**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1988**

УДК 532.529.6

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ДОЙНИКОВ А. А., ЗАВТРАК С. Т.

Взаимодействию малых сферических частиц, совершающих колебания в жидкости, посвящено множество работ (например, [1–4]), где в качестве малых частиц рассматривались как газовые пузырьки, так и твердые частицы. В этих работах жидкость, окружающая частицы, предполагалась несжимаемой. Подобная идеализация существенно упрощает задачу, однако не всегда позволяет достаточно полно изучить реальный процесс. Учет сжимаемости жидкости, как показано ниже, приводит к появлению новых эффектов. В связи с этим представляется интересным выяснить общую структуру сил взаимодействия двух малых частиц, колеблющихся в сжимаемой жидкости.

В [5] получено общее выражение для силы взаимодействия двух сферических частиц, совершающих произвольные моно- и дипольные колебания в несжимаемой жидкости. В это выражение помимо силы Бьеркнеса, обусловленной пульсациями радиусов частиц, вошла сила Кенига, обусловленная осцилляциями их центров, и перекрестные силы. В настоящей работе решена аналогичная задача, но с учетом сжимаемости жидкости. Показано, что учет сжимаемости жидкости приводит к целому ряду следствий: появлению у сил Бьеркнеса и Кенига дальнодействующих составляющих; зависимости знаков этих сил соответственно не только от разности фаз пульсаций радиусов пузырьков и осцилляций их центров, но и фазы запаздывания; появлению у сил Бьеркнеса и Кенига тангенциальных составляющих в случае вынужденных колебаний пузырьков, например в поле звуковой волны; аналогичному изменению структуры перекрестных сил.

Рассмотрим два газовых сферических пузырька, центры которых также осциллируют в жидкости. Для простоты будем считать, что пузырьки совершают дипольные движения только вдоль линии, соединяющей их равновесные центры. Частóты моно- и дипольных колебаний примем одинаковыми.

Потенциал φ поля скоростей жидкости, создаваемого пузырьками, должен удовлетворять уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхности пузырьков

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_i}=v_i+u_i\cos\theta_i \qquad (r_i=R_i)$$

где k — волновое число; индекс $i=1$, 2 соответствует номеру пузырька; $(r_i,\ \theta_i)$ — сферические координаты, связанные с равновесными центрами пузырьков; v_i — комплексные скорости пульсаций радиусов пузырьков; u_i — комплексные скорости осцилляций их центров.

Потенциал скоростей жидкости представим в виде суперпозиции потенциалов звукового поля, создаваемого пузырьками, т. е. $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. Каждый из них удовлетворяет краевым задачам

$$\Delta\varphi_i+k^2\varphi_i=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial r_i}=v_i+u_i\cos\theta_i \qquad (r_i=R_i); \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial r_j}=0 \qquad (r_j=R_j,\ j\neq i)$$

Считая, что размеры пузырьков существенно меньше расстояния l

между ними, будем проводить вычисления с точностью до членов 3-го порядка малости по параметрам $R_{1,2}/l$. Используя общее решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах (в качестве оси z выбрана линия, соединяющая равновесные центры пузырьков), потенциалы φ_1 и φ_2 запишем в виде

$$\varphi_i=a_{0i}h_0^{(1)}(kr_i)+a_{1i}h_1^{(1)}(kr_i)P_1(\cos\theta_i)+a_{2i}h_2^{(1)}(kr_i)P_2(\cos\theta_i)+$$
$$+a_{3i}h_0^{(1)}(kr_j)+a_{4i}h_1^{(1)}(kr_j)P_1(\cos\theta_j)+$$
$$+a_{5i}h_2^{(1)}(kr_j)P_2(\cos\theta_j)+a_{6i}h_3^{(1)}(kr_j)P_3(\cos\theta_j)\qquad(j\neq i)\qquad(2)$$

где $h_n^{(1)}(kr)$ — сферические функции Ханкеля 1-го рода, $P_n(\cos\theta_i)$ — полиномы Лежандра.

Коэффициенты a_{ni} $(n=0, 1, \ldots, 6)$ находятся из граничных условий (1). При этом для каждой совокупности коэффициентов возникает система семи линейных алгебраических уравнений, которые ввиду громоздкости выписывать не будем. Решение этой системы существенно упрощается, если решать задачу в приближении $kR_{1,2}\ll 1$, т. е. считать размеры пузырьков малыми в сравнении с длиной звуковой волны. Удерживая в выражениях для коэффициентов a_{ni} только главные по параметрам $kR_{1,2}\ll 1$ члены, получим следующие соотношения:

$$a_{0i}=-iv_ikR_i^2,\quad a_{1i}=-{}^1/_2iu_ik^2R_i^3,\quad a_{2i}=a_{3i}=a_{6i}=0$$
$$a_{41}=\frac{ik^2R_1^2R_2^3\exp(ikl)}{2l^2}\left(\frac{u_1R_1}{l}+v_1\right),\quad a_{42}=\frac{ik^2R_2^2R_1^3\exp(ikl)}{2l^2}\left(\frac{u_2R_2}{l}-v_2\right)\qquad(3)$$
$$a_{51}=-\frac{2ik^3R_1^2R_2^5\exp(ikl)}{9l^3},\quad a_{52}=-\frac{2ik^3R_2^2R_1^5\exp(ikl)}{9l^3}$$

При таких значениях коэффициентов потенциалы φ_1 и φ_2 будут удовлетворять краевым задачам (1) с точностью до членов 3-го порядка малости по $R_{1,2}/l$.

Для получения силы взаимодействия составим полный лагранжиан L системы двух колеблющихся пузырьков [4]. Лагранжиан будем вычислять с точностью до квадратичных по полю членов и в нулевом приближении по $kR_{1,2}$

$$L=T-U-U_n=\frac{\rho}{2}\int(\nabla\varphi)^2\,d\Omega-\int\frac{P'^2}{2\rho c^2}\,d\Omega+\int\limits_{(1,2)}(P-P_0)\,d\Omega'\qquad(4)$$

Здесь T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергия жидкости (интегрирование ведется по всему объему, занимаемому жидкостью); U_n — потенциальная энергия пузырьков (интегрирование ведется по изменениям их объемов, кинетической энергией газов пренебрегается); $P'=-\rho\dot\varphi$ — давление волны, излучаемой пузырьками; ρ — плотность жидкости; c — скорость звука в чистой жидкости; P — давление газов в пузырьках; P_0 — статическое давление, которое может содержать в себе также давление падающей звуковой волны.

Поскольку будут вычисляться средние во времени силы, действующие между пузырьками, лагранжиан L необходимо усреднить по времени. Используя уравнение Гельмгольца, преобразуем выражение для $\langle T\rangle$ в поверхностный и объемный интегралы

$$\langle T\rangle=-\frac{\rho}{2}\int\limits_{(S_{1,2})}\langle\varphi\,\nabla\varphi\rangle d\mathbf{S}+\frac{\rho}{2}\int\limits_{(S_R)}\langle\varphi\,\nabla\varphi\rangle d\mathbf{S}_R+\frac{1}{2}k^2\beta\int\langle\varphi^2\rangle d\Omega\qquad(5)$$

Нетрудно убедиться в том, что третий член (5) после подстановки в усредненный лагранжиан $\langle L\rangle$ компенсирует потенциальную энергию жидкости $\langle U\rangle$, а второй член (5) при $R\to\infty$ стремится к нулю.

При вычислении поверхностных интегралов в формуле (5) и потенциальной энергии пузырьков в (4) необходимо учесть, что как пульсации радиусов, так и осцилляции центров могут быть сдвинуты по фазе. Так, например, если рассматривать вынужденные пульсации радиусов пузырьков в поле плоской звуковой волны давления $P_a = A\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ ($\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, A — амплитуда волны, ω — круговая частота), то в системе координат, связанной с первым пузырьком, падающая волна $P_a \approx A\exp(-i\omega t)$, а в системе координат, связанной со вторым пузырьком, $P_a \approx A\exp(-i\omega t + ik_z l)$. Таким образом, в окончательную формулу для $\langle L\rangle$ должны войти соответствующие разности фаз и, кроме того, разность фаз kl, обусловленная конечностью времени распространения звуковой волны от одного пузырька к другому (см. формулы (3)).

Нетрудно показать, что при данной постановке задачи $\langle U_n\rangle$ не зависит от параметра l и, следовательно, вклада в силу взаимодействия не дает.

Окончательно для $\langle L\rangle$ получим

$$\langle L\rangle = \langle L_0\rangle + \pi\rho\cos(kl)\left[\frac{2v_1v_2R_1^2R_2^2\cos\alpha_1}{l} + \frac{u_1v_2R_1^3R_2^2\cos\alpha_2}{l^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{u_2v_1R_2^3R_1^2\cos\alpha_3}{l^2} - \frac{u_1u_2R_1^3R_2^3\cos\alpha_4}{l^3}\right] \tag{6}$$

где $\langle L_0\rangle$ не зависит от l.

Здесь v_1 и v_2 — теперь уже действительные амплитуды скоростей пульсаций радиусов пузырьков; u_1 и u_2 — действительные амплитуды скоростей осцилляций их центров; α_1 — разность фаз пульсаций радиусов пузырьков; α_2 — разность фаз между пульсациями радиуса 2-го пузырька и осцилляциями центра 1-го; α_3 — разность фаз между пульсациями радиуса 1-го пузырька и осцилляциями центра 2-го; α_4 — разность фаз между осцилляциями центров пузырьков.

Отметим, что при $kl \ll 1$ формула (6) приобретает такой же формальный вид, как и соответствующее выражение, полученное в [5].

Уже по одному виду $\langle L\rangle$ можно сделать ряд интересных выводов, о которых говорилось в начале статьи. Так, члены лагранжиана, пропорциональные (v_1v_2) и (u_1u_2), которые дадут соответственно силы Бьеркнеса и Кенига, зависят не только от разности фаз α_1 и α_4, но и фазы запаздывания kl. Это означает появление дальнодействующих составляющих у сил Бьеркнеса и Кенига. Действительно, вычисляя полную обобщенную силу, действующую, например, на 2-й пузырек, по формуле $F = \partial\langle L\rangle/\partial l$ (см. выражение 40.6 в [6]) имеем

$$F^{(2)} = F_{B}^{(2)} + F_{K}^{(2)} + F_{BK}^{(2)} \tag{7}$$

$$F_B^{(2)} = -\frac{2\pi\rho v_1v_2R_1^2R_2^2\cos(kl)\cos\alpha_1}{l^2} -$$

$$-\frac{2\pi\rho v_1v_2R_1^2R_2^2}{l}\left[k\sin(kl)\cos\alpha_1 + \cos(kl)\sin\alpha_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial l}\right] \tag{8}$$

$$F_K^{(2)} = \frac{3\pi\rho u_1u_2R_1^3R_2^3\cos(kl)\cos\alpha_4}{l^4} +$$

$$+\frac{\pi\rho u_1u_2R_1^3R_2^3}{l^3}\left[k\sin(kl)\cos\alpha_4 + \cos(kl)\sin\alpha_4\frac{\partial\alpha_4}{\partial l}\right] \tag{9}$$

$$F_{BK}^{(2)} = -\frac{2\pi\rho R_1^2R_2^2\cos(kl)}{l^3}\left[v_2u_1R_1\cos\alpha_2 - v_1u_2R_2\cos\alpha_3\right] +$$

$$+\frac{\pi\rho R_1^2R_2^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial l}\left[v_2u_1R_1\cos(kl)\cos\alpha_2 - v_1u_2R_2\cos(kl)\cos\alpha_3\right] \tag{10}$$

где $F_B^{(2)}$ — сила Бьеркнеса, $F_K^{(2)}$ — сила Кенига, $F_{BK}^{(2)}$ — перекрестная сила. Аналогично сила, действующая на 1-й пузырек, $F^{(1)}=-F^{(2)}$.

В соотношениях (8)—(10) учтена возможная зависимость разностей фаз α_n (n=1—4) от l. Например, в случае вынужденных пульсаций радиусов пузырьков в поле плоской звуковой волны давления $P_a=A\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, величина $\alpha_1=k_z l$, т. е. зависит от угла $\theta=\arccos(k_z/k)$ между волновым вектором $\mathbf{k}$ и осью z, проходящей через равновесные центры пузырьков.

Первый член в формуле (8) при условии $kl\ll 1$ переходит в обычную силу Бьеркнеса. Второй член в этой же формуле — дальнодействующий. Аналогичная ситуация имеет место с силой Кенига и перекрестным членом (9)—(10).

Тангенциальную составляющую можно определить следующим способом. Мысленно сместим 2-й пузырек в плоскости ($\mathbf{k}$, z) на малый угол $\delta\theta$ при неизменном l. Такое смещение эквивалентно замене $\theta\to\theta-\delta\theta$. Тангенциальная составляющая

$$F_T^{(2)}=\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\langle L(\theta-\delta\theta)\rangle-\langle L(\theta)\rangle}{l\delta\theta}=-\frac{1}{l}\frac{\partial\langle L(\theta)\rangle}{\partial\theta}$$

С помощью (6) имеем

$$F_T^{(2)}=F_{BT}^{(2)}+F_{KT}^{(2)}+F_{BKT}^{(2)} \tag{11}$$

$$F_{BT}^{(2)}=\frac{2\pi\rho v_1 v_2 R_1^2 R_2^2\cos(kl)\sin\alpha_1}{l^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\theta} \tag{12}$$

$$F_{KT}^{(2)}=-\frac{\pi\rho R_1^3 R_2^3 u_1 u_2\cos(kl)\sin\alpha_4}{l^4}\frac{\partial\alpha_4}{\partial\theta} \tag{13}$$

$$F_{BKT}^{(2)}=\frac{\pi\rho R_1^2 R_2^2\cos(kl)}{l^3}\left[v_2 R_1 u_1\sin\alpha_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\theta}-v_1 R_2 u_2\sin\alpha_3\frac{\partial\alpha_3}{\partial\theta}\right] \tag{14}$$

где $F_{BT}^{(2)}$, $F_{KT}^{(2)}$ и $F_{BKT}^{(2)}$ — тангенциальные составляющие соответственно силы Бьеркнеса, Кенига и перекрестной силы.

Аналогично $F_T^{(1)}=-F_T^{(2)}$.

В случае вынужденных колебаний пузырьков в поле плоской звуковой волны давления $P_a=A\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ для фаз α_1 и α_4 имеем очевидные соотношения $\alpha_1=\alpha_4=k_z l$, поскольку как пульсации радиусов пузырьков, так и осцилляции их центров обусловлены воздействием внешней волны, фаза которой зависит от радиус-вектора $\mathbf{r}$. Менее очевидные соотношения имеют место для других фаз: $\alpha_2=\alpha_3=kl$. Качественно это можно объяснить следующим образом. Дипольное движение, скажем 1-го пузырька (а также сила Бьеркнеса) обусловлено пульсациями радиуса 2-го (напомним, что рассматривается ситуация, когда $kR_{1,2}\ll 1$, т. е. радиационное воздействие мало), излучаемая волна от которого приходит с запаздыванием по времени l/c. Таким образом, пульсации радиуса 2-го пузырька и осцилляции центра 1-го сдвинуты по фазе на kl. Более строго этот результат может быть получен с помощью соотношений (2)—(3) путем непосредственного расчета монопольных и дипольных движений пузырьков.

Из (12)—(14) следует, что для газовых пузырьков тангенциальная составляющая силы Бьеркнеса имеет наименьший порядок малости по $R_{1,2}/l$, т. е. наиболее существенна из всех тангенциальных составляющих.

Подставляя $\alpha_1=k_z l$ в выражение (12), получаем

$$F_{BT}^{(2)}=-\frac{2\pi\rho k v_1 v_2 R_1^2 R_2^2\cos(kl)\sin(k_z l)\sin\theta}{l} \tag{15}$$

Интересно сравнить [7] эту силу с силой радиационного давления $\mathbf{F}_r^{(1,2)}=-4\pi R_{1,2}^2\langle\delta R_{1,2}\cdot\nabla P_a\rangle$, где отклонения радиусов $\delta R_{1,2}$ от равновесных значений определяются по формуле [2]

$$\delta R_{1,2} = -\frac{P_a}{\rho\omega^2 R_{1,2}[(\omega_{1,2}^2/\omega^2-1)^2+\delta_{1,2}^2]} \qquad (16)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ — резонансные круговые частоты пузырьков, $\delta_{1,2}$ — безразмерные коэффициенты поглощения. Скорость изменения радиусов пузырьков $v_{1,2}=\delta\dot{R}_{1,2}$. Нетрудно показать, используя (15)—(16), что отношение сил по порядку величины равно $|\mathbf{F}_{BT}^{(2)}/\mathbf{F}_r^{(2)}|\sim R_{1,2}/l\delta_{1,2}$.

Если под действием сил радиационного давления оба пузырька сносятся в одном направлении вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$ (в случае одинаковых радиусов скорости их переноса под действием этих сил одинаковы и пузырьки сносятся как одно целое), то наличие тангенциальной составляющей (15) приводит к вращению всей системы. Взаимодействующие пузырьки стремятся занять такое положение, при котором тангенциальная составляющая равна нулю. При этом ось, соединяющая центры пузырьков, может расположиться либо параллельно волновому вектору, либо перпендикулярно ему. Это будет зависеть от знака сомножителя $\cos(kl)\sin(k_z l)$ в формуле (15). Оба положения устойчивы, потому что при прохождении системой положения равновесия тангенциальная составляющая меняет знак и стремится вернуть систему в положение равновесия. Нетрудно показать, что если знак сомножителя $\cos(kl)\sin(k_z l)$ отрицательный, то ось, соединяющая центры пузырьков, располагается параллельно волновому вектору (1-й случай), а если положительный — перпендикулярно ему (2-й случай).

При малых kl имеем $F_{BT}^{(2)}=-\pi\rho R_1^2R_2^2k^2v_1v_2\sin(2\theta)$. Отсюда видно, что в данном случае всегда будет иметь место 2-й случай переориентации.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены нормальные и тангенциальные составляющие сил взаимодействия не только газовых пузырьков, но и твердых частиц. Обратим внимание на то, что в поле плоской звуковой волны тангенциальные составляющие силы Бьеркнеса (12) и Кенига (13) имеют противоположные знаки. Поэтому направление вращения системы взаимодействующих частиц будет определяться тем, какая сила преобладает в том или ином конкретном случае. Если для газовых пузырьков сила Кенига является существенно малой величиной по сравнению с силой Бьеркнеса, то для твердых частиц, центры которых осциллируют в жидкости, первостепенное значение приобретает сила Кенига и, следовательно, переориентация системы твердых частиц будет происходить противоположно переориентации системы пузырьков.

Таким образом, можно констатировать заметное различие в поведении твердых и сжимаемых частиц, колеблющихся в поле звуковой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 408 с.
2. *Акуличев В. А.* Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. М.: Наука, 1978. 280 с.
3. *Алексеев В. Н.* К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 129–136.
4. *Завтрак С. Т.* К вопросу о силе взаимодействия Бьеркнеса двух газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 240–245.
5. *Кузнецов Г. Н., Щекин И. Е.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 4. С. 565–570.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
7. *Завтрак С. Т.* К вопросу о поведении облака газовых пузырьков в жидкости в поле звуковой волны давления // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 31–36.

Минск

Поступила в редакцию 6.X.1987