

УДК 532.592

## ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ОБЛАСТЬЮ АНОМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СКОРОСТЬЮ

НЕСТЕРОВ С. В., НИКИТИН Н. Л.

Плоская задача о возбуждении волн в тяжелой бесконечно глубокой однородной жидкости при поступательном движении пульсирующего источника впервые была рассмотрена в [1]. В [2] получено решение этой задачи для равномерно движущейся области аномального давления, величина которого гармонически изменяется во времени. В [3, 4] изучено влияние конечной глубины и начальных условий на характеристики волн; полученное решение включало неустановившиеся волны за счет начала движения. Генерация поверхностных волн движущейся прямоугольной областью периодически изменяющихся давлений изучена в [5]. Оказалось, что в полосе, параллельной скорости потока и имеющей ширину прямоугольника давлений, волновое поле описывается формулами, совпадающими с решением плоской задачи.

Плоская задача о движении вдоль свободной поверхности двухслойной жидкости области аномального давления, интенсивность которого изменяется по гармоническому закону, рассмотрена в [6] и позднее – в [7]. Показано, что кроме поверхностных могут также возбуждаться до четырех систем внутренних волн. Для внутренних волн существует критическое значение скорости, при котором происходит их резонансное усиление. Величина скорости зависит от соотношения между скоростью, частотой, значениями глубин и плотностей жидкостей.

Экспериментальное исследование поверхностных волн, генерирующихся при равномерном движении области переменных давлений, выполнено в [8]. Сопоставление с теоретическими результатами показало, что вблизи критической скорости для описания резонансно усиливающихся систем волн необходимо учитывать нелинейные эффекты. Эксперименты по генерации внутренних волн в двухслойной жидкости при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра приведены в [9]. Показано, что вблизи критической скорости возбуждающиеся внутренние волны на границе раздела вода – керосин хорошо описываются линейной теорией с учетом вязкости и поверхностного натяжения.

Во всех упомянутых выше работах не рассмотрен случай, когда источник возмущения совершает поступательное движение с периодически изменяющейся скоростью. Ниже обсуждается именно этот случай. Первое приближение решения задачи о генерации внутренних волн в двухслойной жидкости, учитывающее амплитуду изменений скорости источника возмущений, заданной в виде  $c + \varepsilon \omega \cos \omega t$ , получено в [10], второе приближение – в [11]. В настоящей работе получено и асимптотически исследовано решение данной задачи для любых значений амплитуды колебаний скорости перемещения источника.

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho_2$ , занимающей часть пространства  $-\infty < x < \infty$ ,  $z \leq 0$ , плавает слой жидкости плотности  $\rho_1 < \rho_2$ , имеющий глубину  $h$ . На свободной поверхности верхней жидкости имеется «твердая крышка», а вдоль поверхности раздела жидкостей движется область давления  $P(x, t)$  с переменной скоростью  $c + \varepsilon \omega \cos \omega t$ . Движение начинается из состояния покоя в момент времени  $t=0$ . В системе координат, движущейся со скоростью  $c$ , давление  $P(x, t)$  представляется в виде

$$P(x, t) = \frac{P_0}{\pi} \frac{a}{(x - \varepsilon \sin \omega t)^2 + a^2} \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  – частота колебаний,  $\varepsilon$  – амплитуда смещений центра области от среднего положения. Вектор ускорения свободного падения  $g = (0, -g)$ .

В силу принятых предположений течения в верхнем и нижнем слоях являются потенциальными. Определим потенциалы скоростей  $\varphi_i$  верхней ( $i=1$ ) и нижней ( $i=2$ ) жидкостей в подвижной системе координат как  $u_i=c-\varphi_{i,x}$ ,  $w_i=-\varphi_{i,z}$ , где  $u_i$ ,  $w_i$  — горизонтальные и вертикальные составляющие скоростей жидкости.

Потенциалы скоростей  $\varphi_i$  удовлетворяют уравнению Лапласа и линейризованным граничным и начальным условиям

$$\Delta\varphi_i=0, \quad i=1, 2 \quad (2)$$

$$\varphi_{1,z}=0, \quad z=h; \quad \varphi_{1,z}=\varphi_{2,z}, \quad z=0; \quad \varphi_2<\infty, \quad z\rightarrow-\infty \quad (3)$$

$$-\rho_1(\varphi_{1,tt}+2c\varphi_{1,tx}+c^2\varphi_{1,xx}+g\varphi_{1,z})+\rho_2(\varphi_{2,tt}+2c\varphi_{2,tx}+c^2\varphi_{2,xx}+g\varphi_{2,z})= \\ =P_{,t}+cP_{,x}, \quad z=0 \quad (4)$$

$$\varphi_i=0, \quad t=0; \quad \varphi_{i,t}=0, \quad t=0, \quad z=0, \quad i=1,2 \quad (5)$$

Требуется определить форму поверхности раздела жидкостей

$$\eta = -\frac{P(x,t)}{\Delta\rho g} + \frac{1}{\Delta\rho g} [-\rho_1(\varphi_{1,t}+c\varphi_{1,x}) + \\ +\rho_2(\varphi_{2,t}+c\varphi_{2,x})]_{z=0}, \quad \Delta\rho=\rho_2-\rho_1 \quad (6)$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$g_1 = \frac{\Delta\rho}{\rho_1+\rho_2} g, \quad (x_1, z_1, H, a_1, \varepsilon_1) = \frac{g_1}{c^2} (x, z, h; a, \varepsilon)$$

$$(t_1, \Omega^{-1}) = \frac{c}{g_1} (t, \omega^{-1}), \quad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \left( P', \frac{P_0'}{a_1} \right) = \frac{1}{(\rho_1+\rho_2)c^2} \left( P, \frac{P_0}{a} \right)$$

В дальнейшем индексы у безразмерных переменных будем опускать. Сделаем преобразование Фурье по переменной  $x$  с параметром  $k$ . Тогда, используя (3), решение (4) для образов Фурье  $\varphi_i^*$  можно представить в виде

$$\varphi_1^*=A(t)(\operatorname{sh} kz - \operatorname{cth} kH \operatorname{ch} kz), \quad \varphi_2^*=A(t)(\operatorname{sh} kz + \operatorname{sign} k \operatorname{ch} kz)$$

Уравнение для определения  $A(t)$  получаем из (4), (5)

$$q\ddot{A} - 2ickq\dot{A} - k(qk-1)A = P_{,t}^* - ickP^* \quad (7)$$

$$A(0)=0, \quad \dot{A}(0)=0, \quad q=\alpha \operatorname{cth} kH + 1$$

Образ Фурье давления (4) есть  $P^*(k, t) = P_0 a \exp(-|k|a + ike \sin \Omega t)$ . Подставив это выражение в (7), найдем его решение методом вариации постоянных. Для динамической части безразмерного возвышения границы раздела  $\eta_1$ , определяемой вторым слагаемым правой части (6), получим выражение

$$\eta_1 = \frac{P_0 a}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty q e^{-ikx} (S_1 e^{i\lambda_1 t} + S_2 e^{i\lambda_2 t}) dk \quad (8)$$

$$S_j = k e^{-ka} \int_0^t \exp(-i\lambda_j \tau + ike \sin \Omega \tau) (1 + \varepsilon \Omega \cos \Omega \tau) d\tau, \quad j=1, 2 \quad (9)$$

$$\lambda_{1,2} = k \pm \sqrt{\frac{1+\alpha}{q}} k$$

Используя известное соотношение

$$e^{i k \varepsilon \sin \Omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(k \varepsilon) e^{i n \Omega t}$$

где  $J_n$  — функция Бесселя порядка  $n$ , выражения для  $S_j$  можно проинтегрировать по  $t$ . Получим

$$S_j = k \varepsilon e^{-k a} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(k \varepsilon) \left[ \frac{-i}{\Lambda_{jn}} (e^{i \Lambda_{jn} t} - 1) - \frac{\varepsilon \Omega}{\Omega^2 - \Lambda_{jn}^2} (e^{i \Lambda_{jn} t} (i \Lambda_{jn} \cos \Omega t + \Omega \sin \Omega t) - i \Lambda_{jn}) \right], \quad \Lambda_{jn} = -\lambda_j + n \Omega \quad (10)$$

Выражения (8), (10) представляют собой точное решение поставленной задачи.

Знаменатели (8), (10) определяют дисперсионные уравнения данной задачи, которые можно представить в виде  $n \Omega \pm \lambda_{1,2} = 0$ . Изучим поведение их корней.

Уравнение  $n \Omega + \lambda_1 = 0$  ( $n \geq 0$ ) не имеет действительных решений. Уравнение  $\lambda_2 = 0$  имеет при значениях внутреннего числа Фруда  $Fr = [\alpha / (1 + \alpha) H]^{-1/2} < 1$  один действительный корень  $k_0$ . При  $Fr = 0$  корень  $k_0 = 1$ . Поведение  $k_0$  в зависимости от  $Fr$  изучено в [12].

Уравнение  $n \Omega + \lambda_2 = 0$  ( $n > 0$ ) имеет при  $Fr < 1$  и  $n \Omega < \Omega^*$  два корня  $k_{n1}$  и  $k_{n2}$ . При  $Fr = 0$   $k_{n1,2} = (1 \mp \sqrt{1 - 4n\Omega})^2 / 4$ ,  $\Omega^* = 0,25$ . В случае  $n \Omega \rightarrow \Omega^* - 0$  групповые скорости систем волн  $k_{n1,2}$   $dn \Omega / dk_{n1,2}$  стремятся к нулю, что соответствует в линейной постановке резонансному усилению амплитуд волн. На фиг. 1 изображены дисперсионные кривые волн  $k_{n1}$  (левая ветвь однозначности) и  $k_{n2}$  (средняя ветвь однозначности) для различных значений  $Fr$ : кривая 1 — 0; 2 — 0,5; 3 — 0,75; 4 — 1, значение  $\alpha = 0,981$ . Пунктирная кривая — множество точек, в которых выполняются резонансные условия при изменении  $Fr$  в пределах 0—1. На фиг. 2 приведены зависимости  $\Omega^*$  и соответствующего ему значения  $k^*$  от  $Fr$ , значение  $\alpha = 0,981$ . Характер зависимостей аналогичен приведенным в [4] для поверхностных волн.

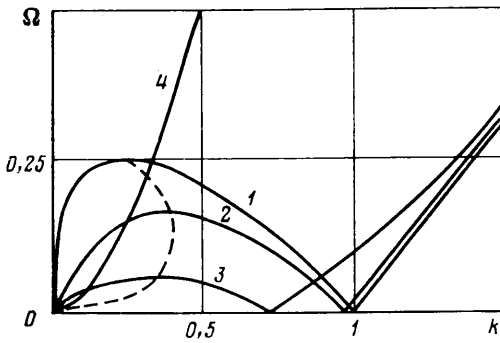
Уравнения  $\lambda_{1,2} - n \Omega = 0$  всегда имеют по одному корню  $k_{n3}$ ,  $k_{n4}$  соответственно. При  $Fr = 0$   $k_{n3,4} = (1 \mp \sqrt{1 + 4n\Omega})^2 / 4$ . В случае малых  $\Omega$  корни  $k_{n1,3} \approx \approx n \Omega / (Fr \mp 1)$ . На фиг. 1 показана дисперсионная кривая волн  $k_{n4}$  (правая ветвь однозначности) для различных значений  $Fr$ . При  $Fr = 1$  (кривая 4) остаются только волны  $k_{n4}$ .

Для анализа при  $t \gg 1$ ,  $x \gg 1$  решения (8), (10) необходимо исследовать интегралы вида

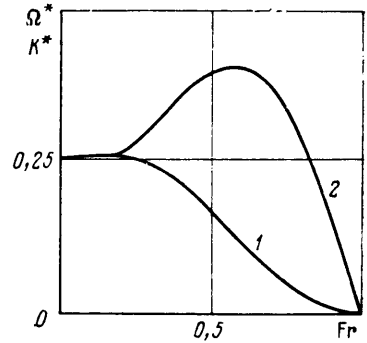
$$\int_0^{\infty} \frac{M(k)}{\lambda_j + n \Omega} (e^{i n \Omega t} - e^{\lambda_j t}) e^{-i k t} dk \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{M(k)}{\lambda_j + n \Omega} (-i \lambda_j \cos \Omega t + \Omega \sin \Omega t + e^{i \lambda_j t}) e^{-i k x} dk, \quad n \in Z$$

Характерной особенностью таких интегралов является наличие устранимой особенности. Исследование будем проводить на комплексной плоскости  $k = k_1 + i k_2$ . Точки, соответствующие устранимым особенностям, обойдем сверху малой полуокружностью, подынтегральные выражения разобьем на два слагаемых таким образом, чтобы интегралы от них, взятые по отдельности, имели неустраняемые особенности.



Фиг. 1



Фиг. 2

Полный анализ содержит большое число выкладок и займет, если его привести, много места. Для примера рассмотрим в предельном случае  $Fr=0$  интеграл

$$I_0 = I_{01} + I_{02} = \int_0^{\infty} \frac{M(k)}{\lambda_2} e^{-ikx} dk - \int_0^{\infty} \frac{M(k)}{\lambda_2} e^{-i(kx - \lambda_2 t)} dk$$

Корень уравнения  $\lambda_2=0$  есть  $k_0$  и при  $Fr=0$   $k_0=1$ . В данном случае подынтегральные выражения содержат одну точку ветвления  $k=0$  и для однозначного определения  $\sqrt{k}$  следует провести разрез вдоль отрицательной части действительной оси.

Исследуем интеграл  $I_{01}$ . При  $x>0$  контур интегрирования замкнем четвертью окружности, расположенной в IV квадранте, и отрицательной частью действительной оси. При  $x<0$  контур замыкается аналогично, но в верхней полуплоскости. Пользуясь интегрированием по частям, для  $I_{01}$  получим оценку

$$I_{01} = -2\pi i \frac{M(k_0)}{\lambda_2'(k_0)} e^{-ik_0 x} \theta(x) + O(x^{-2}) \quad (12)$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда.

Рассмотрим интеграл  $I_{02}$ . Введем параметры  $\beta = t^2(x-t)^{-2}$  и  $\gamma = t^2|x-t|^{-1}$ . После замены  $k = \beta \kappa$  получим

$$I_{02} = - \int_0^{\infty} \beta \frac{M(\beta \kappa)}{\lambda_2(\beta \kappa)} \exp[-i\gamma(\text{sign}(x-t)\kappa + \sqrt{\kappa})] d\kappa$$

Асимптотическое исследование при  $\gamma \gg 1$  подобных интегралов проводилось в [13]. В случае  $x>t$  показатель экспоненты подынтегрального выражения есть  $-i\gamma(\kappa + \sqrt{\kappa})$ . Рассмотрим функцию  $F = \kappa + \sqrt{\kappa} = \rho e^{i\varphi} + \rho^{1/2} e^{i\varphi/2}$ . Вдоль линии  $C$ , расположенной во втором квадранте и определяемой уравнением,  $\rho^{1/2} = \cos(\varphi/2)/\cos \varphi$ ,  $\pi/2 < \varphi < \pi$ , выполняются условия  $\text{Re } F(\kappa) = 0$ ,  $\text{Im } F(\kappa) > 0$ . Исходный путь интегрирования в  $I_{02}$  можно заменить на кривую  $C$ , интеграл вдоль которой принадлежит к классу интегралов Лапласа. Получим асимптотическую оценку интеграла

$$I_{02} = 2\pi i \frac{M(k_0)}{\lambda_2'(k_0)} e^{-ik_0 x} \theta(x-t) + O(x^{-2}) \quad (13)$$

При  $x<t$  показатель экспоненты есть  $i\gamma(\kappa - \sqrt{\kappa})$ . Рассмотрим функцию  $F_1 = \kappa - \sqrt{\kappa}$  и из условия  $dF_1/d\kappa = 0$  найдем точку перевала. В случае  $\beta Fr < 1$  существует единственный действительный корень этого уравнения  $\kappa_1$ , при  $Fr=0$   $\kappa_1 = 0,25$ . В силу предположения  $\gamma \gg 1$   $\kappa_1 \approx k^*$  (фиг. 2).

Линии, вдоль которых выполняются условия  $\operatorname{Re} F_1 = F_1(\kappa_1) = -0,25$  и  $\operatorname{Im} F_1 > 0$ , есть две параболы  $P_1$  и  $P_2$ , задающиеся соответственно уравнениями [13]

$$\rho = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \sin \varphi}, \quad \rho^{1/2} = \frac{\cos \varphi/2 \pm \sin \varphi/2}{2 \cos \varphi}$$

$$-\frac{3}{2}\pi < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{для } P_1, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi \quad \text{для } P_2$$

Учитывая свойства функции  $F_1$  [13], путь интегрирования в  $I_{02}$  можно преобразовать (фиг. 3) к части параболы  $P_1$  ( $\varphi \in (\pi/2; -\pi)$ ), отрезков действительной оси  $L_1, L_2$   $[-\kappa_1, 0]$  ниже и выше разреза, к части параболы  $P_1$  ( $\varphi \in (\pi; \pi/2)$ ) и кривой  $C$  ( $\varphi \in (\pi/2; \pi)$ ). Интеграл вдоль  $C$  есть  $O(\gamma^{-2})$ , интеграл вдоль  $P_1$  ( $\varphi \in (\pi; \pi/2)$ ) не имеет стационарных точек и равен  $O(\gamma^{-1})$ , интеграл вдоль  $L_1 L_2$  также равен  $O(\gamma^{-1})$ . Интеграл вдоль  $P_1$  ( $\varphi \in (\pi/2; -\pi)$ ) вычисляется согласно правилам метода перевала. Для интеграла  $I_{02}$  получим асимптотическую оценку

$$I_{02} = \left( 2\pi i \frac{M(k_0)}{\lambda_2'(k_0)} e^{-ik_0 x} + \frac{\beta M(\beta/4)}{\lambda_2(\beta/4)} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-i(\gamma-\pi)/4} \right) \times \theta(t-x) + O(\gamma^{-1}) \quad (14)$$

причем первое слагаемое добавляется в случае  $k_0 < k_1 = \beta \kappa_1$ . Так как  $\lambda_2'(k_1)t = x$ , то в силу монотонного уменьшения с ростом  $k$  функции  $\lambda_2'(k)$  последнее неравенство эквивалентно условию  $\lambda_2'(k_0)t < x$ .

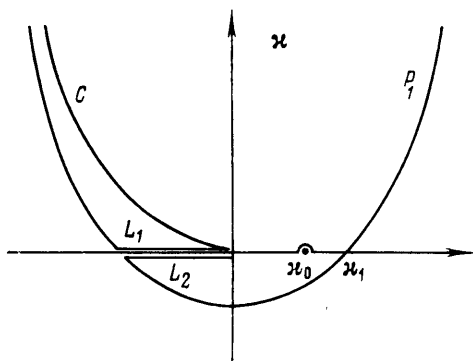
Второе слагаемое описывает неустановившиеся волны за счет начала движения, их фаза с точностью до постоянной величины в неподвижной системе координат в размерных переменных равна  $-ix^{-2}c^3/4g_1$ , амплитуда их по  $x$  имеет порядок не выше  $x^{-2}$ . В дальнейшем эти слагаемые учитывать не будем, отметим только, что они качественно совпадают с полученными в [3] неустановившимися волнами для однородного слоя конечной глубины.

С учетом (12)–(14) для интеграла  $I_0$  имеем асимптотическую оценку

$$I_0 = -2\pi i \frac{M(k_0)}{\lambda_2'(k_0)} e^{-ik_0 x} \theta(x) \theta(\lambda_2'(k_0)t - x)$$

Остальные интегралы вычисляются аналогично. Точное решение (8), (10) для конечных значений  $\operatorname{Fr}$  содержит в знаменателях подынтегральных выражений множитель  $q = 1 + \alpha \operatorname{cth} kH$ , определяющий полюсы первого порядка в точках  $k = i\pi l/H$ ,  $l \in Z$ . Эти же значения  $k$  являются точками ветвления функции  $\sqrt{(1+\alpha)k/q}$ , входящей в  $\lambda_j$ . Чтобы разделить полюсы и точки ветвления, можно сделать тождественное преобразование  $m(k) = [m(k) - m(k, \lambda_j = k)] + m(k, \lambda_j = k)$ . При этом слагаемое в квадратных скобках имеет в указанных точках только точки ветвления, второе слагаемое — полюсы первого порядка.

Интегралы от первого и второго слагаемых изучались по отдельности. При исследовании интегралов, соответствующих первому слагаемому, на плоскости  $k$  для однозначного определения  $\sqrt{q}$  следует провести разрезы из точек  $k = i\pi l/H$  параллельные действительной оси и расположенные в левой полуплоскости.



Фиг. 3

Пути интегрирования строятся аналогично. Кривая  $C'$  определяется из условия  $\operatorname{Re}(\kappa + \sqrt{(1+\alpha)\kappa/q(\beta\kappa)})$ . Для определения  $P'$  необходимо найти корень  $\kappa_1$  уравнения  $dF_1/d\kappa = (\kappa - \sqrt{(1+\alpha)\kappa/q(\beta\kappa)})' = 0$  и построить кривые  $P'$ , удовлетворяющие условиям  $\operatorname{Re} F_1(\kappa) = F_1(\kappa_1)$ ,  $\operatorname{Im} F_1(\kappa) > 0$ . Действительный корень  $\kappa_1$  существует при условии  $\beta \operatorname{Fr} < 1$ . Для конечных значений  $\operatorname{Fr}$  кривые  $C'$ ,  $P'$  существуют и при  $|k| \rightarrow \infty$   $C' \rightarrow C$ ,  $P' \rightarrow P$ . Полюсы  $k = i\pi l/H$  при попадании внутрь области интегрирования дают экспоненциально затухающие с ростом  $|x|$  решения, интегралы по берегам разрезов также экспоненциально убывают.

С учетом приведенных выше рассуждений после проведения необходимых вычислений получим для безразмерного возвышения  $\eta_1$  асимптотическое для  $x \gg 1$ ,  $t \gg 1$  выражение

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \frac{P_0 a}{1+\alpha} \left\{ \frac{q(k_0)k_0 e^{-k_0 a}}{\lambda_2'(k_0)} J_0(k_0 \varepsilon) \cos k_0 x + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -(-1)^n \frac{q(k_{n1})e^{-k_{n1} a}}{\lambda_2'(k_{n1})} (k_{n1} + n\Omega) J_n(k_{n1} \varepsilon) \cos(k_{n1} x + n\Omega t) + \right. \\ & + (-1)^n \frac{q(k_{n2})e^{-k_{n2} a}}{\lambda_2'(k_{n2})} (k_{n2} + n\Omega) J_n(k_{n2} \varepsilon) \cos(k_{n2} x + n\Omega t) + \\ & + \frac{q(k_{n3})e^{-k_{n3} a}}{\lambda_1'(k_{n3})} (k_{n3} - n\Omega) J_n(k_{n3} \varepsilon) \cos(k_{n3} x - n\Omega t) + \\ & \left. \left. + \frac{q(k_{n4})e^{-k_{n4} a}}{\lambda_2'(k_{n4})} (k_{n4} - n\Omega) J_n(k_{n4} \varepsilon) \cos(k_{n4} x - n\Omega t) \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

Области существования решений, соответствующих волновым числам  $k_0$ ,  $k_{nj}$ , следующие:  $0 < x < \lambda_2'(k_0)t$  для  $k_0$ ,  $\lambda_2'(k_{n1})t < x < 0$  для  $k_{n1}$ ,  $0 < x < \lambda_2(k_{n2,4})t$  для  $k_{n2}$ ,  $k_{n4}$ ,  $0 < x < \lambda_1'(k_{n3})t$  для  $k_{n3}$ . Решения, соответствующие волновым числам  $k_0$ ,  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$ , существуют при  $\operatorname{Fr} < 1$ . Решения, соответствующие частотам  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$ , добавляются только при выполнении условия  $n\Omega < \Omega^*$ .

Проанализируем асимптотическое представление решения (15). Первый член описывает стационарные волны с волновым числом  $k_0$ . При  $\Omega = 0$ ,  $\varepsilon = 0$   $J_0(0) = 1$  и это слагаемое совпадает с полученным в [13] решением для равномерного движения. Так как  $|J_0(y)| \leq 1$ , то нестационарность движения приводит к уменьшению амплитуды стационарных волн. Если  $k_0 \varepsilon$  совпадает с нулем функции Бесселя  $J_0(y)$ , то стационарные волны вообще пропадают. Отметим, что амплитуда стационарных волн зависит только от безразмерной амплитуды колебаний  $\varepsilon$  и не зависит от  $\Omega$ .

Четыре слагаемых под знаком суммы описывают нестационарные волны с частотами  $n\Omega$ . Фазовые скорости волн  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$  направлены вверх по потоку, волн  $k_{n3}$ ,  $k_{n4}$  — вниз по потоку. Все волновые системы расположены внутри ограниченных областей, передние фронты которых удаляются от источника возмущений с групповой скоростью волн. Групповая скорость  $\lambda_2'(k_{n1})$  (с учетом скорости потока) волн  $k_{n1}$  меньше нуля и они располагаются перед источником возмущений вверх по потоку. Остальные системы волн имеют положительные групповые скорости и расположены за источником. При  $n\Omega \rightarrow \Omega^*$  групповые скорости  $\lambda_2'(k_{n1,2}) \rightarrow 0$  и амплитуды волн  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$  неограниченно возрастают (резонансный случай). За счет множителей  $J_n(k_{nj}\varepsilon)$  для любой частоты  $\Omega$  существует спектр значений амплитуд колебаний  $\varepsilon$ , при которых амплитуда волн  $k_{nj}$  равна нулю. При малых  $\varepsilon$  (15) после разложения по степеням  $\varepsilon$  совпадает для первых трех приближений с решением, полученным в [11].

Асимптотическое представление решения (15) не содержит волн  $k_{n1,2}$ , если  $n\Omega > \Omega^*$ . Однако если учесть комплексные корни дисперсионных

уравнений, которые существуют как раз при  $n\Omega > \Omega^*$ , то получим волны, фазовые скорости которых направлены вверх по потоку и которые экспоненциально затухают с ростом  $|x|$ . При  $Fr=0$  длина их равна  $(1-2n\Omega)/2$ , коэффициент затухания  $-\sqrt{4n\Omega-1}/2$ . Эти волны могут быть существенны до тех пор, пока декремент вязкого затухания сравним с  $\sqrt{4n\Omega-1}/2$ .

Рассмотрим вопрос о влиянии формы распределения давления вдоль границы раздела жидкостей. Форма распределения давления, как, впрочем, и вид возмущения, не влияют на фазовые характеристики волн (в линейной задаче), отличие проявляется только в амплитудных множителях. Если распределение давления имеет П-образную форму, то амплитуда волн будет содержать множитель  $\sin k_n j a$ , где  $a$  — полуширина ступеньки. При задании давления в виде  $P(x, t) = P_0 \exp(-(x - \varepsilon \sin \Omega t)^2 / 4a^2)$ , имеющем, как и (1), гладкий колоколообразный профиль, в асимптотических формулах (15) множитель  $P_0 a \exp(-ka)$  следует заменить на множитель  $P_0 a \sqrt{\pi} \exp(-k^2 a^2)$ . Качественное поведение амплитуд волн такое же, как и в рассмотренном случае. Если в (1) устремить  $a \rightarrow 0$  при условии  $P_0 a = \text{const}$ , то в пределе получим сосредоточенный импульс давления. В асимптотических формулах при этом множитель  $\exp(-ka)$  следует заменить на единицу. Приближение  $\delta$ -образного источника некорректно для малых  $c$ .

Пусть  $c=0$ ,  $\Omega = \text{const}$ . Для исследования этого предельного случая в (15) можно перейти к размерным переменным, после чего положить  $c=0$ . Не выписывая получающихся формул, отметим, что при горизонтальных колебаниях источника возмущений будут генерироваться волны всех частот, кратных основной.

В случае  $\alpha=0$   $g_1=g$  и (15) описывает поверхностные волны на поверхности однородной жидкости бесконечной глубины.

В заключение сформулируем основные выводы работы. При поступательном движении в двухслойной жидкости источника возмущений, скорость которого периодически изменяется во времени около некоторого среднего значения, возбуждаются нестационарные внутренние волны, соответствующие всем частотам, кратным основной. Для каждой из этих частот существует скорость, при которой происходит резонансное возбуждение волн. При сверхкритических скоростях ( $Fr > 1$ ) пропадают волны-предвестники и стационарные волны, однако за источником возмущений генерируются нестационарные волны, собственные значения чисел Фруда которых меньше критического. Собственное число Фруда волны вычисляется по ее фазовой скорости.

Периодические изменения скорости поступательного движения всегда уменьшают амплитуду стационарных волн, в некоторых особых случаях она обращается в нуль. Варьируя только амплитуду колебаний скорости движения, можно изменить амплитуды волн любой гармонике и тем самым управлять ими.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. О волновых движениях тяжелой жидкости // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 15–26.
2. Kaplan P. The waves generated by the forward motion of oscillatory pressure distributions // Proc. 5th Midwest. Conf. Fluid Mech., Ann. Arbor. Mich. 1957. P. 316.
3. Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны в потоке конечной глубины // МГИ. 1969. № 3(45). С. 71–86.
4. Debnath L., Rosenblat S. The ultimate approach to the steady state in the generation of waves on a running stream // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1969. V. 22. № 2. P. 221–233.
5. Войт С. С. Образование волн давлениями, приложенными к поверхности текущей жидкости // Тр. МГИ АН УССР. 1963. Т. 27. С. 103–113.
6. Абрашина Н. Н. Неустановившиеся волны в стратифицированном море от периодических движущихся возмущений // Мор. гидрофиз. исслед. Севастополь, 1971. № 3(53). С. 39–52.
7. Pramanik A. K. Waves due to a moving oscillatory surface pressure in a stratified fluid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1974. V. 41. № 3. P. 571–574.
8. Никитин Н. Л. Возбуждение нестационарных волн электрогидродинамическим способом // Экспериментальные и теоретические исследования волновых процессов в океане и использование их результатов для нужд народного хозяйства. Тр. науч.-техн. конф., Севастополь, 28–30 нояб., 1984. Севастополь, 1985. С. 31–34 (Деп. в ВИНТИ 12.06.85, № 4133–85 ДЕП.)

9. Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Волны от колеблющегося цилиндра в вязкой двухслойной жидкости // Нестационарные задачи механики сплошных сред. Новосибирск. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1985. Вып. 70. С. 54–62.
10. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн/Под ред. Овсянникова Л. В. и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 318 с.
11. Нестеров С. В., Никитин Н. Л. Внутренние волны в двухслойной жидкости, текущей с переменной скоростью // Волны и дифракция – 85. IX Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (г. Телави, 1985 г.). Т. 2. Тбилиси, 1985. С. 34–37.
12. Нестеров С. В., Никитин Н. Л. Внутренние волны, возбуждаемые в двухслойной жидкости перемещающейся областью давления // Изв. АН СССР. ЖМГ. 1984. № 5. С. 109–116.
13. Срегенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.I.1988