МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1989

УДК 532.546.013.4

РАЗВИТИЕ ВЯЗКОСТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

БОЧАРОВ О. Б., КУЗНЕЦОВ В. В.

При вытеснении вязкой жидкости в пористой среде другой, несмешивающейся с ней и менее вязкой, при неблагоприятном отношении подвижностей на фронте вытеснения процесс вытеснения неустойчив. Рост возмущений на фронте вытеснения приводит к формированию «языков» вытесняющей жидкости. При рассмотрении роста возмущений в пористой среде принципиальное значение имеет то, что в устойчивом режиме вытеснение отличается от поршневого и за фронтом вытеснения происходит совместное течение двух жидкостей [1]. Величина насыщенности вытесняющей жидкости на фронте вытеснения в устойчивом режиме определяется из решения Баклея – Леверетта.

Начальная стадия роста амплитуд возмущений в линейном приближении изучалась в [1–3]. Рассматривались два возможных способа учета влияния капиллярных сил на скорость роста малых возмущений: введением эффективного межфазного натяжения на фронте вытеснения [2], которое считалось поршневым, и усреднением течения в переходной зоне в окрестности фронта вытеснения в рамках модели Маскета – Леверетта [3]. Нелинейная стадия развития возмущений в пористых средах со случайным полем проницаемости изучалась в [4]. Развитие регулярных возмущений в нелинейной стадии их роста изучалось численно без учета капиллярных сил в [5]. В [6] дан обзор работ по изучению нелинейной стадии развития вязкостной неустойчивости в ячейке Хил – Шоу, одной из моделей пористой среды. Исследовалось поршневое вытеснение с локализацией капиллярных сил на фронте вытеснения. Вместе с тем систематического изучения влияния капиллярных сил на развитие вязкостной неустойчивости в случае развитого двухфазного течения выполнено не было. В данной работе численно в рамках модели Маскета – Леверетта, т. е. с учетом капиллярных сил, рассматривается развитие регулярных возмущений в нелинейной стадии их роста.

1. Рассмотрим течение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в однородной горизонтальной пористой среде в двумерной постановке. Система уравнений для определения «эффективного» давления p и нормализованной насыщенности вытесняющей жидкости s в безразмерных переменных имеет вид [7]

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\operatorname{div}(\varepsilon a(s)\nabla s-\mathbf{v}F(s)) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \mathbf{v}=-M(S)\nabla p \tag{1.2}$$

$$p=p_2+\varepsilon\int_s^1 F(s)\frac{dJ(s)}{ds}ds,\qquad s=\frac{s_1-s_{10}}{s_{11}-s_{10}}$$

$$a(s)=-k_2(s)F(s)\frac{dJ(s)}{ds},\qquad F(s)=\frac{k_1(s)}{k_1(S)+\mu k_2(s)}$$

$$M(s)=\frac{k_1(s)}{\mu}+\frac{k_2(S)}{k_2(0)}$$

$$\varepsilon=\frac{\sigma\sqrt{km}}{u_0\mu_2\lambda},\qquad p=\frac{p^*kk_2(s_{10})}{u_0\mu_2\lambda},\qquad t=t^*\frac{u_0}{m\lambda(s_{11}-s_{10})}$$

$$x=x^*/\lambda,\quad y=y^*/\lambda,\quad v=u/u_0$$

где $\mathbf{v}$ — суммарная скорость фильтрации, $M(s)$ — подвижность смеси при насыщенности s, отнесенная к начальной подвижности при $s=0$, $F(s)$ — функция Баклея — Леверетта, $k_i(s)$ — относительные фазовые проницаемости, $J(s)$ — капиллярное давление, $\mu=\mu_1/\mu_2$ — отношение вязкостей жидкостей, t^*, x^*, y^*, p^*, u — размерные время, координаты, давление и скорость фильтрации смеси, λ — длина волны возмущения на фронте вытеснения или возмущения скорости фильтрации закачиваемой жидкости при $x^*=0$, u_0 — скорость фильтрации смеси при $x^*=0$, m — пористость, k — проницаемость, s_{10} и s_{11} — начальное и конечное значения насыщенности вытесняющей жидкости, индекс 1 — относится к вытесняющей, 2 — к вытесняемой жидкостям, σ — поверхностное натяжение.

Течение рассматривается в прямоугольной области $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant\leqslant y\leqslant 0{,}5\}$ с непроницаемыми границами при $y=0$ и 0,5, что моделирует симметрию течения; при давлении в вытесняющей жидкости на выходе $p_2=0$, $x=a$ и заданных расходах жидкостей при $x=0$. Вытеснение происходит в направлении оси x. В начальный момент времени область течения полностью заполнена вытесняемой жидкостью ($s=0$).

Для нелинейных возмущений фронта вытеснения с единичной длиной волны уравнение изосаты для насыщенности s_j (изолиния, насыщенность вытесняющей жидкости вдоль которой постоянна и равна s_j) можно представить в виде $s(\eta_j(y,\ t),\ y,\ t)=s_j$. С учетом дифференциальных соотношений на изосате уравнение (1.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\eta_j}{\partial t}=\frac{dF}{ds}\left(v_x-v_y\frac{\partial\eta_j}{\partial y}\right)+\varepsilon a(s)\frac{\partial^2\eta_j}{\partial y^2}-$$

$$-\varepsilon\left[1+\left(\frac{\partial\eta_j}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(s)\frac{\partial s}{\partial x}\right) \tag{1.3}$$

Зададим возмущение так, что $\eta_j(y,\ t)$ максимальна при $y=0$ (головная часть изосаты) и минимальна при $y=0{,}5$ (хвостовая часть изосаты). В силу симметрии $\partial\eta_j/\partial y=0$ при $y=0$; 0,5 и, следовательно, $v_y\partial\eta_j/\partial y$ будет существенно меньше v_x в некоторой окрестности головной и хвостовой частей изосаты. Обозначим эти области Ω_j^h и Ω_j^t соответственно. Тогда скорости переноса изосаты в направлении оси x в областях Ω_j^h и Ω_j^t, равные $\partial\eta_j/\partial t$, в силу (1.3) имеют вид

$$W_j^k=\frac{dF}{ds}v_x^k+\varepsilon a(s)\frac{\partial^2\eta_j^k}{\partial y^2}-\varepsilon\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(s)\frac{\partial s}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

$$k=h,\ t$$

и определяются неравномерностью суммарной скорости фильтрации по оси y, кривизной изосаты и капиллярной диффузией в направлении течения. Неравномерность суммарной скорости фильтрации порождается возмущением изолинии фронта вытеснения и уменьшается с увеличением расстояния от фронта из-за поперечных перетоков вытесняющей жидкости.

В пределах стабилизированной зоны, размазывающей фронт вытеснения, скорости переноса различных насыщенностей совпадают со скоростью переноса некоторой изосаты s_f, называемой фронтовой [1]. Для определения скорости переноса фронтовой изосаты в ее головной и хвостовой частях рассмотрим элемент пористой среды, включающий в себя стабилизированную зону с характерной длиной в направлении вытеснения l, и применим к нему уравнение сохранения массы в интегральном виде [1]. Ориентируя контрольный элемент среды по нормали к фронту вытеснения и учитывая, что в Ω_f^h, Ω_f^t нормальная к фронту вытеснения компонента скорости v_n близка к v_x, после предельного перехода от элемента к отрезку длиной l получим уравнения переноса фронта вытеснения в областях Ω_f^h и Ω_f^t в виде

$$s_f^k \frac{\partial \eta_f^k}{\partial t} = F(s_f^k) v_x^k + \varepsilon \Phi_f^k \frac{\partial^2 \eta_f^k}{\partial y^2} - \varepsilon a(s_f^k) \left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_{s=s^k{}_f} \tag{1.5}$$

$$\Phi_f^k = \int_0^{s_f^k} a(\xi)\, d\xi, \qquad k=h, t$$

где s_f — насыщенность на фронте вытеснения. Скорость роста амплитуды возмущения на фронте вытеснения $A(t)$ равна $dA/dt={}^1/_2(W_f^h - W_f^t)$ и определяется, как и для всех изосат, неравномерностью расхода в головной и хвостовой частях фронта вытеснения, его кривизной и интенсивностью капиллярной диффузии. Сравнивая соотношения (1.4) и (1.5), получим уравнения для определения насыщенностей на фронте вытеснения в областях Ω_f^h и Ω_f^t

$$v_x^k \frac{dF}{ds} + \varepsilon a(s) \frac{\partial^2 \eta_f^k}{\partial y^2} - \varepsilon \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(s) \frac{\partial s}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{F(s)}{s} v_x^k + \varepsilon \frac{\Phi_f^k}{s} \frac{\partial^2 \eta_f^k}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{a(s)}{s} \frac{\partial s}{\partial x} \tag{1.6}$$

$$s=s_f^k, \quad k=h, \ t$$

При $\varepsilon=0$ эти соотношения переходят в известное соотношение Баклея — Леверетта [1] для определения величины фронтовой насыщенности s_c и $s_f=s_c$. При $\varepsilon\neq0$ величина фронтовой насыщенности зависит от кривизны фронта вытеснения, пропорциональной $\partial^2\eta_f/\partial y^2$, и может отличаться от s_c, а также изменяться при переходе от области Ω_f^h к области Ω_f^t. Для возмущений малой амплитуды величина $v_y(\partial\eta_f/\partial y)$ имеет второй порядок малости не только в областях Ω_f^h и Ω_f^t, но и во всей области вытеснения. В этом случае соотношение типа (1.5) имеет место для всей изосаты, что и было получено ранее в [3] для случая $s_f^k=s_c$ и $\partial s/\partial x=0$.

Анализ развития малых возмущений, выполненный в [3] с использованием соотношения типа (1.5), показал, что их рост происходит в случае, если длина волны возмущений больше критической λ_*, что для системы (1.1) приводит к следующему условию для ε:

$$\lambda_* = 2\pi\sigma \frac{\sqrt{km}\, \Phi_c(1+M_c)}{\mu_2 u_0 F_c (M_c - 1)}$$

$$M_c = M(s_c), \quad F_c = F(s_c), \quad \Phi_c = \Phi(s_c)$$

$$\varepsilon < \varepsilon_* = \frac{F_c(M_c - 1)}{2\pi \Phi_c (M_c + 1)}$$

В дальнейшем величины λ_* и ε_* используются для нормировки параметров задачи.

2. Рассмотрим нелинейную стадию роста гармонических возмущений в рамках модели Маскета — Леверетта. Для определения эволюции поля изосат в этом случае система уравнений (1.1) и (1.2) решалась численно.

Разностная аппроксимация сформулированной краевой задачи в рассматриваемой области проводилась на равномерной блочно-центрированной сетке с шагом $h=h_x=h_y$. Решение находилось IMPES-методом [8]. Для расчета насыщенности строилась консервативная схема типа Тодда [8] в сочетании с использованием среднеарифметической аппроксимации функции $F(s)$ в полуцелых точках в окрестности фронта для получения второго порядка точности в целом по области. Расчеты проводились при $a=5$, 10, 20 и 30, что позволило изучить асимптотическую стадию развития возмущений. Для формирования возмущений использовался метод, предложенный в [5]. Расход закачиваемой жидкости на входе задавался в виде функции от времени

$$v_1(0, y, t) = 1 - \alpha \cos 2\pi y,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0;\ v_1 = 1,\ t > t_0;\ v_2(0, y, t) = 0$$

где величина α определяет амплитуду возмущения фронта вытеснения в момент времени t_0. Распределение насыщенности s в момент времени t_0, являющееся решением системы уравнений (1.1), (1.2), рассматривалось как начальное условие для $s(x, y, t)$ при $t=t_0$. Расчеты проводились для относительных фазовых проницаемостей вида $k_1(s)=s^2$, $k_2(s)=(1-s)^2$ и функции Леверетта $J(s)=0{,}32(1-s)/(0{,}1+s)$.

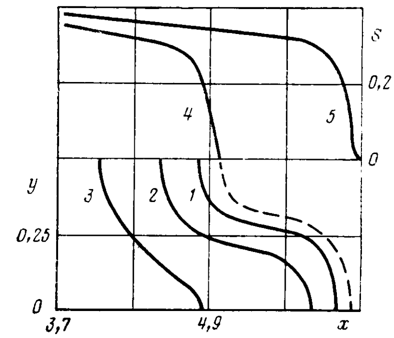
На фиг. 1, 2 приведены результаты расчетов полей насыщенности вытесняющей жидкости $s=0{,}24$; 0,3; 0,34 (кривые *1—3*) и распределения насыщенности по длине при $y=0$; 0,5 (кривые *4*, *5*) для двух моментов времени $t_1=2{,}5$ – фиг. 1; $t_2=8{,}5$ – фиг. 2 и $\varepsilon=8\cdot10^{-3}$. Параметр ε можно записать как $\varepsilon=\varepsilon_*\lambda_*/\lambda$ и расчеты полей насыщенности на фиг. 1, 2 соответствуют $\lambda'=\lambda/\lambda_*=10$. Данные расчетов по зависимости амплитуд изосат от времени для насыщенностей $s=0{,}1$; 0,2; 0,3; и 0,4 при $\varepsilon=8\cdot10^{-3}$ приведены на фиг. 3 (кривые *1—4*). Здесь же линией *5* показаны результаты при $\varepsilon=0$.

Расчеты показали, что после отключения возмущения расхода на входе ($t_0=0{,}7$) наблюдается рост амплитуд изосат и максимальную амплитуду имеет изосата с насыщенностью, близкой к фронтовой: $s_t=s_c$ (фиг. 3). При этом хорошо выделяется стабилизированная зона в диапазоне насыщенностей от 0 до 0,3, амплитуды изосат в которой практически совпадают (фиг. 1—3). Насыщенность $s=0{,}3$ является фронтовой насыщенностью в одномерном решении Баклея – Леверетта для использованных в расчетах фазовых проницаемостей при $\mu=0{,}1$. Изосата с $s=0{,}3$ практически разделяет область пористой среды, частично заполненную вытесняющей жидкостью, и область с $s=0$, граница которой показана на фиг. 1 пунктиром. На данной стадии развития возмущения эта изосата описывает форму «языка» вытесняющей жидкости, формирующего неравномерность суммарной скорости фильтрации за фронтом вытеснения.

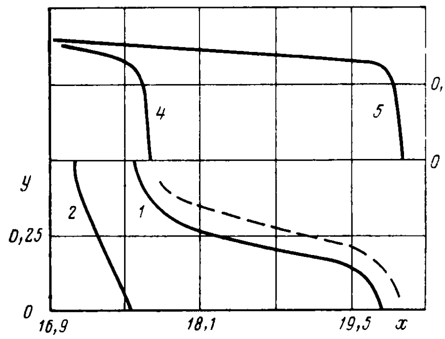
С ростом амплитуды языка величина фронтовой насыщенности в соответствии с (1.6) уменьшается и происходит перестройка стабилизированной зоны (фиг. 1, 2). Величина насыщенности на фронте вытеснения в зоне Ω_f^h с ростом амплитуды языка стремится к значению $s_m=0{,}24$, при котором происходит стабилизация ее величины (фиг. 2, 3). Насыщенность в хвостовой части языка меняется слабо и близка к значению $s_c=0{,}3$. Величина $s_m=0{,}24$ соответствует для использованных в расчетах относительных фазовых проницаемостей максимуму функции $M(s)dF/ds$, которая характеризует конвективный перенос при заданном градиенте давления. В процессе стабилизации формы языка амплитуды изосат с $s>0{,}3$ сильно уменьшаются (фиг. 3).

Качественно такой же характер изменения структуры поля насыщенности вытесняющей жидкости наблюдается и при больших значениях ε, но меньших ε_*. Предельная амплитуда языка и время ее установления уменьшаются с увеличением ε, а величина насыщенности на фронте вытеснения в головной части языка с ростом его амплитуды стремится к значению $s_m=0{,}24$. Расчеты, выполненные для времен, на порядок больших времени установления, показали, что предельная амплитуда языка в этом диапазоне времен стационарна.

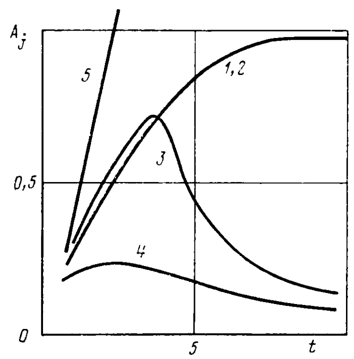
Зависимость предельной амплитуды языков от величины λ' (или $\varepsilon/\varepsilon_*$), полученная в численных расчетах, приведена на фиг. 4 (пунктир). При $\lambda'<2$ нелинейные возмущения фронта вытеснения, создаваемые без учета капиллярных сил в стадии формирования возмущений ($\varepsilon=0$ при



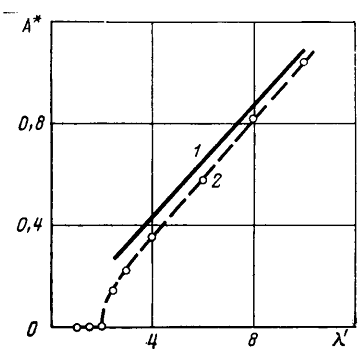
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$t<t_0$) для всех изосат затухали при $t>t_0$. Из фиг. 4 следует, что капиллярная диффузия хорошо стабилизирует вязкостную неустойчивость при $\lambda'\leqslant 10$. Предельная амплитуда языков в этом случае не превышает их ширины.

3. Для оценки величины предельной амплитуды языка рассмотрим течение жидкостей в Ω_f^h и Ω_f^t. Предположим, что поперечные компоненты скорости и градиенты давления в этих областях малы, на что указывают данные численных расчетов при $\lambda'>4$. Выделим области двухфазного $\Omega_f^{k1}=\Omega_f^k\cap\{s>0\}$ и однофазного течений $\Omega_f^{k2}=\Omega_f^k\cap\{s=0\}$ и будем считать, что насыщенность в Ω_f^{k1} постоянна и равна фронтовой $s^{k1}=s_f^k$. Тогда, используя равенство расходов в поперечных сечениях области течения расходу вытесняющей жидкости на входе, получим из (1.2) соотношения для определения продольных составляющих суммарной скорости фильтрации в областях Ω_f^{h1} и Ω_f^{t2}

$$v_x^{k,i}=\frac{1+\delta_{i1}(M(s^{k1})-1)}{1+\varphi^k(M(s^{k1})-1)};\qquad i=1,2;\qquad k=h,t$$

где $\delta_{i,j}$ — дельта Кронекера, φ^k — доля сечения, занятая вытесняющей жидкостью в областях Ω_f^k. Подставляя полученные соотношения для v_x^{k1} в (1.5), получим уравнение для определения зависимости амплитуды языка от времени

$$\frac{dA}{dt}=D(s^{h1},\varphi^h,\eta_f^h)-D(s^{t1},\varphi^t,\eta_f^t)$$

$$D(s,\varphi,\eta)\equiv\frac{F(s)}{2s}\left(\frac{M(s)}{1+\varphi(M(s)-1)}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\frac{\Phi(s)}{F(s)}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}-\varepsilon\frac{a(s)}{F(s)}\frac{\partial s}{\partial x}\right)\qquad(3.1)$$

Аппроксимация в асимптотической стадии формы языка функцией $\eta(y, t)=\eta_0(t)+A(t)\cos 2\pi y$ позволяет оценить кривизну фронта вытеснения в областях Ω_f^h и Ω_f^t

$$\frac{\partial^2\eta_f^h}{\partial y^2}=-4\pi^2 A, \quad \frac{\partial\eta_f^h}{\partial y}=0, \quad y=0$$

$$\frac{\partial^2\eta_f^t}{\partial y^2}=4\pi^2 A, \quad \frac{\partial\eta_f^t}{y}=0, \quad y=0{,}5$$

При достижении предельной амплитуды языка $\varphi^h\approx 0{,}5$; $\varphi^t\approx 0{,}7$; $s^{h1}\approx s_m$ и $s^{t1}\approx s_c$ градиенты $\partial s/\partial x$ при $y=0$, $s=s_m$ и при $y=0{,}5$; $s=s_c$ малы и из уравнения (3.1) следует выражение для предельной амплитуды языка при $dA/dt=0$:

$$A^*=\frac{F_m M_m/s_m(M_m+1)-F_c/s_c(M_c+1)}{2\pi^2(\Phi_m/s_m+\Phi_c/s_c)\varepsilon} \tag{3.2}$$

$$F_m=F(s_m), \quad M_m=M(s_m), \quad \Phi_m=\Phi(s_m)$$

Расчеты по (3.2) показаны на фиг. 4 линией *1*. Для $\lambda'>4$, когда поперечные перетоки в головной и хвостовой частях фронта вытеснения малы, соотношение (3.2) позволяет оценить предельную амплитуду языка вытесняющей жидкости.

Таким образом, в результате численных расчетов показано, что в нелинейной стадии роста возмущений капиллярные силы стабилизируют вязкостную неустойчивость и устанавливается предельная длина языков вытесняющей жидкости. Предложено выражение для оценки предельной длины языков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
2. *Chuoke R. L., Meurs P., van, Poel C. van der.* The instability of slow immiscible viscous liquid-liquid displacement in permeable media // Trans. Aime. 1959. V. 216. P. 188–194.
3. *Рыжик В. М., Кисиленко Б. Е.* Исследование устойчивости продвижения границы раздела воды и нефти в пористой среде // Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1969. С. 82–92.
4. *Индельман П. В., Кац Р. М., Швидлер М. И.* Численное моделирование процессов неустойчивого фильтрационного вытеснения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 20–27.
5. *Ентов В. М., Таранчук В. Б.* Численное моделирование процесса неустойчивого вытеснения нефти водой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 58–63.
6. *Bensimon D., Kadanoff L. P., Liang S.* Viscous flows in two dimetions // Rev. modern phys. 1986. V. 58. P. 977–999.
7. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
8. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
8.IX.1987