линейно и потому достаточно рассмотреть его решения вида $\beta\sim e^{\lambda\tau-iky}$, где λ — инкремент и k — волновое число. Имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\lambda=\sin\theta(1-k^2)$$

Из него следует, что коротковолновые возмущения с волновыми числами $k>1$ устойчивы, а длинноволновые возмущения с волновыми числами $k<1$ неустойчивы. Дисперсионное уравнение согласуется с натурными данными [1], из которых следует, что возмущения подстилающей поверхности с длинами волн порядка или меньше толщины слоя сглаживаются, а реализуются возмущения с длинами волн много большими толщины слоя. Заметим, что критическое волновое число $k=1$, разделяющее области устойчивости и неустойчивости, не зависит от обычно плохо известного параметра ε.

3. Рассмотрим случай продольных возмущений, когда подстилающая поверхность и течение жидкости однородны в поперечном направлении — вдоль оси y. Тогда уравнение неразрывности — первое уравнение (1.1) — имеет вид $U_x+W_z=0$, и потому можно перейти от компонент скорости U, W к продольной функции тока Φ: $U=\Phi_z$, $W=-\Phi_x$. Тогда остальные уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) и кинематические уравнения (1.4), (1.5) примут вид

$$-P_x+\Phi_{zzz}+\Phi_{zxx}+\sin\theta=0, \quad -P_z-\Phi_{zxx}-\Phi_{xxx}-\cos\theta=0 \tag{3.1}$$

$$\Phi=\Phi_z=0, \quad z=b(x) \tag{3.2}$$

$$\frac{1-f_x^2}{1+f_x^2}(\Phi_{zz}-\Phi_{xx})-\frac{4f_x}{1+f_x^2}\Phi_{zx}=0, \qquad z=f(x)$$

$$P+2\left[\frac{1-f_x^2}{1+f_x^2}\Phi_{zx}-\frac{f_x}{1+f_x^2}(\Phi_{zz}-\Phi_{xx})\right]=0, \qquad z=f(x) \tag{3.3}$$

$$f_t+f_x\Phi_z+\Phi_x=0, \quad z=f(x) \tag{3.4}$$

$$b_\tau+\frac{1-b_x^2}{1+b_x^2}(\Phi_{zz}-\Phi_{xx})-\frac{4b_x}{1+b_x^2}\Phi_{zx}=0, \qquad z=b(x) \tag{3.5}$$

Перейдем от возмущенных величин к возмущениям. Соответствующие линеаризованные уравнения (3.1) и граничные условия (3.2), (3.3) для определения возмущений давления p и продольной функции тока φ имеют следующий вид:

$$-p_x+\varphi_{zzz}+\varphi_{zxx}=0, \qquad -p_z-\varphi_{zzx}-\varphi_{xxx}=0,$$
$$\varphi=\sin\theta\beta+\varphi_z=0, \quad z=b^\circ$$
$$-\sin\theta\alpha+\varphi_{zz}-\varphi_{xx}=0, \quad \cos\theta\alpha-p-2\varphi_{zx}=0, \quad z=f^\circ$$

В длинноволновом приближении

$$\varphi=-\sin\theta\beta(z-b^\circ)+1/2(\sin\theta\alpha-\cos\theta\alpha_x)(z-b^\circ)+{}^1/_6\cos\theta\alpha_x(z-b^\circ)^3$$

Линеаризованное кинематическое уравнение (3.4) для определения эволюции свободной поверхности имеет вид

$$\alpha_t+(\sin\theta/2)\alpha_x+\varphi_x=0, \qquad z=f^\circ$$

Откуда

$$\alpha_t+\sin\theta(\alpha-\beta)_x=(\cos\theta/3)\alpha_{xx}$$

Стационарное в быстром времени решение кинематического уравнения удовлетворяет уравнению

$$\alpha_x=\delta(\alpha-\beta), \qquad \delta=3\,\mathrm{tg}\,\theta \tag{3.6}$$

Из сравнения двух последних уравнений следует устойчивость стационарного решения.

Рассмотрим возмущения подстилающей поверхности вида $\beta\sim e^{-ikx}$. Тогда решение уравнения (3.6) также имеет вид $\alpha\sim e^{-ikx}$ и возмущения α и β связаны соотношением

$$\alpha=\frac{1-i(k/\delta)}{1+(k/\delta)^2}\beta$$

Откуда

$$|\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+(k/\delta)^2}}|\beta|, \qquad \arg\alpha=-\mathrm{arctg}\frac{k}{\delta}+\arg\beta$$

Другими словами, при фиксированной амплитуде возмущения подстилающей поверхности амплитуда возмущений свободной убывает с ростом волнового числа и имеет место фазовый сдвиг между возмущениями, который растет с ростом волнового числа.

Перейдем теперь от возмущенных величин к возмущениям в кинематическом уравнении (3.5) для определения эволюции подстилающей поверхности. В длинноволновом приближении, предполагая, что свободная поверхность стационарна в быстром времени, получим

$$\beta_\tau=\mu(\alpha-\beta), \quad \mu=2\sin\theta \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) и (3.7) образуют замкнутую систему для определения эволюции подстилающей поверхности и подстраивающейся к ней свободной. Эти уравнения сводятся к одному гиперболическому уравнению

$$\beta_{\tau x}+\mu\beta_x-\delta\beta_\tau=0 \tag{3.8}$$

для которого уравнения (3.6) и (3.7) являются уравнениями на характеристиках.

Рассмотрим для уравнения (3.8) решения вида $\beta \sim e^{i\gamma\tau - ikx}$, где $\gamma = \omega + i\lambda$ — комплексная частота (ω — действительная частота и λ — инкремент), k — волновое число. Имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\gamma}{\mu} = -\frac{k/\delta}{1+(k/\delta)^2} - i\frac{(k/\delta)^2}{1+(k/\delta)^2}$$

Для всех волновых чисел k фазовая скорость $\omega/k<0$ — продольные возмущения распространяются вверх по течению жидкости. Это обстоятельство связано с отмеченным выше фазовым сдвигом между возмущениями свободной и подстилающей поверхностей. Кроме того, для разных волновых чисел k фазовая скорость ω/k разная — имеет место дисперсия скоростей распространения возмущения. Более того, при $k=\delta$ групповая скорость $d\omega/dk=0$ — выделяется характерный пространственный масштаб. Если угол наклона подстилающей поверхности мал ($\delta \ll 1$), то характерное волновое число попадает в длинноволновую область, в которой и только в которой справедливы сформулированные выводы. Именно такова ситуация в геофизических приложениях и натурные данные [1] показывают, что наблюдаемые продольные возмущения подстилающей поверхности действительно имеют волновые числа порядка δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазо В. Л.* Самоорганизация ледникового рельефа // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. Вып. 2. С. 309–312.
2. *Engelund F., Fredsoe J.* Sediment ripples and dunes // Ann. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 13–37.
3. *Einstein A.* Die Ursache der Mäanderbildung der Flussläufe und des sogenannten Bearchen Gesetzes // Naturwiss. 1926. V. 14. P. 223–224.
4. *Yih C. S.* Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 3. P. 321–324.
5. *Yih C. S.* Stability of two-dimensional parallel flow for threedimensional disturbances // Quart. Appl. Math. 1955. V. 12. P. 434–435.

Москва

Поступила в редакцию 27.X.1987