МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1989

УДК 532.613.5:536.24

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

САНОЧКИН Ю. В.

В данной работе находится точное явное решение уравнений Навье – Стокса и энергии для стационарного термокапиллярного движения несжимаемой жидкости в полупространстве, обусловленного неоднородным нагревом ее свободной поверхности. Оно моделирует, в частности, распределения скорости и температуры в некоторой области, примыкающей к центру нагрева, при воздействии на границу лучом лазера (пучком электронов). Тепловая и динамическая задачи в этом случае не разделяются и распределение скорости зависит от теплофизических свойств жидкости. Рассматриваются плоская и осесимметричная пространственная конвекция. На свободной поверхности жидкости задается только распределение теплового потока. Указанный подход является более естественным и лучше соответствует реальным условиям, чем постановка задачи в [1], где на границе ставилось условие на температуру. В широкой наиболее интересной области параметров полученное решение оказывается решением типа пограничного слоя. В соответствии со сказанным толщина вязкого слоя при этом зависит от числа Прандтля.

Внешне движение жидкости при симметричном нагреве напоминает течение в окрестности критической точки. В отсутствие возвратного потока свободная поверхность не деформируется термокапиллярной конвекцией. Движение на поверхности имеет характер растекания в противоположные стороны от линии в плоском или от точки в пространственном случаях. Вообще говоря, при симметричном нагреве температура – четная, а скорость конвекции на поверхности – нечетная функция координаты, отсчитываемой от плоскости или от оси симметрии. Явное решение удается построить для частного случая, когда плотность потока тепла на границе спадает по параболическому закону, меняя знак с удалением на некоторое расстояние от центра нагрева. Показано, что температура изменяется аналогичным образом, а касательная к поверхности компонента скорости оказывается линейной функцией координаты. Это не означает, однако, что область применимости решения ограничивается обязательно малой окрестностью линии или точки растекания. Фигурирующий в задаче масштаб длины l, который характеризует неоднородность нагрева, может иметь произвольное значение.

Решения с упомянутой выше линейной зависимостью скорости на границе жидкости от координаты изучались в [2, 3] в приближении пограничного слоя и, например, в [4] с использованием уравнений Навье – Стокса. Они носят альтернативный характер и не имеют достаточно убедительной физической трактовки. Представленные в [1] и данной работе результаты дают возможную физическую интерпретацию такого рода решений.

1. Двумерное установившееся термокапиллярное течение. Пусть жидкость занимает полубесконечную область $y>0$ и на ее свободную поверхность $y=0$ действует поток тепла плотности $q=q_0(1-x^2/2l^2)$. Картина конвекции, очевидно, будет симметрична относительно плоскости $x=0$. Температура жидкости T_∞ при $y\to\infty$ принимается за начало отсчета. На бесконечности тангенциальная к поверхности компонента скорости u исчезает, а нормальная v подлежит определению. Граничные условия задачи таковы [5]:

$$\rho\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\alpha'\frac{\partial T}{\partial x},\qquad \frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{q}{\varkappa},\qquad p=\mathrm{const},\qquad v=0,\qquad y=0 \tag{1.1}$$

$$u=0,\qquad T=T_\infty,\qquad y=\infty;\qquad u=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0,\qquad x=0$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, ν — кинематическая вязкость, α — коэффициент поверхностного натяжения, $\alpha' = -d\alpha/dT$, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности жидкости. Решение уравнений Навье — Стокса и энергии ищем в виде

$$u = xf'(y), \quad v = -f(y), \quad p = \rho F(y)$$

$$T - T_\infty = g(y) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}h(y) \tag{1.2}$$

Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\xi = ay, \quad f(y) = A\varphi(\xi), \quad h(y) = B\theta(\xi), \quad g(y) = B\vartheta(\xi),$$

$$F(y) = A^2\Phi(\xi) \tag{1.3}$$

$$a = \left(\frac{\alpha' q_0}{\varkappa\rho\nu^2 l^2}\right)^{1/4}, \qquad A = \nu a, \qquad B = \frac{q_0}{\varkappa a}$$

Здесь a^{-1} — характерная длина в направлении оси y, A, B — некоторые масштабные значения скорости и температуры соответственно. Используя (1.1) — (1.3), приходим к следующим краевым задачам для определения неизвестных функций:

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(\infty) = 0, \quad \varphi''(0) + \theta(0) = 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{P}}\theta'' + \varphi\theta' - 2\varphi'\theta = 2s\varphi''^2, \qquad \theta'(0) = -1, \qquad \theta(\infty) = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\mathrm{P}}\vartheta'' + \varphi\vartheta' = \frac{1}{\mathrm{P}(la)^2}\theta - \frac{4s}{(la)^2}\varphi'^2, \qquad \vartheta'(0) = -1, \qquad \vartheta(\infty) = 0 \tag{1.5}$$

$$\Phi' = -\varphi\varphi' - \varphi'', \quad \Phi(0) = 0 \tag{1.6}$$

Здесь P — число Прандтля, $s = \alpha' a/\rho c$ — безразмерный параметр, c — теплоемкость жидкости. Пропорциональные s члены (1.4), (1.5) обусловлены выделением тепла вследствие трения. Оценка для многих веществ при нормальных условиях дает $\alpha'/\rho c \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$ см. Таким образом, $s \ll 1$ и можно опустить в (1.4), (1.5) указанные члены. Если обозначить $\theta(0) = k^3(P)$, то решение (1.4) для φ и затем (1.6) приводят к следующим простым формулам:

$$\varphi = k(1 - e^{-k\xi}), \quad \Phi = {}^1/_2 k^2 (1 - e^{-2k\xi}) \tag{1.7}$$

Решение динамической задачи оказывается решением типа пограничного слоя, если выполняется условие

$$kla = k\left(\frac{\alpha' q_0 l^2}{\varkappa\rho\nu^2}\right)^{1/4} \gg 1 \tag{1.8}$$

Как и в течении Хименца, толщина динамического слоя не меняется с координатой $\delta \sim (ka)^{-1}$, а ее зависимость от вязкости и других величин видна из (1.3). Выражение (1.7) для φ (при $k=1$) получено впервые, видимо, в [2]. В рассматриваемом случае k имеет разные значения для жидкостей с различными тепловыми характеристиками.

Уравнение (1.4) для θ с учетом (1.7) сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению и при произвольном P простого явного решения не имеет. Однако оно допускает решение в виде ряда экспонент

$$\theta(\eta) = de^{-\mathrm{P}\eta}\sum_{m\geqslant 0} d_m e^{-m\eta}, \qquad \eta = k\xi, \qquad d_0 = 1$$

$$d_m=(-1)^m\frac{P^m}{m!}\frac{(P-2)(P-1)\dots(P+m-3)}{(P+1)(P+2)\dots(P+m)},\qquad m\geqslant 1 \tag{1.9}$$

$$d=\left[k\sum_{m\geqslant 0}(P+m)\,d_m\right]^{-1}$$

С помощью (1.9) получается выражение для k

$$k^4=\sum_{m\geqslant 0}d_m\Big/\sum_{m\geqslant 0}(P+m)\,d_m \tag{1.10}$$

Вычисленные по формуле (1.10) для разных P значения параметра k приведены в табл. 1. При $P\to 0$ согласно (1.10) справедлива асимптотическая формула $k=(3P)^{-1/4}$. Следовательно, для указанного случая имеем $\delta\sim P^{1/4}$, $\theta(0)=0{,}439P^{-3/4}$. При P=1, 2 ряд (1.9) обрывается и получаются простые решения

$$\theta=\frac{1}{2k_1}e^{-\eta}\left(1+\frac{1}{2}e^{-\eta}\right),\quad k_1=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4};\quad \theta=\frac{1}{2k_2}e^{-2\eta},\quad k_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$$

При $P\leqslant 1$ пользоваться (1.9) для вычисления θ удобно, практически достаточно удерживать один, максимум два первых члена ряда. Напротив, при $P\gg 1$ коэффициенты d_m с ростом m вначале увеличиваются по абсолютной величине и лишь при $m>P$ уменьшаются и ряд начинает сходиться.

Для нахождения асимптотики θ при $P\to\infty$ сделаем следующее предположение, справедливость которого должна быть проверена после получения результата. Пусть область основного изменения θ соответствует интервалу изменения координаты длиной $\Delta\eta\sim P^{-1/2}$. В этом случае коэффициенты φ, φ' в уравнении (1.4) для θ можно с точностью до поправок порядка $\sim P^{-1/2}$ заменить первыми неисчезающими членами их разложений в ряд по координате. Если ввести переменную $\zeta=\eta\sqrt{P}$, то получается уравнение

$$\theta''+\zeta\theta'-2\theta=0$$

Его решение, представляющее искомую асимптотику θ при $P\gg 1$, имеет вид

$$\theta=\frac{1}{k\sqrt{P}}\theta_1(\zeta),\qquad \theta_1=(1+\zeta^2)\int_\zeta^\infty\frac{e^{-t^2/2}}{(1+t^2)^2}\,dt \tag{1.11}$$

Нетрудно исследовать поведение функции θ_1 и убедиться, что она описывает пограничный слой с толщиной $\Delta\zeta\leqslant 2$. Полагая в (1.11) $\zeta=0$, находим вместо (1.10) следующую асимптотическую формулу для k при

Таблица 1

P	k	$\vartheta(0)$	$\theta(0)$	l_T/l
10^{-3}	4.275	234,2	78,13	1,731
$5\cdot 10^{-3}$	2,865	70,17	23,50	1,728
10^{-2}	2,415	41.83	14,08	1,724
$5\cdot 10^{-2}$	1.644	12,76	4,444	1,694
10^{-1}	1,410	7.769	2,803	1,665
$5\cdot 10^{-1}$	1.039	2,717	1,120	1,558
1	0.9306	1.846	0,8059	1,513
5	0.7410	0.8606	0,4069	1,454
10	0,6757	0,6412	0,3085	1,442

$P \gg 1$:

$$k^4 = 0{,}625 P^{-1/2} \qquad (1.12)$$

В этом случае имеем $\delta \sim P^{1/8}$, $\theta(0) = 0{,}703\ P^{-3/8}$. Вычисленная с помощью (1.12) при $P=10$ величина $k=0{,}667$ оказывается весьма близкой к точному значению, приведенному в табл. 1.

Нетрудно написать в квадратурах решение (1.5). Оно выражается через θ и неполную гамма-функцию и оказывается весьма громоздким. Приведем решение для наиболее интересного случая, когда выполняется (1.8) и можно опустить правую часть (1.5)

$$\vartheta = \frac{1}{k} \exp(P - P \ln P)\, \gamma(P, Pe^{-\eta}) \qquad (1.13)$$

Здесь $\gamma(\alpha, x)$ — неполная гамма-функция [6]. При $P=1$ из (1.13) следует

$$\vartheta = \frac{e}{k}\left[1 - \exp(-e^{-\eta})\right]$$

Для γ-функции имеются разложения, удобные для исследования (1.13) при разных P [6]. При $P \leqslant 1$ решение представляется рядом, подобным (1.9). Из (1.13) при $P \to 0$ получается асимптотическая формула $\vartheta(0) = 1{,}316\ P^{-3/4}$. Если $P \gg 1$, то в разложении (1.13) в экспоненциальном ряду вместо множителя $\exp(-P\eta)$ появляется фактор $\exp\left[P(1 - e^{-\eta} - \eta)\right]$. Отсюда видно, что при значениях $\eta > P^{-1/2}$ величина ϑ быстро уменьшается. Проще, однако, найти асимптотику ϑ при $P \to \infty$, решая непосредственно (1.5). Рассуждая как при выводе (1.11), можно установить, что искомое решение дается интегралом вероятности

$$\vartheta = \frac{1}{k\sqrt{P}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt \qquad (1.14)$$

Отсюда при $P \to \infty$ получается $\vartheta(0) = 1{,}410\ P^{-3/8}$.

Таким образом, решения (1.9), (1.11), (1.13), (1.14) описывают тепловой пограничный слой толщиной $\delta_T \sim \delta/P$ при $P \leqslant 1$ и $\delta_T \sim \delta/\sqrt{P}$ при $P \gg 1$. На его границе температура близка к невозмущенной, и полный поток тепла в направлении оси y исчезает. Подводимое к жидкости тепло отводится вдоль ее поверхности. При этом конвективный вынос тепла в пределах динамического слоя преобладает, если $(kla)^2 P > \delta_T/\delta$.

В табл. 1 представлены в зависимости от P значения функций ϑ, θ на границе жидкости. Если в формуле для q заменить q_0 на $B\vartheta(0)$ и l на $l_T(P) = l[\vartheta(0)/\theta(0)]^{1/2}$, то получим в соответствии с (1.2), (1.3) распределение температуры на свободной поверхности. Отношение (l_T/l) из-за конвекции больше единицы и изменяется в пределах от $\sqrt{2}$ при $P \to \infty$ до $\sqrt{3}$ при $P \to 0$. Максимальное значение безразмерной температуры в центре нагрева $\vartheta(0)$ согласно табл. 1 тем больше, чем меньше P. Сказанное не означает, однако, что при одинаковом нагреве в жидком металле температура будет выше, чем, скажем, в жидкости с $P \gg 1$. Проверим это. Пусть две жидкости отличаются только коэффициентами теплопроводности, а остальные характеристики у них одинаковые. Тогда согласно (1.3) $B_1/B_2 = (P_1/P_2)^{3/4}$ и отношение максимальных размерных температур равно

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_2 - T_\infty} = \frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_2(0)}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{3/4}$$

Если $P_1 = 10^{-2}$, $P_2 = 10$, то указанное отношение составляет 0,37. Характерную скорость конвекции в направлении оси x можно определить соотношением $u_c = u(l, 0)$. Она не содержит масштаба длины и равна $u_c =$

$=k^2(\alpha' q_0/\varkappa\rho)^{1/2}$. Скорость жидкости на поверхности и характерная скорость конвекции в направлении оси y даются формулами $u(x, 0)=u_c x/l$ и $kA=-(\nu u_c/l)^{1/2}$ соответственно.

2. Пространственная осесимметричная конвекция. Можно построить аналогичное точное решение уравнений Навье — Стокса и энергии для пространственного однородного по азимуту течения. Плоскость $z=0$ цилиндрической системы координат совместим с границей жидкости, начало координат поместим в точке растекания. Для радиальной и осевой составляющих скорости потока сохраним прежние обозначения $v_r=u$, $v_z=v$. Распределение потока тепла, падающего на поверхность, и граничные условия даются теми же формулами, что и в плоском случае, с заменой $x\to r$, $y\to z$. Единственное отличие в форме решения по сравнению с (1.2) состоит в том, что для пространственного случая $v=-2f(z)$. В безразмерных переменных (1.3) вместо (1.4) при $s=0$ получается следующая однопараметрическая краевая задача:

$$\begin{gathered}\varphi'''+2\varphi\varphi''-\varphi'^2=0,\ \varphi(0)=\varphi'(\infty)=0,\ \varphi''(0)+\theta(0)=0\\ \frac{1}{\mathrm{P}}\theta''+2\varphi\theta'-2\varphi'\theta=0,\quad \theta'(0)=-1,\quad \theta(\infty)=0\end{gathered}\tag{2.1}$$

С помощью преобразования $\eta=k\xi$, $\varphi(\xi)=k\varphi_1(\eta)$, где $k^3=\theta(0)$, как в п. 1, система (2.1) расцепляется и для определения $\varphi_1(\eta)$ имеем

$$\varphi_1'''+2\varphi_1\varphi_1''-\varphi_1'^2=0,\ \varphi_1(0)=\varphi_1'(\infty)=0,\ \varphi_1''(0)=-1\tag{2.2}$$

В [1] была решена краевая задача для уравнения (2.2) с другими условиями $\varphi_1(0)=\varphi_1'(\infty)=0$, $\varphi_1'(0)=1$. Обозначим указанное решение $w(\eta)$. Нетрудно показать, что решение задачи (2.2) имеет вид $\varphi_1(\eta)=(1/\lambda)w(\eta/\lambda)$, где $\lambda=|w''(0)|^{1/3}=1{,}057$. Оно может быть представлено в виде ряда экспонент

$$\begin{gathered}\varphi_1=c_0-c_1e^{-2c_0\eta}-\ldots-c_ne^{-2nc_0\eta}-\ldots\\ 2n^2(n-1)c_0c_n+\sum_{m=1}^{n-1}(n-m)(2n-3m)c_{n-m}c_m=0,\quad n\geqslant 2\end{gathered}\tag{2.3}$$

Коэффициенты $\bar c_0$ и $\bar c_1$ соответствующего разложения для $w(\eta)$ были приближенно вычислены в [1]. Разделив их на λ, получаем значения $c_0=0{,}701$, $c_1=0{,}735$ в (2.3). Ряд (2.3) является знакопеременным и быстро сходится. Как и в плоском случае, асимптотическое разложение для Φ не содержит $\exp(-2c_0\eta)$ — главного члена асимптотики φ. Решение уравнения (2.1) для θ можно записать в виде ряда

$$\begin{gathered}\theta=ae^{-2\mathrm{P}c_0\eta}\sum_{n\geqslant 0}a_ne^{-2nc_0\eta},\qquad a_0=1\\ n(\mathrm{P}+n)c_0a_n+\mathrm{P}\sum_{m=1}^{n}(\mathrm{P}+n-2m)c_ma_{n-m}=0,\quad n\geqslant 1\end{gathered}\tag{2.4}$$

Удовлетворяя разложением (2.4) граничному условию и вычисляя $\theta(0)$, находим выражения для коэффициентов a и k

$$a=\Big[2c_0k\sum_{m\geqslant 0}(\mathrm{P}+m)a_m\Big]^{-1},\qquad k^4=\sum_{n\geqslant 0}a_n\Big/\Big(2c_0\sum_{n\geqslant 0}(\mathrm{P}+n)a_n\Big)\tag{2.5}$$

Из (2.5) получаются асимптотические формулы

$$k=\Big(2\mathrm{P}\sum c_n\Big)^{-1/4}=0{,}780\mathrm{P}^{-1/4},\qquad \theta(0)=0{,}474\mathrm{P}^{-3/4},\quad \mathrm{P}\to 0$$

Таблица 2

P	k	$\vartheta(0)$	$\theta(0)$	l_T/l
10^{-3}	4,386	162,8	84,35	1,389
$5\cdot10^{-3}$	2,937	48,81	25,34	1,388
10^{-2}	2,474	29,11	15,15	1,386
$5\cdot10^{-2}$	1,678	8,912	4,723	1,374
10^{-1}	1,433	5,445	2,942	1,360
$5\cdot10^{-1}$	1,040	1,919	1,125	1,306
1	0,9258	1,301	0,7934	1,281
5	0,7264	0,5835	0,3833	1,234
10	0,6568	0,4167	0,2834	1,213

Для определения ϑ в переменной η при $s=0$ вместо (1.5) получается следующая задача:

$$\vartheta''+2\mathrm{P}\varphi\vartheta'=\frac{2}{(kla)^2}\theta,\qquad \vartheta'(0)=-\frac{1}{k},\qquad \vartheta(\infty)=0 \tag{2.6}$$

Приведем решение (2.6) — аналог (1.13) — для случая $kal\gg1$

$$\vartheta=be^{-2\mathrm{P}c_0\eta}\sum_{n\geqslant0}b_ne^{-2nc_0\eta},\qquad b_0=1$$

$$b=\left[2c_0k\sum_{m\geqslant0}(\mathrm{P}+m)\,b_m\right]^{-1} \tag{2.7}$$

$$n(\mathrm{P}+n)\,c_0b_n+\mathrm{P}\sum_{m=1}^{n}(\mathrm{P}+n-m)\,c_mb_{n-m}=0,\qquad n\geqslant1$$

Из (2.7) при $\mathrm{P}\to0$ следует $\vartheta(0)=0{,}915\mathrm{P}^{-3/4}$. Вычисленные по формулам (2.5), (2.7) для разных P значения k, $\vartheta(0)$ и $\theta(0)$ приведены в табл. 2. Пользоваться полученными для θ и ϑ решениями, как и в плоском случае, целесообразно только при $\mathrm{P}\leqslant1$. Асимптотика θ и ϑ при $\mathrm{P}\gg1$ может быть найдена аналогично тому, как это было сделано в п. 1. Новая координата ζ определяется в пространственном случае формулой

$$\zeta=(2c\mathrm{P})^{1/2}\eta,\qquad c=2c_0\sum nc_n=0{,}817$$

Вместо (1.11) получается следующее выражение:

$$\theta=\frac{1}{k}(\pi c\mathrm{P})^{-1/2}\left\{e^{-\zeta^2/2}-\zeta\int_{\zeta}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt\right\} \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что формула (1.12) с незначительно отличающимся численным коэффициентом представляет асимптотику k при $\mathrm{P}\gg1$. Прежним остается, естественно, и предельное выражение для $\theta(0)$. Из сравнения с точными табличными значениями k видно, что формула (1.12) является удовлетворительным приближением уже при $\mathrm{P}=10$. Асимптотика решения (2.6) при $\mathrm{P}\gg1$ дается, как и в плоском случае, формулой (1.14), если заменить в ней P на $2c\mathrm{P}$. В частности, справедлива асимптотическая формула $\vartheta(0)=1{,}103\mathrm{P}^{-3/8}$.

3. **Заключение**. В рассмотренном решении с ростом x сначала поток тепла через поверхность, а затем и ее температура меняют знаки. Подобная ситуация возможна при неоднородном нагреве сильно летучей жидкости вследствие ее испарения. По-видимому, найденное решение может качественно описывать на некоторой длине конвекцию в этом случае. Но

можно и не рассматривать решение в области отрицательных тепловых потоков. При произвольном неоднородном симметричном нагреве жидкости всегда имеется некоторая окрестность длины l вокруг центра нагрева, где температура поверхности и тепловой поток спадают к периферии по параболическому закону. Можно ожидать, что полученное решение моделирует конвекцию в поверхностном слое в указанной области. В пользу этого свидетельствуют результаты численного исследования термокапиллярной конвекции в слое жидкости при локальном нагреве ее свободной поверхности потоком тепла с Гауссовым распределением [7]. Оказалось, что скорость течения на поверхности есть линейная функция координаты в значительной части области нагрева.

Найденные значения скорости и температуры, скажем, в сечении $x=l$ входят в граничные условия для решения «внешней» задачи. Из физических соображений ясно, что отвод тепла и движение жидкости при $x>l$ могут быть реализованы различными способами.

Точное решение в явном виде удается получить только при термокапиллярной конвекции без учета термогравитационной. В поле силы тяжести проявляются обычно оба вида конвекции. Согласно [8, 9] капиллярный механизм играет главную роль при толщинах нагреваемого снизу горизонтального слоя жидкости, не превышающих для многих веществ нескольких мм. Если толщина слоя удовлетворяет указанному условию и в то же время превышает толщины пограничных слоев δ и δ_T, определенные выше, то можно, по-видимому, говорить о применимости полученного решения к реальным процессам в нагреваемой жидкости. Кроме того, чисто капиллярная конвекция возможна в условиях невесомости. В этом случае жидкость в сосуде будет иметь плоскую свободную границу при угле смачивания 90° [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саночкин Ю. В.* О движении жидкости под воздействием поверхностной силы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 187–190.
2. *Crane L. J.* Flow past a stretching plate // ZAMP. 1970. Bd. 21. № 4. S. 645–647.
3. *Danberg J. E., Fansler K. S.* A non-similar moving-wall boundary-layer problem // Quart. Appl. Math. 1976. V. 34. № 3. P. 305–309.
4. *Brady J. F., Acrivos A.* Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier – Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 127–150.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 295 с.
7. *Саночкин Ю. В., Тухватуллин Р. С., Филиппов С. С.* Численное моделирование термокапиллярной конвекции в слое жидкости при локальном нагреве ее свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 108–113.
8. *Pearson J. R. A.* On convection cells induced by surface-tension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 5. P. 489–500.
9. *Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.

Москва

Поступила в редакцию 20.I.1988

[1] Когда рукопись статьи находилась уже в печати, появилась посвященная рассмотрению той же задачи работа C. L. Chan, M. M. Chen, and J. Mazumder «Asymptotic solution for thermocapillary flow at high and low Prandtl numbers due to concentrated surface heating». (J. of Heat Transfer, 1988. V. 110. № 1. P. 140–146). В ней приводятся результаты численного интегрирования уравнений (1.4), (2.1) и исследуется асимптотика θ и ϑ при $P\to 0$ и $P\to\infty$. Авторы не нашли аналитических решений (1.11), (2.8) при $P\gg 1$ и пользовались численными методами. Полученные в настоящей работе явные точные решения справедливы для произвольных значений чисел Прандтля.

Автор благодарен д-ру H. E. Huppert за ознакомление с указанной статьей.