

УДК 532.546

## **О ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБЛАСТЯХ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

**ПАНЬКО С. В.**

Исследование плоских задач нелинейной фильтрации в областях с заданными криволинейными границами наталкивается на значительные математические трудности, вызванные тем, что ни преобразование годографа, ни переход на плоскость комплексного потенциала не приводят к упрощению задачи.

В работе указано преобразование, которое в случае круговых границ отображает область течения на каноническую (полуплоскость), а преобразованная система, оставаясь в общем случае нелинейной, имеет существенно более простую структуру, нежели исходная.

Для введенной ранее модели закона сопротивления установлена возможность построения точных решений задачи об эксцентричной скважине внутри кругового контура питания и задачи о круговой батарее скважин в кольцевом (круговом) пласте. Найдена зависимость безразмерной интенсивности течения от эксцентриситета и определены границы застойных зон.

1. Задачи нелинейной фильтрации хорошо изучены в тех случаях, когда границы области течения состоят из прямолинейных проницаемых или непроницаемых участков и неизвестных непроницаемых, на которых модуль вектора скорости постоянен [1].

Если заданная граница области (или ее часть) криволинейная, то преобразование годографа [1] оказывается неэффективным, так как образ этой линии на плоскости  $(w, \theta)$ , где  $w, \theta$  — модуль и угол наклона вектора скорости, неизвестен. При переходе на плоскость комплексного потенциала  $W = -H + i\psi$  остаются нелинейными как сами уравнения, так и граничные условия. Подобного рода задачи рассматривались в [2] для модели [3] методами теории аналитических функций [4] и теории струй [5] и были сведены к нелинейному сингулярному интегральному уравнению типа Вилла [5]. Его решение и возвращение на плоскость течения осуществляется только численно. Для модели, предложенной в [6], задача об эксцентричной скважине внутри кругового контура питания аналитически и численно исследована в [7] во всем диапазоне изменения интенсивности течения и эксцентриситета. В рамках степенного закона и закона фильтрации с предельным градиентом эта же задача приближенно изучена в [8].

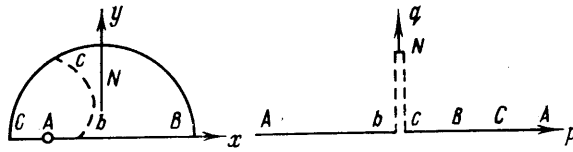
Данный класс задач для системы [1]

$$\nabla H = -\Phi(w) \frac{\mathbf{w}}{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad (1.1)$$

или эквивалентного уравнения

$$\operatorname{div}[\Phi^{-1}(|\nabla H|)\nabla H] = 0, \quad \Phi^{-1}(x\Phi(x)) = x \quad (1.2)$$

не рассматривался. Ниже указывается преобразование, которое в случае круговых границ отображает область течения на каноническую (полуплоскость), а преобразованная система, оставалась в общем случае нелинейной, имеет существенно более простую структуру, нежели исходная. Показана возможность построения точных решений для модели [9].



Фиг. 1

Рассмотрим систему (1.1), записанную в виде дифференциального соотношения

$$dz = e^{i\theta} \left[ -\frac{dH}{\Phi(w)} + i \frac{d\psi}{w} \right] \quad (1.3)$$

где  $z = x + iy$  — комплексная координата,  $H$  — приведенный напор,  $\psi$  — функция тока. Применим к (1.1) преобразование Лежандра [1] и перейдем к новой переменной  $\sigma$  так, что

$$w d\sigma = \Phi'(w) dw, \quad w = \Phi(\sigma) \quad (1.4)$$

тогда получим

$$(x \cos \theta + y \sin \theta) \Phi'(\sigma) = T_\sigma = p, \quad (-x \sin \theta + y \cos \theta) \Phi(\sigma) = T_\sigma = q \quad (1.5)$$

$$\psi = S - \frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} S_\sigma, \quad H = T - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} T_\sigma$$

$$S_\sigma = -\frac{\Phi''(\sigma)}{\Phi(\sigma)} T_\sigma, \quad T_\sigma = S_\sigma$$

Здесь и далее нижние буквенные индексы обозначают дифференцирование.

Обратимся к задаче определения поля напора и дебита скважины, находящейся в точке  $(-r, 0)$  внутри кругового контура питания радиуса  $R$ , на котором  $H=0$  (фиг. 1, а). Будем считать параметры течения  $Y=Q/2\pi\lambda R$  и  $X=r/R$  такими, что застойная зона  $D$  не образуется. Из второго соотношения (1.5) следует, что на оси симметрии, где  $y=0$ ,  $\theta=\pi$ ,  $\theta=0$ ,  $\theta=\pi$ , имеем  $T_\sigma=q=0$ . На контуре питания, где  $x^2+y^2=R^2$ ,  $H=0$ , согласно (1.3), получаем

$$dH=0, \quad xdx+ydy=0, \quad dz = ie^{i\theta} d\psi/\Phi'(\sigma) \quad (1.6)$$

Из двух последних соотношений (1.6) вытекает

$$T_\sigma = q = \Phi(\sigma) (-x \sin \theta + y \cos \theta) = 0$$

Таким образом, и на окружности  $|z|=R$  имеем  $q=0$ . Следовательно, граница области течения переходит в действительную ось  $q=0$ , а сама область течения отображается на верхнюю полуплоскость плоскости

$$\zeta = p + iq = T_\sigma + iT_\theta$$

Пусть теперь часть области течения занята застойной зоной. Вдоль ее границы  $w = \Phi'(\sigma) = 0$ . Тогда, в силу (1.5),  $T_\sigma = p = 0$ . В результате граница застойной зоны отобразится на разрез вдоль отрезка  $p=0$ ,  $0 < q < l$  плоскости  $\zeta$ . Это подсказывает выбор новых независимых переменных  $p$  и  $q$  (для модели [6]:  $\Phi(w) = G$ ,  $w < \lambda$ ,  $\Phi(w) = w$ ,  $w > \lambda$  — подобный прием был применен для исследования течений сильной и промежуточной интенсивности в [7]).

Положим

$$U = -T + \sigma T_\sigma + \theta T_\theta = -T + \sigma p + \theta q \quad (1.7)$$

Тогда, принимая во внимание (1.3) и (1.5), приходим к следующему уравнению для  $U(p, q)$

$$U_{qq} + \frac{\Phi''(U_p)}{\Phi(U_p)} U_{pp} = 0, \quad \sigma = U_p, \quad \theta = U_q \quad (1.8)$$

По известному решению уравнения (1.8) возвращение на плоскость течения осуществляется без дополнительных квадратур, при помощи формул перехода

$$z = \left[ \frac{p}{\Phi'(U_p)} + i \frac{q}{\Phi(U_p)} \right] \exp iU_q \quad (1.9)$$

Найдем граничные значения  $U(p, q)$ . В случае отсутствия застойной зоны очевидно

$$\theta = U_q = 0, \quad p \in AB, \quad \theta = U_q = \pi, \quad p \in AC \quad (1.10)$$

Так как на  $AB$   $|z| = R, q = 0$ , то из (1.9) следует

$$R\Phi'(U_p) = p, \quad U_p = F(p/R) \quad (1.11)$$

Если же имеется застойная зона, то к условиям (1.10), (1.11) добавляется условие на разрезе

$$\sigma = U_p = 0, \quad p = 0, \quad 0 < q < l \quad (1.12)$$

Таким образом, приходим к смешанной краевой задаче для уравнения (1.8) в верхней полуплоскости (во втором случае требуется дополнительно конформное отображение  $t = (\zeta^2 + l^2)^{1/2}$ ). Видно, что уравнение (1.8) проще, нежели (1.2). Для его решения, предварительно представив (1.7) в виде

$$\Delta U(p, q) = K(U_p) U_{pp}$$

естественно применить метод типа Рэлея — Янцена. Поскольку границы в преобразованной плоскости прямые, то к данному уравнению непосредственно применимы разностно-итерационные методы.

Совершенно аналогично можно показать, что задачи о круговой батарее скважин и круговом или кольцевом пласте также сводятся к смешанной краевой задаче в верхней полуплоскости с разрезом  $p = 0, 0 < q < l$  для уравнения (1.8).

2. Установим возможность построения точных решений рассматриваемых задач для модели [9]

$$\Phi(w) = \sqrt{w^2 + \lambda^2}, \quad w = \lambda \operatorname{sh} \sigma, \quad \Phi(w) = \lambda \operatorname{ch} \sigma \quad (2.1)$$

Очевидно, что уравнение (1.6) превращается в уравнение Лапласа. В результате приходим к смешанной краевой задаче для аналитической функции

$$W = \sigma - i\theta = U_p - iU_q \quad (2.2)$$

с условиями (1.10)–(1.12). Ее решение, ограниченное в точках  $B$  и  $C$  (скорость в этих точках конечна), дается формулами Келдыша — Седова [4].

В начале рассмотрим случай, когда застойная зона отсутствует; так как

$$\Phi(U_p) = \lambda \operatorname{ch} U_p, \quad \Phi'(U_p) = \lambda \operatorname{sh} U_p$$

то, согласно (1.11), имеем

$$\lambda R \operatorname{sh} U_p = p, \quad U_p = \operatorname{Arsh}(p/\lambda R) \quad (2.3)$$

В результате приходим к следующей задаче в верхней полуплоскости

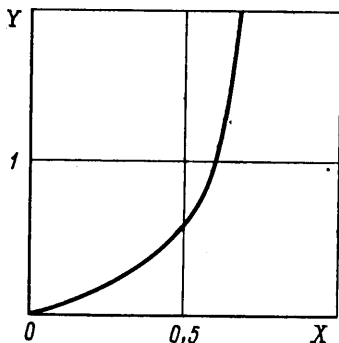
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W &= -\theta = 0, \quad -\infty < p < \alpha \\ \operatorname{Re} W &= \sigma = \operatorname{Arsh} p/\lambda R = f(p), \quad \alpha < p < \beta \\ \operatorname{Im} W &= -\theta = -\pi, \quad \beta < p < \infty \end{aligned}$$

Ее решение имеет вид

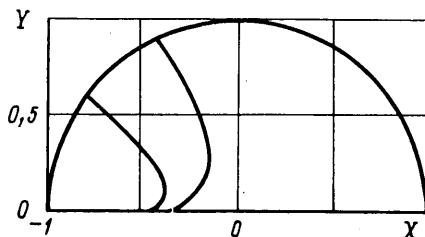
$$W(\xi) = -i\pi + 2 \ln \frac{\sqrt{\xi-\alpha} + \sqrt{\xi-\beta}}{\sqrt{\beta-\alpha}} + \frac{\sqrt{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}{i\pi} I(\xi)$$

$$I(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\tau)}{\sqrt{(\beta-\tau)(\tau-\alpha)}} \frac{d\tau}{\tau-\xi} \quad (2.4)$$

Определим связь между  $\alpha$ ,  $\beta$  и безразмерными параметрами  $X$  и  $Y$ . Так как при  $\xi \rightarrow \infty$   $z \rightarrow -\rho$ , то из (1.9) и (2.4) находим, вычисляя предел



Фиг. 2



Фиг. 3

$z$  при  $\xi \rightarrow \infty$  вдоль положительной оси  $p > \beta$ ,  $q = 0$

$$\rho = \frac{\beta-\alpha}{2\lambda} \exp(-I), \quad I = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{(\beta-\tau)(\tau-\alpha)}} \quad (2.5)$$

Подсчитаем дебит источника

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0, w \rightarrow \infty} 2\pi r w = \lim_{\xi \rightarrow \infty} 2\pi\lambda |z + \rho| \operatorname{sh} U_p$$

Принимая во внимание (2.5), после несложных выкладок получим

$$Q = \pi\lambda\rho \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \exp I \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) устанавливаем требуемую связь

$$X = \frac{\beta-\alpha}{2\lambda R} \exp(-I), \quad Y = X \frac{\beta+\alpha}{2(\beta-\alpha)} \exp I \quad (2.7)$$

Пусть на контуре питания скорость в точке  $B$  оказалась равной нулю  $\alpha = 0$ . Тогда соотношения (2.7) приводят к уравнению кривой, которая разделяет режим течения без застойной зоны и с застойной зоной на плоскости параметров  $X$ ,  $Y$ ; их область определения есть полуплоскость  $0 < X < 1$ ,  $0 < Y < \infty$

$$X = 2Y \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Arsh} [2Y(1 - \cos \varphi)] d\varphi \right\} \quad (2.8)$$

3. Рассмотрим случай, когда часть области движения занята застойной зоной. При помощи функции

$$t = (\xi^2 + l^2)^{1/2} \quad (3.1)$$

полуплоскость с выброшенным отрезком  $p=0$ ,  $0 < q < l$  отобразится на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t > 0$ . Аналитическая функция  $W = U_p - iU_q$  принимает на действительной оси следующие значения

$$\begin{aligned} \text{Im } W &= 0, \quad -\infty < \tau < -l; \quad \text{Re } W = 0, \quad -l < \tau < l \\ \text{Re } W &= \text{Arsh } \sqrt{\tau^2 - l^2} / \lambda R = \varphi(\tau), \quad l < \tau < a \\ \text{Im } W &= -\pi, \quad a < \tau < \infty, \quad a^2 = c^2 + l^2 \end{aligned}$$

где  $c$  и  $l$  — неизвестные пока постоянные.

Решение данной задачи, ограниченное в точках  $-l$  и  $a$ , имеет вид

$$W(t) = -i\pi + 2 \ln \frac{\sqrt{t+l} + \sqrt{t-a}}{\sqrt{a+l}} + \frac{\sqrt{(t+l)(a-t)}}{i\pi} I_1(t) \quad (3.2)$$

$$I_1(t) = \int_l^a \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau+l)(a-\tau)(\tau-t)}}$$

Как и в предыдущем случае определим положение источника и дебит скважины. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} X &= \frac{a+l}{2\lambda} \exp(-I_1), \quad Y = X \frac{a+l}{2(a-l)} \exp I_1 \\ I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_l^a \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau+l)(a-\tau)}} \end{aligned}$$

Если застойная зона отсутствует ( $l \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow \beta$ ), то приходим к ранее полученному выражению (2.8).

Определим также формулу границы застойной зоны, используя формулы перехода и равенства (3.1), (3.2). На границе застойной зоны  $p=0$ ,  $U_p=0$ . Раскрывая неопределенность в первом слагаемом (1.9) и учитывая (3.1), получим

$$\begin{aligned} \lambda z &= \left[ \frac{t}{\sqrt{l^2 - t^2}} \frac{dt}{dU_q} + iq \right], \quad q = \sqrt{l^2 - t^2}, \quad |t| < l \\ -iU_q &= -i\pi + 2 \ln \frac{\sqrt{t+l} + \sqrt{t-a}}{\sqrt{l+a}} + \frac{\sqrt{(t+l)(a-t)}}{i\pi} I_1(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Найдем положение острия застойной зоны и точку пересечения границы застойной зоны и контура питания. Острию застойной зоны отвечает  $t = -l$ ,  $U_q = 0$ . Тогда положение острия определится координатами

$$\begin{aligned} \lambda x \left[ 1 + \frac{a+l}{2\pi} I_1(-l) \right] &= -\sqrt{\frac{l(l+a)}{2}}, \quad y = 0 \\ I_1(-l) &= \int_l^a \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau+l)(a-\tau)(\tau+l)}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично для точки пересечения имеем

$$z = R \exp[iU_q(l)]$$

$$U_q(l) = \pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{i \frac{a-l}{2l}} - \frac{\sqrt{2l(a-l)}}{\pi} I_1(l) \quad (3.5)$$

$$I_1(l) = \int_l^a \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - l^2)(a-\tau)(\tau-l)}}$$

Вид границы застойной зоны для значений параметров  $4l=0,5$ ;  $1$ ;  $a=3l$  представлен на фиг. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Енгов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 198 с.
2. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 141 с.
3. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 166-169.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
5. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. *Енгов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* К расчету целиков остаточной вязкопластичной нефти // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 347-850.
7. *Енгов В. М., Панков В. Н., Панько С. В.* О форме целика остаточной вязкопластичной нефти при разработке круговой залежи // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 80-93.
8. *Хахамович М. В.* Оценка дебитов скважины при нелинейной фильтрации. // Тр. Моск. ин-та нефтехим. и газ. пром.-сти. 1985. № 181. С. 86-94.
9. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 177-181.

Томск

Поступила в редакцию  
22.XII.1987