

УДК 532.5.013.4

**КОРОТКОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В УДАРНОМ СЛОЕ
СОВЕРШЕННОГО ГАЗА**

ГУЩИН В. Р., ФЕДОРОВ А. В.

При обтекании тел с большими скоростями потока образуется тонкий ударный слой, ограниченный скачком уплотнения и обтекаемой поверхностью. Ламинарно-турбулентный переход течения в ударном слое может быть обусловлен развитием неустойчивых возмущений аналогично течению в пограничном слое [1]. Задача устойчивости плоскопараллельного ударного слоя относительно двумерных возмущений численно исследовалась в [2, 3]. Рассмотрен диапазон относительно небольших волновых чисел, соответствующих младшим модам собственных колебаний. В [4] асимптотическими методами рассмотрена коротковолновая часть спектра невязких трехмерных возмущений. Показано, что возможны режимы, на которых в ударном слое выделяются области, имеющие свойства акустических волноводов.

В настоящей работе асимптотическими методами исследуется режим двух взаимодействующих волноводов. В результате анализа дисперсионного соотношения обнаружена коротковолновая неустойчивость акустического типа. Показано, что она является конвективной. Выполнено качественное сравнение с прямыми численными расчетами на примере простой модели течения в ударном слое.

1. Рассматривается ламинарное течение совершенного газа в тонком двумерном ударном слое между скачком уплотнения и обтекаемой поверхностью. Предполагается, что угол наклона скачка уплотнения к стенке $\theta_s \rightarrow 0$. Характерный масштаб δ поперек ударного слоя много меньше характерного масштаба L вниз по потоку. Поэтому в главном приближении по малому параметру $\epsilon = \delta/L$ основное течение считается локально плоскопараллельным.

Вводится ортогональная система координат x, y, z . Ось x направлена вниз по потоку, ось y — по нормали к стенке, ось z — в трансверсальном направлении. Характерный масштаб длины δ — расстояние от обтекаемой поверхности до скачка уплотнения. Основное течение в ударном слое описывается профилями x -компоненты скорости $U(y)$ и температуры $T(y)$, обезразмеренными по скорости U_2 и температуре T_2 за скачком уплотнения, $y \rightarrow 1-0$.

На основное течение накладывается малое трехмерное возмущение вида

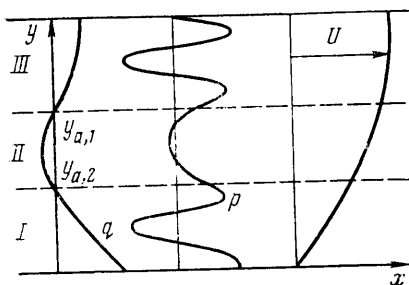
$$(u_1, v_1, w_1, p_1, \theta_1) = \text{Re}[(u, v, w, p, \theta) \exp(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)]$$

где $(u_1, v_1, w_1, p_1, \theta_1)$ — вектор-функция, зависящая от x, y, z, t , компоненты которой являются возмущениями x -, y -, z -компоненты скорости, давления и температуры соответственно; u, v, w, p, θ — комплексные амплитуды, зависящие от y, α, β, ω ; α, β — волновые числа в x - и z -направлении; ω — частота, отнесенная к U_2/δ , t — безразмерное время. Следуя [4], в невязком пределе имеем краевую задачу для амплитуды возмущения давления

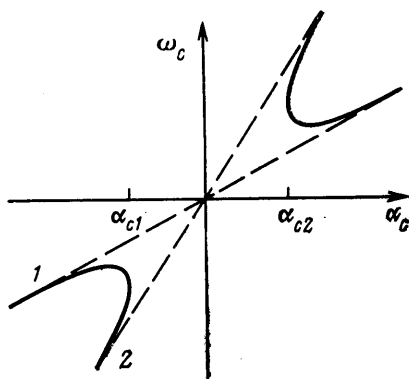
$$p'' - \left(\frac{2U'}{U-c} - \frac{T'}{T} \right) p' + \alpha^2 q p = 0 \tag{1.1}$$

$$p'(0) = p(1) = 0 \tag{1.2}$$

$$q = \frac{M^2 (U-c)^2}{T} - \kappa^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Где $\kappa^2 = 1 + \beta^2/\alpha^2$, $c = \omega/\alpha$ — фазовая скорость, M — число Маха на внешней границе ударного слоя, $y \rightarrow 1-0$, штрих обозначает дифференцирование по y .

Рассматривается коротковолновая часть спектра, $\alpha \gg 1$, $\kappa = O(1)$, $M > 1$. В [4] с помощью метода ВКБ показано, что структура собственных функций и дисперсионного соотношения $\alpha(\omega)$ определяется поведением функции q . Для нейтральных возмущений (α, ω — вещественные) собственные функции имеют осциллирующий по y характер в областях, где $q > 0$. Эти зоны являются волноводами, в которых развиваются волны дискретного спектра. В областях, где $q < 0$, возмущение экспоненциально затухает. Интересен режим двух взаимодействующих волноводов, схема которого показана на фиг. 1 (необходимо поменять $y_{a,2}$ и $y_{a,1}$). Взаимодействие собственных колебаний нижнего волновода (область I) с модами верхнего волновода (область III) происходит через область II. В [4] для данного режима получено дисперсионное соотношение

$$\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = -\frac{\cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{4 \exp(2\alpha J)} [1 + O(\alpha^{-1})] \quad (1.3)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + \alpha \int_0^{y_{a,1}} \sqrt{q} dy, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \alpha \int_{y_{a,2}}^1 \sqrt{q} dy, \quad J = \int_{y_{a,1}}^{y_{a,2}} \sqrt{-q} dy$$

где $y_{a,1}, y_{a,2}$ — точки поворота, в которых $q=0$.

При слабом взаимодействии, когда $\lambda = [4 \exp(2\alpha J)]^{-1} \ll 1$, дисперсионное соотношение расщепляется на два. Собственные значения для каждого волновода можно искать в виде разложения по малому параметру λ . В главном приближении $\cos \varphi_1 = 0, \sin \varphi_2 = 0$, откуда

$$\alpha \int_0^{y_{a,1}} \sqrt{q} dy = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \alpha \int_{y_{a,2}}^1 \sqrt{q} dy = \frac{3}{4} \pi + \pi m \quad (1.4)$$

Здесь n, m — целые числа, (1.4) — дисперсионные соотношения для нижнего и верхнего волноводов соответственно.

Разложения по λ несправедливы в окрестности точек синхронизма ω_* , для которых $\alpha_n(\omega_*) = \alpha_m(\omega_*)$ [5]. В этом случае даже при малых λ возникает сильная связь между волнами верхнего и нижнего волноводов. Волны в окрестности точек синхронизма теряют индивидуальность. Исследуем свойства дисперсионных соотношений (1.4). Дифференцируя

по ω , имеем

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial \omega} = \int_0^{y_{a,1}} (U-c) \frac{dy}{a^2 \sqrt{q}} \Big/ \int_0^{y_{a,1}} [(U-c)U - \kappa^2 a^2] \frac{dy}{a^2 \sqrt{q}}$$

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial \omega} = \int_{y_{a,2}}^1 (U-c) \frac{dy}{a^2 \sqrt{q}} \Big/ \int_{y_{a,2}}^1 [(U-c)U - \kappa^2 a^2] \frac{dy}{a^2 \sqrt{q}}$$

где $a(y) = \sqrt{T(y)}/M$ — местная скорость звука.

Так как $U < c - a(y)$ для $0 < y < y_{a,1}$, то групповая скорость волн нижнего волновода $v_n = (\partial \alpha_n / \partial \omega)^{-1} > 0$. Для $y_{a,2} < y < 1$, $U > c + a(y)$, значит, волны верхнего волновода имеют групповую скорость $v_m = (\partial \alpha_m / \partial \omega)^{-1} > 0$. Из (1.4) следует, что предельные фазовые скорости

$$c_{m,\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\omega}{\alpha_m(\omega)} \right] = 1 - \frac{\kappa}{M}, \quad c_{n,\infty} = \frac{\kappa \sqrt{T(0)}}{M} > 0$$

Так как групповые скорости и предельные фазовые скорости положительны, волны верхнего и нижнего волноводов относятся к классу попутных волн, развивающихся вниз по потоку [5].

Рассмотрим окрестность точки синхронизма ω_* , в которой $\alpha_n(\omega_*) = \alpha_m(\omega_*) = \alpha_*$. Раскладывая (1.3) вблизи ω_* , α_* и переходя к переменным $\alpha_c = \alpha - \alpha_*$, $\omega_c = \omega - \omega_*$, имеем

$$\left(\alpha_c - \frac{\omega_c}{v_1} \right) \left(\alpha_c - \frac{\omega_c}{v_2} \right) = \lambda A$$

$$v_1 = v_n(\omega_*), \quad v_2 = v_m(\omega_*), \quad A = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \right)_{\omega=\omega_*}^{-1} \quad (1.5)$$

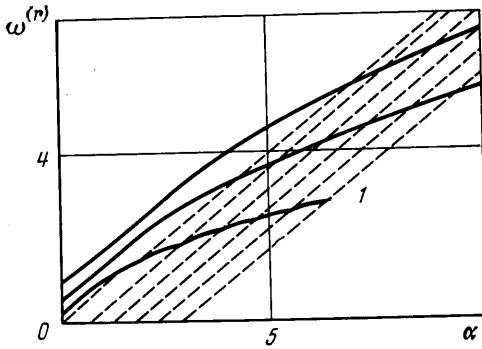
Пользуясь определениями φ_1 , φ_2 , нетрудно показать, что $A < 0$. Выше получено, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Пусть для определенности $v_2 > v_1$, тогда дисперсионная кривая $\alpha_c(\omega_c)$ при вещественных α_c , ω_c имеет вид, изображенный на фиг. 2. В области $|\alpha_c| < 2\sqrt{|\lambda|} |A| v_1 v_2 / |v_1 - v_2|$ собственные значения $\omega_c(\alpha_c)$ комплексные. Построим аналитическое продолжение $\omega_c(\alpha_c)$ в $\sqrt{|\lambda|}$ — окрестности точки синхронизма $\alpha_c = 0$. Для этого соединим точки ветвления $\alpha_{c1,2} = \mp 2\sqrt{|\lambda|} |A| v_1 v_2 / |v_1 - v_2|$ разрезом, проходящим по вещественной оси в комплексной плоскости α_c . Фиксируем ветви дисперсионного соотношения (1.5) условием

$$\omega_{c1,2}(\alpha_c) = \frac{\alpha_c}{2} (v_1 + v_2) \pm \sqrt{\left| \frac{\alpha_c^2}{4} (v_1 - v_2)^2 + \lambda A v_1 v_2 \right|}, \quad \alpha_c < \alpha_{c1}$$

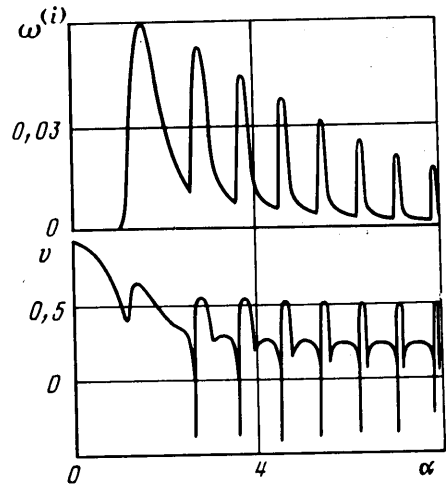
При обходе точки ветвления α_{c1} получим на нижнем берегу разреза

$$\omega_{c1,2} = \frac{\alpha_c}{2} (v_1 + v_2) \pm i \sqrt{\left| \frac{\alpha_c^2}{4} (v_1 - v_2)^2 + \lambda A v_1 v_2 \right|}$$

В точке синхронизма мнимая часть частоты $\omega_{c1,2}^{(i)}(0) = \pm \sqrt{|\lambda|} |A| v_1 v_2$ достигает максимальных по модулю значений (здесь и далее индексы i , r обозначают мнимую и вещественную части комплексной величины). Следовательно, одна из волн в окрестности точки синхронизма неустойчива. Так как неустойчивость обусловлена взаимодействием волн, относящихся к классу попутных, она является конвективной согласно критерию [5]. Разрешая (1.5) относительно $\alpha_c(\omega_c)$, получаем для максимального инкремента пространственного усиления $\sigma = -\alpha_{c1}^{(i)}(0) = \sqrt{|\lambda|} |A|$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, в области сильного взаимодействия волноводов возникает неустойчивость акустического типа. С ростом номера взаимодействующих мод параметр $\lambda \rightarrow 0$, инкременты нарастания σ уменьшаются пропорционально $\sqrt{\lambda}$. По такому же закону сужается область взаимодействия. Отметим, что с ростом угла наклона фронта волны (κ увеличивается) взаимодействие ослабевает. Поэтому акустическая неустойчивость наиболее ярко проявляется для двумерных волн с $\beta=0$, $\kappa=1$.

2. Для иллюстрации результатов асимптотического анализа выполнены численные расчеты системы (1.1), (1.2). Основное течение в ударном слое полагалось изотермическим, $T(y)=1$, и представляло собой плоскопараллельный пограничный слой с числом $\text{Pr}=1$, безразмерным коэффициентом вязкости $\mu=T=1$, показателем адиабаты $\gamma=1,001$. Между скачком уплотнения и пограничным слоем поток считался однородным. Безразмерная толщина вытеснения пограничного слоя $\delta^*=0,276$. Расчеты выполнены для двумерных возмущений при числе $M=5$.

На фиг. 3 показаны зависимости $\omega^{(r)}(\alpha)$. Сплошные кривые соответствуют волнам нижнего волновода, пунктирные — верхнего. Для фазовых скоростей $M^{-1} < c < 1 - M^{-1}$ реализуется режим двух взаимодействующих волноводов. Структура дисперсионных кривых согласуется с асимптотическим анализом. В окрестности их пересечений расположены точки синхронизма.

На фиг. 4 показаны зависимости $\omega^{(i)}(\alpha)$ и $v(\alpha) = \partial \omega^{(r)} / \partial \alpha$ при движении вдоль ветви 1 на фиг. 3. Из расчетов следует, что точки ветвления немного смещены в верхнюю полуплоскость комплексных α и их обход происходит снизу. В соответствии с предыдущим рассмотрением реализуются положительные инкременты роста $\omega^{(i)}$ с максимальными значениями вблизи точек синхронизма. С увеличением α области сильного взаимодействия сужаются, инкременты уменьшаются, точки ветвления стягиваются к действительной оси. В их окрестности наблюдаются резкие провалы в зависимости $v(\alpha)$ на фиг. 4. Групповые скорости быстро выходят на асимптотические значения в точках синхронизма $v(\alpha_*) = (v_1 + v_2) / 2 = 0,5$.

Отметим, что в длинноволновой части спектра необходимо специальное исследование. Однако из результатов расчета, показанных на фиг. 3, 4, видно, что топология окрестностей точек синхронизма одинакова во всем диапазоне топологических чисел. Поэтому следует ожидать, что неустойчивость при $|\alpha| \ll 1$ также имеет конвективный тип.

Аналогично можно исследовать устойчивость ударного слоя с более сложными распределениями скорости $U(y)$ и температуры $T(y)$. Причиной возникновения акустической неустойчивости по-прежнему будет синхронизация мод в волноводах. Учет малых, но конечных углов наклона скачка уплотнения к обтекаемой поверхности приводит к усложнению граничных условий для возмущений на верхней границе ударного слоя. Однако это не влечет за собой качественных изменений рассмотренной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 145 с.
2. Петров Г. В. Влияние скачка уплотнения, ограничивающего гиперзвуковой ударный слой, на устойчивость пограничного слоя // Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 25–34.
3. Petrov G. V. Stability of thin viscous shock layer on wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-Turbulent Transition. IUTAM Symp. Novosibirsk, 1984. P. 487–493.
4. Гуцин В. Р., Федоров А. В. Асимптотическая структура вязких возмущений в тонком ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 72–79.
5. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.XI.1987