

УДК 532.593

ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ТРЕХМЕРНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В КАНАЛЕ

АКСЕНОВ А. В., МОЖАЕВ В. В., СКОРОВАРОВ В. Е.,
ШЕРОНОВ А. А.

Приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования фазовой структуры пространственных внутренних волн в горизонтальном канале, заполненном экспоненциально стратифицированной жидкостью. Рассматриваются стационарные внутренние волны, возбуждаемые источником, равномерно движущимся по дну канала с жесткими крышками.

В рамках линейной теории получено дисперсионное соотношение, на основе которого исследуется фазовая структура внутренних волн в дальней зоне. Найдена зависимость границы области волновых возмущений от внутреннего числа Фруда F . В первом приближении при больших F получено уравнение линий постоянной фазы.

С помощью теневого прибора ИАБ-451 методом темного поля при вертикальном просвечивании получены фазовые картины внутренних волн. В области относительно больших F измерены углы зоны волновых возмущений. При больших F экспериментально получено подобие фазовых картин для первой пространственной моды.

1. Теоретический анализ. Рассмотрим задачу о фазовой структуре внутренних волн, возникающих при обтекании погруженного тела равномерным потоком идеальной, несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости постоянной глубины. В линейном приближении (случай малых возмущений) уравнения движения, неразрывности и условие несжимаемости можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & \rho_0 \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho_0 \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \\ \frac{d\rho}{dt} + w \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, & \rho_0(z) = \rho_0(0) \exp\left(-\frac{N^2 z}{g}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ось x направлена вдоль набегающего потока, движущегося с постоянной скоростью $U > 0$, начало прямоугольной системы координат выбрано на дне канала; ось z направлена вертикально вверх, противоположно направлению действия силы тяжести; g — ускорение силы тяжести; $\rho_0(z)$ — заданное невозмущенное распределение плотности в набегающем потоке, $N = \text{const}$ — частота Вайселя — Брента; u, v, w, p, ρ — возмущения компонент вектора скорости в направлении осей x, y, z , давления и плотности.

Систему уравнений (1.1) можно свести к одному уравнению для определения вертикальной составляющей скорости w . В безразмерной форме оно имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\Delta - \frac{F_0^2}{F^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{1}{F^2} \Delta_h \right] w = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$F = \frac{U}{NH}, \quad F_0 = \frac{U}{(gH)^{1/2}}$$

где F и F_0 — внутреннее и обычное числа Фруда. В качестве линейного масштаба взята высота канала H ; за масштаб времени принято отношение H/U ; масштаб скорости взят равным скорости набегающего потока U .

В приближении Буссинеска, справедливом при $F_0^2/F^2 \ll 1$, уравнение (1.2) записывается в виде

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \Delta + \frac{1}{F^2} \Delta_h \right) w = 0 \quad (1.3)$$

На дне и верхней границе канала имеем следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad z = 0; 1 \quad (1.4)$$

Может показаться, что граничное условие (1.4) противоречит линеаризованному условию обтекания тела на дне канала, согласно которому $w \neq 0$ при $z = 0$. Однако данная задача может быть сведена к задаче с однородным граничным условием (1.4) и отличной от нуля правой частью в уравнении (1.3).

В дальнейшем будет рассматриваться задача о нахождении фазовой картины волновых движений на больших расстояниях от тела.

Согласно методу Лайтхилла [1], фазовую структуру волновых возмущений при больших расстояниях от тела можно найти, зная только дисперсионное соотношение. Частные решения уравнения (1.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.4), ищем в виде $w = \sin(n\pi z) \exp[i(k_1 x + k_2 y - \Omega t)]$, где $n = 1, 2, \dots$. Тогда из (1.3) получаем

$$G^{(n)} = (\Omega - k_1)^2 (k_1^2 + k_2^2 + n^2 \pi^2) - F^{-2} (k_1^2 + k_2^2) = 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение для внутренних волн в канале имеет бесконечное число ветвей $G^{(n)}(k_1, k_2, \Omega) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Это означает, что волновая картина вдали от тела является суперпозицией волновых картин, определяемых каждой ветвью дисперсионного соотношения.

Из (1.5) можно найти вектор групповой скорости для волновой системы с номером n

$$\mathbf{V}_g^{(n)} = - \left(\frac{\partial G^{(n)}}{\partial \Omega} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial G^{(n)}}{\partial k_1}, \frac{\partial G^{(n)}}{\partial k_2} \right\} \quad (1.6)$$

который указывает направление, где существуют волны с волновым вектором $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$ при больших расстояниях от тела.

Зафиксируем число n и перейдем к новым переменным k и φ ($k \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$), таким, что $k_1 = k \cos \varphi$, $k_2 = k \sin \varphi$. Тогда из (1.5), (1.6) получаем, что в стационарном случае (частота $\Omega = 0$)

$$k^2 = F^{-2} [(\cos \varphi)^{-2} - \chi_n^{-2}], \quad \chi_n = (n\pi F)^{-1} \quad (1.7)$$

$$V_{gx}^{(n)} = 1 - \chi_n^{-2} \cos^4 \varphi, \quad V_{gy}^{(n)} = -\chi_n^{-2} \sin \varphi \cos^3 \varphi$$

Отметим, что из (1.7) следует неравенство $V_{gx}^{(n)} \geq 0$, т. е. волновые возмущения вдали от тела распространяются только вниз по потоку.

Для данного номера n область, занятая волновыми возмущениями, определяется максимальным значением угла между вектором $V_g^{(n)}$ и осью x . Введем обозначение

$$f^{(n)}(\varphi) = \frac{\sin \varphi \cos^3 \varphi}{\kappa_n^2 - \cos^4 \varphi} \quad (1.8)$$

Для волнового вектора \mathbf{k} вектор групповой скорости составляет с осью x угол θ , определяемый соотношениями

$$\operatorname{tg} \theta = f^{(n)}(\varphi), \quad (\cos \varphi)^{-2} - \kappa_n^{-2} \geq 0, \quad \varphi < \pi/2 \quad (1.9)$$

Область волновых движений для волновой системы с номером n ограничена максимальным углом $2\theta_m^{(n)}$.

Рассмотрим случай $\kappa_n < 1$. При этом функция $f^{(n)}(\varphi)$ положительна и монотонно убывает на интервале $\arccos \kappa_n \leq \varphi < \pi/2$ и

$$\theta_{1m}^{(n)} = \arcsin \kappa_n \quad (1.10)$$

Если $\kappa_n > 1$, то функция $f^{(n)}(\varphi)$ положительна и имеет максимум в точке φ_1 , где $\cos \varphi_1 = \kappa_n [2 - (4 - 3\kappa_n^{-2})^{1/2}]^{1/2}$. В этом случае

$$\theta_{2m}^{(n)} = \operatorname{arccotg} \{ {}^{18/27} \kappa_n^4 [8 - 9\kappa_n^{-2} + (4 - 3\kappa_n^{-2})^{1/2}] \}^{1/2} \quad (1.11)$$

В рассматриваемом случае волновых систем может быть только конечное число. Это число определяется номером n_0 , таким, что $n_0 < \kappa_1 < n_0 + 1$.

Величина $\theta_{2m}^{(n)}$, определяемая (1.11), растет с увеличением номера n . Поэтому значение полуугла, в котором сосредоточены рассматриваемые системы волн, есть $\theta_{2m} = \theta_{2m}^{(n_0)}$. При увеличении номера n значение $\theta_{1m}^{(n)}$, определяемое (1.10), убывает. Максимальное значение полуугла, в котором сосредоточено бесконечное число соответствующих волновых систем, равно $\theta_{1m} = \theta_{1m}^{(n_0+1)}$. На больших расстояниях от тела волновые возмущения расположены вниз по потоку и сосредоточены внутри угла $2\theta_m = 2 \max(\theta_{1m}, \theta_{2m})$.

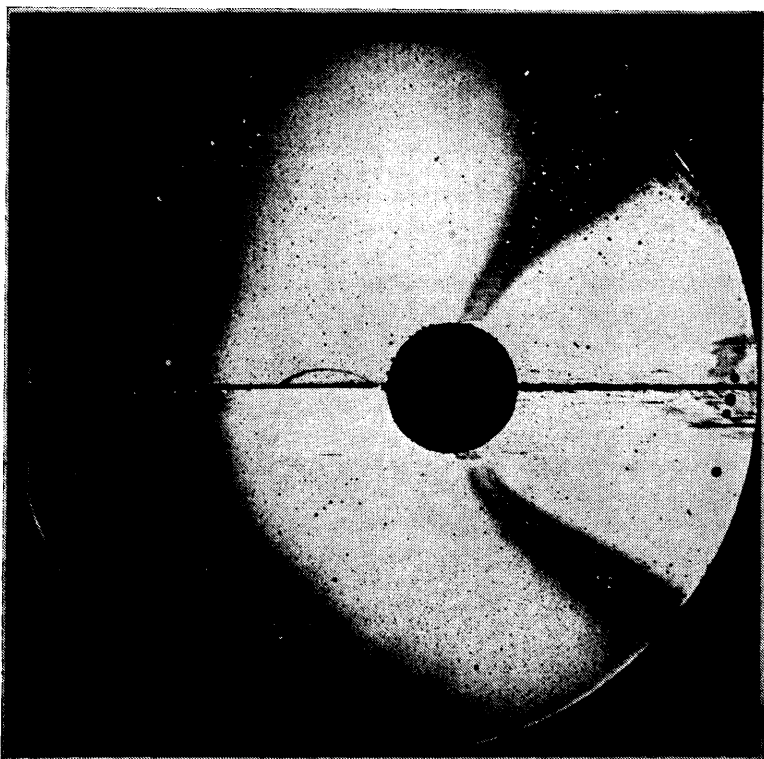
Отметим, что формулы (1.10), (1.11) совпадают с формулами работы [2], полученными для задачи об обтекании неровностей поверхности Земли изотермической атмосферой, если перейти к приближениям несжимаемой жидкости и Бруссинеска и положить $\mu_n = n\lambda$.

Линии постоянной фазы $\mathbf{kx} = A = \text{const}$ для волновой системы с номером n задаются параметрически выражением

$$\mathbf{x}/A = \mathbf{V}_g^{(n)} / (\mathbf{kV}_g^{(n)}), \quad \mathbf{x} = \{x, y\} \quad (1.12)$$

где волновой вектор \mathbf{k} удовлетворяет дисперсионному соотношению. Отметим, что для волновых систем с номерами $n < n_0$ линии постоянной фазы имеют точку возврата и качественно похожи на линии постоянной фазы корабельных волн [1]. В этом случае волны с волновым вектором, направленным вдоль оси x , имеют максимальную длину волны. В точке возврата линии постоянной фазы значение волнового вектора соответствует точке перегиба дисперсионной кривой в плоскости k_1, k_2 . Для волновых систем с номерами $n > n_0$ дисперсионные кривые не имеют точек перегиба и линии постоянной фазы представляют собой кривые, выпуклые вниз, которые горизонтально пересекают ось x и имеют наклонную асимптоту. При $\kappa_n \ll 1$ линии постоянной фазы в первом приближении по малому параметру κ_n в переменных $x^* = x/(A\kappa_n)$, $y^* = n\lambda y/A$ задаются выражением, не зависящим от внутреннего числа Фруда

$$y^* = [(x^*)^2 - 1]^{1/2} \quad (1.13)$$



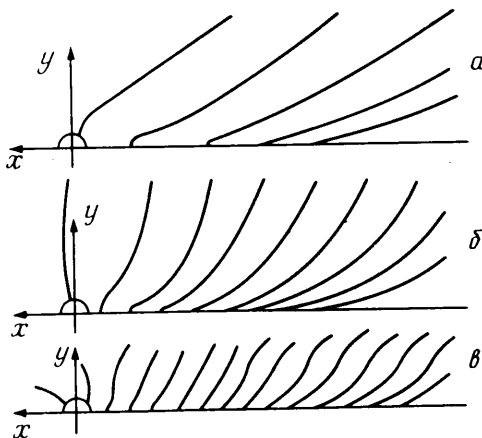
Фиг. 1

2. Экспериментальные результаты. Исследования фазовой структуры внутренних гравитационных волн, генерируемых полусферой, движущейся по дну горизонтального канала линейно стратифицированной жидкости, проводились в лабораторном бассейне размерами $1 \times 0,35 \times 0,4$ м³. Линейная стратификация рабочей жидкости осуществлялась заполнением лабораторного бассейна водным раствором поваренной соли переменной концентрации. Для визуализации линий нулевых градиентов оптического пути в просвечиваемом слое рабочей среды применялся метод темного поля с использованием теневого прибора ИАБ-451. Для вертикального просвечивания горизонтальный пучок света из осветительной части теневого прибора с помощью плоского зеркала разворачивался на 90° и направлялся вертикально вверх. Проходя через неподвижное оптическое окно в дне бассейна, слой жидкости и подвижное оптическое окно, рабочий пучок света после отражения от второго плоского зеркала снова становился горизонтальным и попадал в приемную часть теневого прибора. Использование верхнего подвижного оптического окна вызвано необходимостью устранения волновых возмущений на поверхности жидкости. С этой целью подвижное окно своей нижней поверхностью касалось поверхности жидкости. Оптическая схема установки позволяла одновременно визуализировать поле диаметром 20 см.

В качестве источника возбуждения пространственных внутренних волн использовались полусферы, которые с помощью связанной с ними нити протягивались по дну бассейна с постоянной скоростью. Для выяснения влияния нити на картину возмущений проводились специальные исследования, при которых нить подклеивалась к основанию полусферы в разных местах. При этом оказалось, что картина волновых возмущений за полусферой не менялась и оставалась поперечно-симметричной относительно оси движения, проходящей через центр основания полусферы. И лишь

небольшое искажение наблюдалось на передней кромке полусферы вблизи нити. Поэтому основные измерения проводились с нитью, проходящей через центр основания полусферы.

Предварительными измерениями эффективности возбуждения отдельных мод в канале для плоского случая было установлено, что наиболее эффективное возбуждение волновой моды в канале происходит при движении источника вдоль линии нулевых вертикальных смещений частиц [3]. Поэтому при движении источника по дну канала преимущественно возбуждаются моды нечетных номеров. Кроме того, при вертикальном просвечивании вклад в интегральную картину возмущений от мод с четными номерами равен нулю, а от мод с нечетными номерами составляет $1/n$ ($n=1, 3, 5 \dots$) по отношению к первой моде при условии равенства амплитуд. Нечетные моды с номерами $n \geq 3$ практически возбуждаются только при малых числах Фруда. Поэтому все приведенные ниже результаты будут соответствовать первой волновой пространственной моде, когда распределение вертикального смещения частиц имеет вид $\xi = A_0(x, y) \sin(\pi z/H)$, где $A_0(x, y)$ — максимальное смещение частиц на уровне $z=H/2$. В этом случае наблюдаемая в теновом приборе интегральная (по оси z) волновая картина будет однозначно соответствовать реальной фазовой картине.



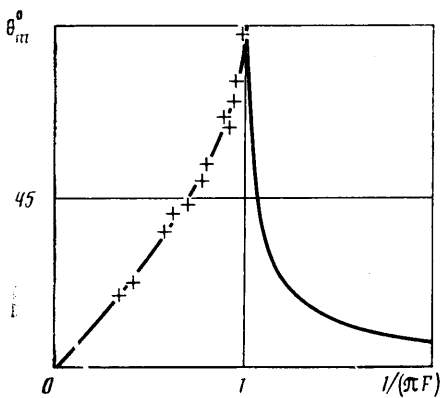
Фиг. 2

С целью более детального выявления структуры волновых возмущений проводились регистрации линий нулевых градиентов по двум взаимно перпендикулярным направлениям: вдоль направления движения источника (ось x) и вдоль оси y .

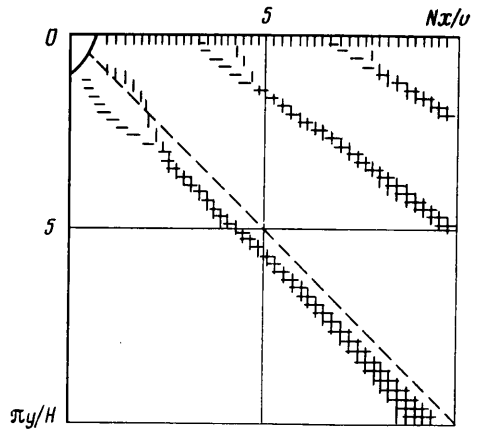
На фиг. 1 показана фотография поля возмущения вблизи полусферы диаметром 3,4 см при ее движении справа налево со скоростью $U=4,2$ см/с в канале высотой $H=5$ см, заполненном линейно стратифицированной жидкостью с частотой плавучести $N=1,7$ рад/с. Светлая область вокруг источника возмущения соответствует кольцевому возмущению, вызванному вытеснением жидкости над полусферой [2, 4]. А темные линии, идущие симметрично от полусферы, являются линиями нулевого градиента вдоль оси движения. Вертикальный отрезок этой линии вблизи полусферы соответствует кольцевому возмущению, а затем она выходит на линию, идущую вдоль первого «горба» волнового возмущения.

Для визуализации волновой картины возмущений в максимально возможной пространственной области линия движения источника была смещена на край окна и при каждом проезде проводилось последовательное фотографирование отдельных фрагментов поля. Картины линий нулевых градиентов вдоль оси движения, восстановленные таким способом, показаны на фиг. 2. Волновая картина на фиг. 2, а соответствует случаю, когда внутреннее число $F > 1/\pi$. Линии нулевых градиентов при движении источника со значением числа $F \approx 1/\pi$ показаны на фиг. 2, б, а случаю $F < 1/\pi$ соответствует фиг. 2, в.

Рассмотрим сначала режим движения источника, при котором число $F > 1/\pi$. В [3] было показано, что для плоских внутренних волн в канале при $F > 1/\pi$ нет волновых возмущений. При стремлении внутреннего числа Фруда к значению $1/\pi$ волновое число стремится к нулю и при этом фазовая и групповая скорости достигают максимального значения $U_m = NH/\pi$. В пространственном случае волны могут распространяться под углом



Фиг. 3



Фиг. 4

к направлению движения источника. Это связано с тем, что в стационарном случае фазовая скорость плоской волны, распространяющейся под углом φ к вектору скорости U источника, равна $U \cos \varphi$. А тогда для любого значения $U > U_m$ найдется угол φ , при котором $U \cos \varphi < U_m$. Поэтому пространственная область за полусферой будет заполнена плоскими волнами, модуль волновых векторов которых будет однозначно связан с их направлениями. В пространственном спектре плоских волн будут отсутствовать волны с направлениями волновых векторов от нуля до некоторого предельного угла φ_m , определяемого равенством $U \cos \varphi_m = U_m$. Типичная картина волновых возмущений за полусферой в рассматриваемом режиме показана на фиг. 2, а. При удалении от источника вниз по потоку вдоль прямой, параллельной оси движения, наблюдается уменьшение длины волны возмущений и волновой вектор поворачивается к оси y . Согласно (1.7), такой характер волнового возмущения обусловлен уменьшением значения составляющей групповой скорости вдоль оси y с ростом абсолютного значения волнового вектора. Линии нулевого градиента на фиг. 2, а совпадают с линиями горбов и впадин, которые асимптотически стремятся к прямым, образующим с осью x угол θ_m ($\theta_m = \pi/2 - \varphi_m$), где $2\theta_m$ — предельный угол, внутри которого сосредоточено все волновое возмущение. Наиболее быстро на такую прямую выходит линия первого горба, идущая от источника. Именно по этой линии определяется предельный полуугол θ_m как угол между осью x и прямой, проходящей через центр основания полусферы и касающейся линии горба.

Экспериментальные результаты исследования зависимости угла θ_m от безразмерного параметра κ_1 показаны точками на фиг. 3. Там же для сравнения нанесена теоретическая зависимость [5]. Как видно, экспериментальные результаты хорошо подтверждают вывод линейной теории о зависимости предельного полуугла θ_m от κ_1 для первой моды ($n=1$) в области $\kappa_1 \leq 1$.

В области значений безразмерного параметра $\kappa_1 \ll 1$ наблюдается подобие волновых картин: в безразмерных координатах xN/U , $\pi y/H$ все волновые картины совпадают [4]. Это подобие является асимптотическим при стремлении κ_1 к нулю, но, как было установлено в экспериментах, уже начиная со значения $\kappa_1 = 0,5$ волновые картины в пределах точности измерения становятся подобными. Все экспериментальные результаты для значений параметра κ_1 от 0,5 до 0,3 (высоты каналов от 5 до 10 см, диапазон частот плавучести от 1,0 до 1,7 рад/с, скорость источника от 4 до 8 см/с) для различных диаметров полусфер от 1,2 до 4,6 см, построенные в безразмерных координатах, показаны на фиг. 4. Области, заштрихованные горизонтальными линиями, соответствуют разбросу эксперименталь-

ных линий нулевого градиента вдоль оси движения, а области, заштрихованные вертикальными линиями, отражают разброс линий нулевого градиента вдоль оси y . Области пересечения линий нулевых градиентов во взаимно перпендикулярных направлениях дают положения линий горбов и впадин волнового возмущения. Вблизи полусферы и вблизи оси движения за движущейся полусферой линии нулевых градиентов (вдоль оси x и вдоль оси y) расходятся. Раздвоение линии первого горба вызвано влиянием кольцевого возмущения вблизи полусферы, а раздвоение других линий связано с влиянием следа за полусферой.

На фиг. 4 хорошо видно, что линия, соответствующая первому горбу, довольно быстро выходит на прямую, проходящую через начало координат. Эта прямая, сама являющаяся асимптотой, в безразмерных координатах при стремлении κ_1 к нулю асимптотически стремится к прямой, идущей под углом 45° (штриховая прямая). Экспериментальная асимптотическая прямая при указанных выше параметрах практически мало отличается от предельной теоретической прямой.

На фиг. 2, б показан случай, когда волновое возмущение заполняет всю область за полусферой. Максимальный угол θ_m составляет $\approx 90^\circ$, а параметр $\kappa_1 \approx 1$.

Типичная волновая картина для области малых чисел Фруда ($\kappa_1 > 1$) показана на фиг. 2, в ($\kappa_1 = 2,2$). В этом случае в спектре плоских волн первой моды уже нет ограничения на направление волнового вектора ($0 \leq \varphi < \pi/2$), но есть ограничение на абсолютное значение волнового вектора согласно (1.7). В волновой картине за полусферой отсутствует длинноволновая часть спектра плоских волн с волновыми числами от нуля до значения $k_m = \pi(\kappa_1^2 - 1)^{1/2}/H$. Плоская волна с волновым числом k_m соответствует волне с волновым вектором, направленным вдоль оси x ($\varphi = 0$). В этой области максимальный угол θ_m , в котором можно обнаружить волны за движущимся источником, согласно (1.11), начинает падать с увеличением параметра κ_1 и стремится к нулю при стремлении κ_1 к бесконечности. Экспериментально не удается по наблюдаемой картине поля возмущений определить этот угол для первой моды. В этом режиме, по-видимому, нельзя пренебрегать вкладом высших мод.

Авторы выражают благодарность А. Т. Онуфриеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. Дородницын А. А. Некоторые задачи обтекания неровностей поверхности земли воздушным потоком // Тр. Главн. геофиз. обсерватории. 1940. Вып. 31(8). С. 3-41.
3. Аксенов А. В., Кириллов В. П., Можеев В. В. и др. Структура внутренних волн в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 106-110.
4. Бежанов К. А., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком слоистой жидкости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 2. С. 303-306.
5. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие при нестационарном движении источника в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 122-130.

Москва

Поступила в редакцию
6.V.1987