

УДК 532.546+539.217

ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

КАДЕТ В. В., СЕЛЯКОВ В. И.

Дается обобщение перколяционных моделей одно- и двухфазной фильтрации на случай трех фаз. Определены характерные области реализации одно-, двух- и трехфазной фильтрации. Представлены расчеты относительных фазовых проницаемостей для модельной функции плотности капилляров по радиусам. Проведено сравнение теории с имеющимися экспериментальными данными.

1. Модель среды и исходные предположения. Исследования трехфазной фильтрации как в теоретическом, так и в экспериментальном плане весьма немногочисленны [1–6], несмотря на большую практическую важность данного вопроса. В связи со значительными техническими сложностями экспериментального определения фазовых проницаемостей при трехфазной фильтрации особое значение приобретает теоретический анализ их поведения. В [7] предложена перколяционная модель неоднородной среды, позволяющая определять проницаемость среды по известной функции плотности распределения проводящих капилляров по радиусам. На основе этой модели в [8] проведен расчет фазовых проницаемостей в случае двухфазной фильтрации. Ниже результаты, полученные в [8], обобщаются на случай трехфазной фильтрации.

Решеточная модель структуры порового пространства состоит из узлов-пор, характеризуемых средним размером R , и связей-капилляров со средним радиусом $\langle r \rangle$, причем $R \gg \langle r \rangle$. Предполагается, что распределение связей в решетке по величине их эффективного радиуса r является хаотическим и описывается нормированной функцией плотности распределения $f(r)$, отличной от плотности распределения размеров узлов $\varphi(r)$.

Рассмотрим равновесную фильтрацию трех различных жидкостей, присвоив им номера от 1 до 3, возрастающие с уменьшением смачивающей способности флюида. Поскольку $R \gg \langle r \rangle$, объемом капилляров по сравнению с объемом пор можно пренебречь, в то время как их вклад в гидродинамическое сопротивление цепочек, состоящих из пор и капилляров, будет основным. Следовательно, в данной модели жидкости сосредоточены преимущественно в узлах решетки (порах), а проводимость (проницаемость) решетки по отношению к любой фазе будет определяться возможностью протекания ее по связям (поровым каналам). Тогда задача об определении проницаемости среды для какой-либо фазы есть задача теории перколяции [9–12] о формировании и развитии бесконечного кластера (БК) — бесконечно протяженной связной структуры из проводящих данную фазу капилляров.

Примем два упрощающих выкладки предположения. Размеры пор (узлов решетки) будем считать одинаковыми, а число пор (узлов), заполненных жидкостью i ($i=1, 2, 3$), пропорциональным количеству проводящих эту жидкость капилляров (связей).

Первое из них по существу означает, что, когда функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ не коррелируют, содержащие флюид поры произвольных размеров в рассматриваемых иерархических цепочках [7, 8] можно заменить порами

усредненного радиуса R без нарушения картины течения в принятой решеточной модели; при этом суммарный объем пор не меняется, а проводимость цепочек при $R \gg \langle r \rangle$ от размеров пор не зависит. Второе предположение также довольно естественно, поскольку в длинных цепочках число узлов и связей практически одинаково.

При построении модели существенно используется также условие равновесности процесса фильтрации. Это означает, что скорости фильтрации достаточно малы, и потому распределение фаз в поровом пространстве полностью определяется капиллярными силами. Тогда, если в исходном состоянии насыщенности фаз примерно равны (ни одна из фаз не «защемлена»), их последующее изменение будет сопровождаться перераспределением флюидов в капиллярах сетки, при котором более смачивающая фаза будет занимать капилляры меньшего радиуса, а менее смачивающая — более крупные. Существенные при больших скоростях фильтрации динамические эффекты, которые могут значительно влиять на характер перераспределения фаз в капиллярной сетке, в дальнейшем не учитываются.

2. Характерные области реализации одно-, двух- и трехфазной фильтрации. Оценим характерные насыщенности среды различными фазами (S_1, S_2, S_3), при которых осуществляются фильтрационные течения с различным числом фаз. Фильтрация любой фазы возможна лишь в случае, когда капилляры, заполненные этой фазой, образуют БК. В противном случае протекание данной фазы невозможно. Критерием образования БК к решетке является превышение долей капилляров, содержащих рассматриваемую фазу, пороговой величины p_c , зависящей как от размерности модели, так и от типа решетки [12]

$$p_c = \frac{D}{D-1} \frac{1}{z} \quad (2.1)$$

Здесь D — размерность модели, z — координационное число решетки (например, для кубической решетки $z=6$).

Оценим вероятность того, что капилляр содержит i -ю фазу. Пусть P_i — давление в этой фазе. Тогда доступными для нее являются лишь те капилляры, в которых капиллярное давление не превышает P_i . Естественно, в наиболее крупных капиллярах будет находиться третья фаза, обладающая наименьшей степенью смачивания твердой поверхности. В тонких капиллярах будет находиться первая фаза, обладающая наибольшей степенью смачивания. В капиллярах промежуточных радиусов будет находиться вторая фаза.

Граничные значения радиусов капилляров r_1 и r_2 , разбивающих $f(r)$ на зоны насыщения различными фазами (фиг. 1), определяются из условия фазового равновесия

$$r_j = 2\sigma_{j, j+1} \cos \theta_{j, j+1} / P_j, \quad j=1, 2 \quad (2.2)$$

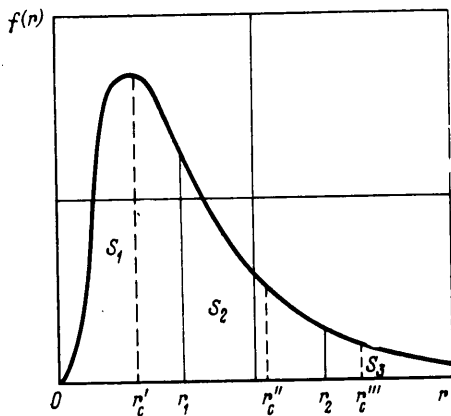
Здесь $\sigma_{j, j+1}$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела j -й и $(j+1)$ -й фаз, $\theta_{j, j+1}$ — угол смачивания твердой поверхности на контакте j -й и $(j+1)$ -й жидкостей.

В [8] показано, что с точностью до 15% i -му БК принадлежат все капилляры, радиусы которых удовлетворяют условию проникновения в них i -й фазы. Поэтому вероятности p_i того, что капилляр содержит i -ю фазу, определяются следующими выражениями:

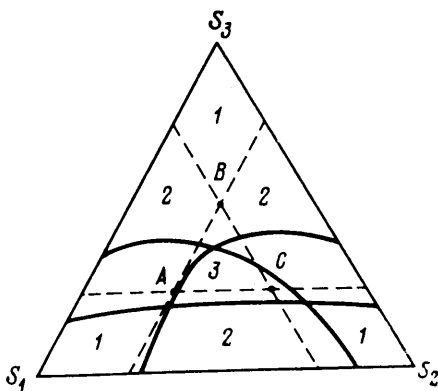
$$p_1 = \int_0^{r_1} f(r) dr, \quad p_2 = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr, \quad p_3 = \int_{r_2}^{\infty} f(r) dr \quad (2.3)$$

Соответственно условие протекания i -й фазы принимает вид

$$p_i \geq p_c \quad (2.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для количественного определения величины p_c необходимо знать тип решетки, адекватно моделирующей структуры порового пространства.

Реальное расположение и взаимная ориентация пор и каналов в среде являются хаотическими. В [13] приведены некоторые соображения в пользу того, что хаотическую структуру целесообразно моделировать простой кубической решеткой. В дальнейшем для определенности будем считать решетку кубической. При этом из (2.1) получаем $p_c = 1/4$.

Из соотношений (2.3) в рамках сделанных предположений следует, что $S_i = p_i$. Если нанести полученные таким образом оценки критических значений насыщенностей на треугольную диаграмму (фиг. 2) — штриховые линии внутри треугольника $S_1S_2S_3$ — получим ряд областей, отличающихся друг от друга числом участвующих в фильтрационном течении фаз. Цифрами 1 на фиг. 2 обозначены области однофазной фильтрации, при которой две фазы из трех оказываются «защемленными» (БК для этих фаз отсутствуют). При соотношениях насыщенностей, соответствующих областям 1, фильтруется только i -я компонента, где i — индекс вершины треугольника. В областях, отмеченных цифрами 2, «защемлена» одна из трех фаз и реализуется двухфазная фильтрация жидкостей i и j , где i, j — индексы сторон треугольника S_iS_j , к которым примыкают указанные зоны 2. В центре треугольника расположена область 3, где возможна одновременная фильтрация всех трех фаз.

Из диаграммы видно, что трехфазная фильтрация теоретически возможна лишь в небольшой окрестности центральной точки треугольника $S_1S_2S_3$. Отметим, что равновесная четырехфазная фильтрация в случае кубической решетки невозможна, поскольку выполнить условие типа (2.4) одновременно для четырех фаз нельзя. Одна из фаз в таком случае будет вынуждена фильтроваться в несвязном виде. При больших координационных числах решетки ($z > 6$) порог протекания в системе снижается и в принципе возможна равновесная фильтрация четырех и более фаз.

Интересно сравнить полученный теоретический результат с экспериментальными данными. К сожалению, экспериментальные исследования трехфазной равновесной фильтрации для случая $\mu_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$; μ — вязкость флюида), $\sigma_1 \cos \theta_1 > \sigma_2 \cos \theta_2 > \sigma_3 \cos \theta_3$ до настоящего времени не проводились. Известны лишь эксперименты Левретта [4], в которых вязкости фаз также существенно отличались ($\mu_1 \approx \mu_2 \gg \mu_3$). Результаты этих экспериментов для сравнения нанесены на той же треугольной диаграмме насыщенностей (сплошные линии внутри треугольника $S_1S_2S_3$).

Видно, что площади областей 3 примерно одинаковы как при теоретическом рассмотрении, так и в эксперименте, однако эксперименталь-

но найденный треугольник трехфазной фильтрации расположен несколько дальше от вершины S_3 . В том же направлении деформированы области 2, прилегающие к сторонам S_1S_3 и S_2S_3 . Это может быть связано с проявлением динамических эффектов.

Например, в связи с существенно меньшей вязкостью и, следовательно, большей подвижностью третьей фазы на динамической стадии фильтрации она может прорываться сквозь образец, изолируя при этом целики малоподвижных фаз 1 и 2. В результате в широком диапазоне изменения S_3 ($1 > S_3 \geq 0,35$) происходит однофазная фильтрация третьего флюида. При $S_3 < 0,35$, когда содержание в образце третьей фазы достаточно мало, чтобы различие в подвижностях фаз перестало определять характер их распределения в поровом пространстве, теоретическая и экспериментальная диаграммы различных областей трехфазной фильтрации совпадают с погрешностью $\sim 10\%$. Это говорит о хорошем совпадении теории и эксперимента для рассматриваемого случая равновесной трехфазной фильтрации.

3. Расчет относительных фазовых проницаемостей в различных областях фильтрации. Очевидно, что в областях 1 треугольной диаграммы отлична от нуля лишь одна относительная фазовая проницаемость, соответствующая вершине треугольника. В областях 2 реализуется двухфазное течение i -й и j -й фаз. Их фазовые проницаемости можно найти, используя зависимости, приведенные в [8]. Обобщение этих зависимостей на случай трехфазного течения позволяет определить относительные фазовые проницаемости и в области 3.

В [7] показано, что в рассматриваемой решетке в направлении приложенного градиента давления можно выделить параллельные цепочки капилляров, поперечные перетоки между которыми пренебрежимо малы. Далее вводится классификация этих цепочек по величине минимального радиуса составляющих их капилляров. Эффективная проницаемость цепочки, характеризуемой минимальным радиусом капилляра r_m , оценивается по формуле

$$I(r_m) \sim \int_{r_m}^{\infty} f(r) dr / \int_{r_m}^{\infty} f(r) \frac{dr}{r^4} \quad (3.1)$$

а плотность распределения таких цепочек по параметру r_m определяется выражением

$$F(r_m) \sim \left[\int_{r_m}^{\infty} f(r) dr - p_c \right]^{\nu} f(r_m) \quad (3.2)$$

где ν — универсальный индекс радиуса корреляции БК, зависящий лишь от размерности задачи [9, 12]. На основе (3.1) и (3.2) в [7] получено выражение, определяющее проводимость решеточной модели

$$K_0 = \frac{\nu \pi}{4d^2 (1-p_c)^{2\nu}} \int_0^{r_c} \left[\int_r^{r_c} f(r') dr' \right]^{\nu} f(r) \frac{dr}{I(r)} \quad (3.3)$$

Здесь d — период решетки, а величина r_c , которую можно назвать критическим радиусом, характеризует момент образования БК и определяется из условия

$$\int_{r_c}^{\infty} f(r) dr = p_c \quad (3.4)$$

Зависимость (3.3), как показано в [8], можно использовать для расчета относительных фазовых проницаемостей, учитывая, что i -я фаза мо-

жет протекать лишь по капиллярам, радиусы которых удовлетворяют условиям (2.2). Использование условий (2.2) позволяет «вырезать» из общей функции плотности распределения $f(r)$ ту ее часть $f_i(r)$, которая приходится на долю капилляров, содержащих i -ю фазу. В случае трехфазной фильтрации $f_i(r)$ имеют вид

$$f_i(r) = \begin{cases} 0; & r > r_1 \\ f(r); & r \leq r_1 \end{cases}; \quad f_2(r) = \begin{cases} 0; & r_1 > r > r_2 \\ f(r); & r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases}; \quad f_3(r) = \begin{cases} f(r); & r \geq r_2 \\ 0; & r < r_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Подставляя $f_i(r)$ вместо $f(r)$ в (3.3) и (3.4), находим абсолютные фазовые проницаемости $K_i(r_1, r_2)$ как функции величин r_1 и r_2 , характеризующих области насыщения капилляров i -й фазой. При этом насыщенности фаз задаются соотношениями (2.3). Относительные фазовые проницаемости вычисляются по формуле

$$k_i(r_1, r_2) = K_i(r_1, r_2) / K_0 \quad (3.6)$$

Они полностью определяются функцией плотности распределения капилляров по радиусам и порогом протекания системы, зависящим от типа решетки (координационного числа z).

Таким образом, выражения (2.3), (2.4), (3.3)–(3.6) с учетом (2.2) позволяют рассчитать относительные фазовые проницаемости в области 3. В частном случае $r_1 = r_2$ имеем $f_2(r) = 0$, и двухфазное течение реализуется непосредственно вдоль стороны $S_1 S_3$ треугольника $S_1 S_2 S_3$. Если же $r_1 \neq r_2$ и при этом какое-либо $p_i < p_c$, то имеет место двухфазная фильтрация в областях 2 с заземленной i -й фазой. Отметим, что фазовые проницаемости $k_1 = k_1(r_1)$ ($r_1 = 0, r_2 = r_1$) и $k_3 = k_3(r_2)$ ($r_1 = r_2, r_2 = \infty$) являются фактически лишь функциями соответственно r_1 и r_2 и вычисляются единственным образом для всех областей диаграммы. Это наблюдалось в экспериментах Левретта [4], где также отмечалось, что проницаемость наиболее смачивающей фазы (воды) зависит лишь от насыщенности данной фазой и нечувствительна к соотношению насыщенностей двух других фаз. В [3] данный вывод подвергается сомнению на основании полученных в [3] экспериментальных данных для фильтрации в области 2, прилегающей к стороне $S_1 S_2$ (фиг. 2). Однако, судя по описанию методики экспериментов [2, 3], существенную роль в них могли играть динамические эффекты, нарушающие условие равновесности.

Найдем фазовые проницаемости для модельной функции плотности распределения, сходной с использованной в [8]

$$f(r) = \frac{r_0}{r^2} \eta(r - r_0) \quad (3.7)$$

где $\eta(r - r_0)$ — функция Хевисайда. В дальнейшем будем полагать $r_0 = 1$. Подставляя (3.7) в (2.3), находим связь r_1 и r_2 с насыщенностями фаз: $S_1 = 1 - 1/r_1$; $S_3 = 1/r_2$; $S_2 = 1 - S_1 - S_3 = 1/r_1 - 1/r_2$. Очевидно, имеет смысл сразу получить соотношение для k_2 , поскольку значения k_1 и k_3 могут быть получены из него соответствующими предельными переходами. Связь критического радиуса r_c'' функции $f_2(r)$ с r_2 находим из (3.4) с учетом (3.7). (На фиг. 1 число штрихов над r_c соответствует индексу фазы i .)

Для упрощения вычислений полагаем $\nu = 1$ (вместо установленного в [11] значения $\nu \approx 0,9$). Тогда, подставляя r_c'' в (3.3), используя (3.5), (3.6) и пренебрегая в расчетах членами $\sim (r_c''/r_2)^5$, находим относительную фазовую проницаемость для второй фазы

$$k_2(S_1, S_3) = \frac{2}{27} \frac{1}{(S_3 + p_c)^2} \left\{ 1 - \frac{S_3}{2(S_3 + p_c)} - 3 \left(\frac{S_3 + p_c}{1 - S_1} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{2(2S_3 + p_c)}{3(1 - S_1)} + \frac{S_3(S_3 + p_c)}{2(1 - S_1)^2} \right] \right\} \eta(1 - S_1 - S_3 - p_c) \quad (3.8)$$

Для определения фазовой проницаемости k_2 необходимо знать две любые насыщенности из трех, связанных соотношением $S_1+S_2+S_3=1$.

Значения k_1 и k_3 получаем из (3.8), осуществляя предельный переход от трехфазной к двухфазной системе. Для этого в случае k_1 удобно устремить S_1 к нулю ($r_1 \rightarrow 0$). При этом получаем двухфазную систему, в которой формально роль S_1 будет играть насыщенность S_2 , а граница «раздела» фаз с точки зрения $f(r)$ есть r_2 . Величина r_2 однозначно определяется насыщенностью S_3 , которая в данном случае равна $1-S_1$. Следовательно, получим, что $k_1(S_1)=k_2(0, 1-S_1)$ или

$$k_1(S_1) = \frac{2}{27} \frac{1}{(1-S_1+p_c)^2} \left\{ 1 - \frac{1-S_1}{2(1-S_1+p_c)} - 3(1-S_1+p_c)^2 \times \right. \\ \left. \times [1^{-2/3}(2-2S_1+p_c) + 1/2(1-S_1+p_c)(1-S_1)] \right\} \eta(S_1-p_c)$$

Аналогично в случае k_3 устремляем к нулю S_3 ($r_2 \rightarrow \infty$). Теперь S_2 формально есть S_3 , а S_1 следует заменить на $1-S_3$. Получаем, что $k_3(S_3) = k_2(1-S_3, 0)$, т. е.

$$k_3(S_3) = \frac{1}{27} (32-6S_3^{-2}+S_3^{-3}) \eta(S_3-p_c)$$

Сопоставить теоретический расчет $k_2(S_1, S_3)$ с экспериментальными данными в области ABC трехфазной фильтрации не представляется возможным, поскольку последние отсутствуют. Однако хорошее качественное и количественное совпадение теории с экспериментом в областях одно- и двухфазной фильтрации (области 1 и 2 на фазовой диаграмме $S_1S_2S_3$), представленное ранее в [7, 8], а также в указанном выше случае [4] собственно трехфазной фильтрации, говорит в пользу предлагаемого теоретического описания на микроуровне процесса равновесной трехфазной фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Л.: Гостоптехиздат, 1963. 351 с.
2. Кундин С. А. Экспериментальные данные о фазовых проницаемостях при фильтрации трехкомпонентных смесей // Тр. Всесоюз. нефтегаз. науч.-исслед. ин-та. 1960. Вып. 28. С. 96-113.
3. Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К. и др. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. М.: Недра, 1969. 452 с.
4. Амикс Дж., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. М.: Гостоптехиздат, 1962. 572 с.
5. Динамика многофазных сред // Матер. V Всесоюз. семинара «Численные методы решения задач многофазной несжимаемой жидкости», 23-25 сент., 1980. Ташкент, 1980. 227 с.
6. Динамика многофазных сред // Матер. Всесоюз. семинара «Современные проблемы и мат. методы теор. фильтрации. Новосибирск, 1985. 234 с.
7. Селяков В. И. Проводимость зернистых и кавернозных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 12. С. 44-52.
8. Кадет В. В., Селяков В. И. Перколяционная модель двухфазной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 88-95.
9. Шкловский В. И., Эфрос А. Л. Теория протекания и проводимость сильно неоднородных систем // УФН. 1975. Т. 117. Вып. 3. С. 401-435.
10. Займан Дж. Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 591 с.
11. Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф. Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки и техники, ВИНТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет. 1986. Т. 24. С. 53-110.
12. Соколов И. М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // УФН. 1986. Т. 150. Вып. 2. С. 221-255.
13. Неймарк А. В. Перколяционный метод расчета распределения размеров пор в мезопористых материалах на основании изотерм адсорбции и десорбции в области гистерезиса // Журн. физ. химии. 1986. Т. 60. Вып. 7. С. 1745-1750.