

УДК 532.529

ДВИЖЕНИЕ ЗАПЫЛЕННОГО ГАЗА В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА И КРУГЛОЙ ТРУБЫ

ОСИЦОВ А. Н.

Исследуется переход от равномерного к неравномерному распределению инерционной примеси по поперечному сечению канала (трубы) при движении газозвеси в начальном участке. Принята двухконтинуальная модель запыленного газа [1]. В выражении для межфазного обмена импульсом учтена сила Сэфмана [2], вызывающая поперечную миграцию частиц.

Исследованию общих закономерностей движения газов с примесью твердых или жидких частиц в каналах посвящена обширная литература, в частности [3–5] и цитируемые в них работы. Хотя в большинстве практически важных случаев движение происходит в турбулентном режиме, в данной работе рассматривается ламинарное течение. Это позволяет получить асимптотическое решение для формирующегося вдали от входа в канал профиля концентрации частиц без привлечения эмпирических гипотез, необходимых при описании турбулентного переноса частиц. Для достаточно крупных частиц, не участвующих в пульсационном движении, качественные выводы останутся справедливыми и для турбулентного движения газа.

Ниже показано, что при больших числах Рейнольдса, посчитанных по скорости на входе и полуширине канала, в начальном участке формируются четыре характерные области течения. Уравнения, описывающие движение смеси в каждой из этих областей, построены методом сращиваемых разложений. Получена формула, связывающая распределение концентрации частиц в пограничном слое на плоской пластине вдали от ее начала. На основе численного решения изучена зависимость формирующегося профиля концентрации дисперсной фазы от определяющих параметров. Показано, что с увеличением вклад силы Сэфмана в межфазный обмен импульсом нарастание концентрации частиц в направлении стенки сменяется убыванием. Отмечено качественное соответствие рассчитанных профилей концентрации частиц некоторым известным экспериментальным данным.

1. Постановка задачи и асимптотическое решение вблизи входного сечения канала. Целью работы является выяснение общих закономерностей перехода от равномерного к неравномерному распределению частиц по поперечному сечению канала (трубы) вследствие их инерционного отставания от несущей фазы и двумерности течения в начальном участке. Приняты обычные предположения [1]: частицы — сферы одинакового радиуса σ , массы m . Объемная концентрация частиц пренебрежимо мала, броуновское движение несущественно, несущая фаза несжимаема. Учтена поперечная миграция частиц из-за локально-сдвигового характера потока, обтекающего пробную частицу. Для вычисления подъемной силы используется формула Сэфмана [2], выражение для силы аэродинамического сопротивления частицы взято в форме Клячко [6].

Свяжем декартову систему координат x, y с входным сечением канала, ось x направим по нижней стенке канала. Тогда сила, действующая со стороны несущей фазы на единицу массы пробной частицы, примет вид

$$F = \frac{6\pi\sigma\mu}{m} (v - v_s) D + \frac{6,46\sigma^2\sqrt{\mu\rho}}{m} \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} (u - u_s) j$$

$$D = 1 + \frac{1}{6} \text{Re}_s^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Re}_s = \frac{2\sigma|v - v_s|\rho}{\mu}$$

Здесь μ , ρ — вязкость и плотность несущей фазы, \mathbf{j} — единичный вектор оси ординат, индекс s относится к параметрам среды частиц.

Пусть на входе в канал задан однородный поток газозвеси. Размерные параметры на входе отмечаем индексом ∞ . Считаем, что число Рейнольдса, подсчитанное по скорости на входе и полуширине канала a , велико, т. е. $\mu/U_\infty a \rho = \epsilon \ll 1$. Построим асимптотическое решение задачи о течении газозвеси в начальном участке канала при $\epsilon \rightarrow 0$. Используем технику метода сращиваемых разложений [7]. В дальнейшем будем рассматривать течения на двух существенно различных масштабах длины: $l = mU_\infty / 6\pi\sigma\mu$ и $L = (1 + \alpha)a^2 U_\infty \rho / \mu$. Здесь l — характерная длина релаксации скоростей фаз, L — характерная длина смыкания пограничных слоев, нарастающих на стенках канала, $\alpha = \rho_{s\infty} / \rho$ — массовая концентрация частиц. Наибольший интерес представляют случаи $\alpha \sim O(1)$, $\lambda = a/l \sim O(1)$.

Выпишем в безразмерном виде систему уравнений запыленного газа на масштабе длины l , взяв в качестве масштабов при обезразмеривании: давления — ρU_∞^2 , плотности среды частиц — $\rho_{s\infty}$, компонент скорости фаз — U_∞ , координат — l . Тогда система уравнений движения запыленного газа [1] примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s = 0 \\ (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p + \alpha \rho_s \left[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) D + \kappa (u - u_s) \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} \mathbf{j} \right] = \epsilon \lambda \Delta \mathbf{v} \\ (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) D + \kappa (u - u_s) \sqrt{\frac{\partial u}{\partial y}} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$D = 1 + \frac{1}{6} \operatorname{Re}_{s0}^{-3/2} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_s|^{3/2}, \quad \operatorname{Re}_{s0} = \frac{2\sigma\rho U_\infty}{\mu}, \quad \kappa = \frac{6,46\sigma}{6\pi l \sqrt{\epsilon \lambda}}$$

$$x=0: u=u_s=\rho_s=1; \quad y=0, 2\lambda: u=v=0$$

Построение асимптотического решения задачи (1.1) при $\epsilon \rightarrow 0$ аналогично решению задачи о двухфазном пограничном слое на плоской пластине [8]. Внешнее решение ($\epsilon \rightarrow 0$; x, y фиксированы) очевидно: $u=u_s=\rho_s=1, v=v_s=0, p=\text{const}$. Для построения уравнений пограничного слоя введем растянутую координату $\eta = y/\sqrt{\epsilon \lambda}$. В силу симметрии рассмотрим только пограничный слой на нижней стенке канала. Ищем внутреннее решение в виде

$$\begin{aligned} u_0(x, \eta) + \dots, u_{s0}(x, \eta) + \dots, p_0(x, \eta) + \dots \\ \rho_{s0}(x, \eta) + \dots, \sqrt{\epsilon \lambda} v_0(x, \eta) + \dots, \sqrt{\epsilon \lambda} v_{s0}(x, \eta) + \dots \end{aligned}$$

Из (1.1) получаем уравнения пограничного слоя и условия сращивания

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{s0} u_{s0}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{s0} v_{s0}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \eta} = 0 \\ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \alpha \rho_{s0} (u_0 - u_{s0}) D_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} \\ u_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial \eta} = (u_0 - u_{s0}) D_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u_{s0} \frac{\partial v_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \eta} = (v_0 - v_{s0}) D_0 + \kappa_0 (u_0 - u_{s0}) \sqrt{\frac{\partial u_0}{\partial \eta}}$$

$$D_0 = 1 + \frac{1}{6} \operatorname{Re}_{s0}^{-3/2} (u_0 - u_{s0})^{3/2}, \quad \kappa_0 = \frac{6,46\sigma}{6\pi} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu l}}$$

$$\eta=0: u_0=v_0=0; \eta \rightarrow \infty: u_0 \rightarrow 1$$

$$x=0: u_{s0}=\rho_{s0}=1, v_{s0}=0$$

Приведем несколько характерных значений безразмерных определяющих параметров для реальных размеров и материала частиц, скорости потока и т. д. Пусть полуширина канала 1 см, $\nu=0,15$ см²/с, $U_\infty=10^3$ см/с, $\rho_s^\circ/\rho=10^4$ (здесь ρ_s° — плотность вещества частиц), в этом случае $\varepsilon=1,5 \cdot 10^{-4}$, остальные безразмерные параметры для трех размеров частиц приведены ниже:

σ , см	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
l , см	$1,48 \cdot 10^{-1}$	14,8	$1,48 \cdot 10^3$
Re_{s0}	1,33	13,3	133
κ_0	1,28	40,47	1280

С увеличением размера частиц вклад силы Сэфмана (величина κ_0) в межфазный обмен импульсом в пограничном слое быстро возрастает.

2. Асимптотическое решение на масштабе смыкания пограничных слоев. Введем новые масштабы величин: для продольной координаты $L=(1+\alpha)a^2U_\infty/\nu$, поперечной координаты — a , продольных компонент скорости — U_∞ , поперечных компонент скорости — aU_∞/L , давления — $\rho(1+\alpha)U_\infty^2$, плотности среды частиц — $\rho_{s\infty}$. Безразмерные координаты в этой области обозначаем X, Y ; искомые безразмерные функции отметим индексом 1. Система уравнений движения принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial v_1}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{s1} u_{s1}}{\partial X} + \frac{\partial \rho_{s1} v_{s1}}{\partial Y} = 0$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} + \alpha \rho_{s1} \left(u_{s1} \frac{\partial u_{s1}}{\partial X} + v_{s1} \frac{\partial u_{s1}}{\partial Y} \right) + \frac{\partial p_1 (1+\alpha)}{\partial X} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{1+\alpha} \frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + (1+\alpha) \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2}$$

$$u_1 \frac{\partial v_1}{\partial X} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial Y} + \alpha \rho_{s1} \left(u_{s1} \frac{\partial v_{s1}}{\partial X} + v_{s1} \frac{\partial v_{s1}}{\partial Y} \right) + \frac{(1+\alpha)^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial p_1}{\partial Y} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{1+\alpha} \frac{\partial^2 v_1}{\partial X^2} + (1+\alpha) \frac{\partial^2 v_1}{\partial Y^2}$$

$$u_{s1} \frac{\partial u_{s1}}{\partial X} + v_{s1} \frac{\partial u_{s1}}{\partial Y} = \frac{\lambda(1+\alpha)}{\varepsilon} (u_1 - u_{s1})$$

$$u_{s1} \frac{\partial v_{s1}}{\partial X} + v_{s1} \frac{\partial v_{s1}}{\partial Y} = \frac{\lambda(1+\alpha)}{\varepsilon} \left[(v_1 - v_{s1}) + \kappa_0(1+\alpha) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\partial u_1}{\partial Y}} (u_1 - u_{s1}) \right] \quad (2.1)$$

$$Y=0, 2: u_1=v_1=0; X=0: \rho_{s1}=u_{s1}=u_1=1$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ из (2.1) получаем уравнения для главных членов разложения (для простоты не вводим новых обозначений)

$$\frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial v_1}{\partial Y} = 0, \quad u_1 \frac{\partial \rho_{s1}}{\partial X} + v_1 \frac{\partial \rho_{s1}}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial Y} = 0, \quad u_1 = u_{s1}, \quad v_1 = v_{s1} \quad (2.2)$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} + \alpha \rho_{s1} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right) + (1+\alpha) \frac{\partial p_1}{\partial X} = (1+\alpha) \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2}$$

Граничные условия на входе в канал получаем из условия сращивания с равномерным однородным потоком при $X \rightarrow 0$ и фиксированным Y .

Тогда из уравнения неразрывности среды частиц получаем $\rho_{s1}=1$ и система (2.2) значительно упрощается

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial v_1}{\partial Y} = 0, \quad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} + \frac{dp_1}{dX} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \\ u_{s1} = u_1, \quad v_{s1} = v_1 \\ X=0: u_1=1; Y=0,2: u_1=v_1=0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система (2.3) полностью совпадает с постановкой задачи о движении однородной вязкой жидкости в начальном участке канала, приближенное решение которой было построено Шлихтингом [9]. Это решение имеет вид (см. подробности в [9])

$$\begin{aligned} u_1(X, Y) = f_0' + \sqrt{Y} \bar{X} f_1' \quad (X < X_0) \\ u_1(X, Y) = 1,5(2Y - Y^2) - 0,3485g_0' \exp(-18,75X) \quad (X \geq X_0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\zeta = Y/\sqrt{X}$, функции $f_0(\zeta)$, $f_1(\zeta)$, $g_0(Y)$ удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\begin{aligned} f_0 f_0'' + 2f_0''' = 0; \quad \zeta=0: f_0=f_0'=0; \quad f_0'(\infty)=1 \\ 2f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' + 2f_0'' f_1 = -1,72; \quad \zeta=0: f_1=f_1'=0; \quad f_1'(\infty)=1,72 \\ g_0' \sim +3k[(Y-0,5Y^2)g_0'' + g_0] = 0; \quad Y=0: g_0=g_0'=0; \quad Y=1: g_0=g_0''=0 \end{aligned}$$

Собственное значение $k=18,75$, координата $X_0 \approx 0,16$ [9].

Решение (2.4) и $\rho_{s1}=1$ не являются равномерно пригодной асимптотической решения системы (2.1), так как вблизи стенок канала возникают тонкие области, где концентрация частиц отлична от единицы. Это утверждение следует из решения уравнений (1.2), описанного в разд. 3, из которого видно, что с завершением релаксации скоростей фаз в пограничном слое вблизи стенки формируется слой неоднородной концентрации частиц. Этот слой в асимптотическом смысле более тонкий, чем полуширина канала.

Построим уравнения, описывающие движение смеси в этом слое, который в дальнейшем будем называть нижним подслоем. Введем новые растянутые переменные (масштабы величин выбраны из условий срачивания с решением в других областях)

$$\begin{aligned} u_1 = \varepsilon_1^{1/4} u_2(X, z) + \dots, \quad u_{s1} = \varepsilon_1^{1/4} u_{s2}(X, z) + \dots \\ v_1 = \varepsilon_1^{1/2} v_2(X, z) + \dots, \quad v_{s1} = \varepsilon_1^{1/2} v_{s2}(X, z) + \dots \\ \rho_{s1} = \rho_{s2}(X, z) + \dots, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(1+\alpha)\lambda}, \quad z = \frac{Y}{\varepsilon_1^{1/4}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Индексом 2 здесь и далее отмечаем параметры течения в нижнем подслое. Подставляя разложения (2.5) в (2.1) и оставляя главные члены, получаем уравнения, описывающие течение в нижнем подслое

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \quad u_2 \frac{\partial \rho_{s2}}{\partial X} + v_2 \frac{\partial \rho_{s2}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0 \\ u_{s2} = u_2, \quad v_{s2} = v_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение (2.6) имеет вид $u_2 = G(X)z$, $v_2 = -G'z^2/2$. Функция $G(X)$ находится из условия срачивания u_2 с u_1 в области линейного роста u_1

$$G(X) = \left. \frac{\partial u_1}{\partial Y} \right|_{Y=0}$$

Значение плотности ρ_{s2} в нижнем подслое переносится вдоль линии тока несущей фазы $\omega = z\sqrt{G(X)} = \text{const}$. Вид функции $\rho_{s2}(\omega)$ должен быть

найден из условия сращивания с решением для плотности среды частиц, полученным из (1.2) при $x \rightarrow \infty$. Из выбора масштабов при обезразмеривании координат следует, что

$$\frac{\eta}{x^{1/2}} = \frac{z}{X^{1/2}(1+\alpha)^{1/2}} = \theta \quad (2.7)$$

Здесь θ — обозначение для указанной комбинации координат. Из (2.7) следует, что решения для плотности частиц из (1.2) и (2.6) удобно сращивать в переменных x, θ и X, θ при θ фиксированном, а $x \rightarrow \infty$ и $X \rightarrow 0$ соответственно. При таком сращивании X играет роль внешней, а x — внутренней координаты, так как $x = \varepsilon X / [\lambda(1+\alpha)]$. Из (2.4) следует, что при малых X имеем $G(X) \sim f_0''(0) / \sqrt{X}$, где $f_0''(0) = 0,33206$ [9]. Следовательно, при малых X соотношение $\omega = \text{const}$ запишется в виде $(z\sqrt{0,33206})X^{-1/2} = \text{const}$. Отсюда условие сращивания плотности частиц можно представить в виде

$$\rho_{s2}(\omega) = \rho_{s0}^{\text{lim}}(\theta), \quad \omega = \theta \sqrt{0,33206(1+\alpha)} \quad (2.8)$$

Здесь ρ_{s0}^{lim} — предел при $x \rightarrow \infty$ плотности среды частиц, который нужно найти из решения уравнений (1.2) в переменных x, θ .

При больших значениях X из (2.4) имеем $G(X) \rightarrow 3$, и соотношение $\omega = \text{const}$ принимает вид $z\sqrt{3} = \text{const}$. Условие сохранения ρ_{s2} в нижнем подслое при фиксированном ω позволяет, зная $\rho_{s0}^{\text{lim}}(\theta)$ из решения (1.2), найти распределение плотности среды частиц $\rho_{s3}(Y)$ при больших значениях X , где устанавливается профиль скорости Пуазейля. Используя связь z и Y (2.5) из (2.8), при больших X имеем

$$\rho_{s3}(Y) = \rho_{s0}^{\text{lim}}(\theta), \quad Y = \theta \left[\frac{\varepsilon(1+\alpha)}{\lambda} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{0,33206}{3}} \quad (2.9)$$

Таким образом, задача определения профиля концентрации частиц $\rho_{s3}(Y)$ в области не зависящего от продольной координаты течения свелась к нахождению асимптотики $\rho_{s0}^{\text{lim}}(\theta)$ при больших x из решения уравнений двухфазного пограничного слоя (1.2).

3. Определение плотности среды частиц в пограничном слое. В работе [8] уравнения (1.2) были решены в предположении стоксовского режима обтекания частиц ($\text{Re}_{s0} = 0$) и без учета силы Сэфмана ($\kappa_0 = 0$). Там же было показано, что в качественном отношении вид профиля концентрации частиц, устанавливающийся вдали от входа, не зависит от массовой концентрации частиц α . Поэтому ниже положим $\alpha = 0$, что существенно упростит задачу (1.2), и исследуем влияние конечности κ_0 и Re_{s0} на распределение концентрации дисперсной фазы. Поле скоростей несущей фазы в пограничном слое при отсутствии влияния частиц на движение несущей фазы ($\alpha = 0$) определяется из решения задачи Блазиуса и имеет вид [9]

$$u_0(x, \eta) = \varphi', \quad v_0(x, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\eta\varphi'}{\sqrt{x}} - \varphi \right)$$

Здесь функция $\varphi(\eta/\sqrt{x})$ удовлетворяет краевой задаче

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 1$$

Уравнения движения и неразрывности среды частиц, рассмотренные на фиксированной траектории частиц, можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого в качестве независимых переменных введем безразмерное время движения частицы по траектории t и лагранжеву координату η_0 — ординату начала траектории частиц при $x = 0$. При фиксированном η_0 уравнения движения среды частиц и гранич-

ные условия принимают вид

$$\frac{dx}{dt} = u_{s0}, \quad \frac{d\eta}{dt} = v_{s0}, \quad \frac{du_{s0}}{dt} = (u_0 - u_{s0})D_0$$

$$\frac{dv_{s0}}{dt} = (v_0 - v_{s0})D_0 + \kappa_0(u_0 - u_{s0}) \sqrt{\frac{\partial u_0}{\partial \eta}} \quad (3.1)$$

$$t=0: x=0, \eta=\eta_0, u_{s0}=1, v_{s0}=0$$

Уравнение неразрывности в выбранных лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{1}{\rho_{s0}(\eta_0, t)} = u_{s0}g(\eta_0, t) - v_{s0}e(\eta_0, t), \quad e = \frac{\partial x(\eta_0, t)}{\partial \eta_0}, \quad g = \frac{\partial \eta(\eta_0, t)}{\partial \eta_0} \quad (3.2)$$

Для нахождения ρ_{s0} из (3.2) вдоль траектории частиц нужно знать функции e и g . Для их определения продифференцируем (3.1) по η_0 , получим уравнения и граничные условия

$$\frac{de}{dt} = f, \quad \frac{df}{dt} = A \left[1 + \frac{5}{18} \text{Re}_{s0}^{2/3} (u_0 - u_{s0})^{2/3} \right], \quad \frac{dg}{dt} = h$$

$$\frac{dh}{dt} = BD_0 + \frac{\text{Re}_{s0}^{2/3} (v_0 - v_{s0}) A}{9(u_0 - u_{s0})^{1/3}} + \kappa_0 \left[A + \frac{C(u_0 - u_{s0})}{4} \right]$$

$$A = e \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial u_0}{\partial \eta} - f, \quad B = e \frac{\partial v_0}{\partial x} + g \frac{\partial v_0}{\partial \eta} - h, \quad f = \frac{\partial u_{s0}(\eta_0, t)}{\partial \eta_0}$$

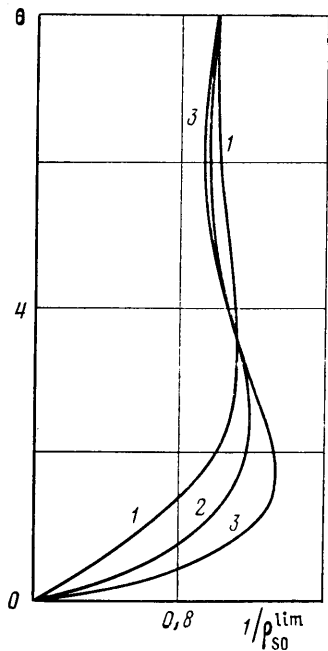
$$C = 2 \left(e \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \eta} + g \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \eta}, \quad h = \frac{\partial v_{s0}(\eta_0, t)}{\partial \eta_0} \quad (3.3)$$

$$t=0: e=0, f=0, g=1, h=0$$

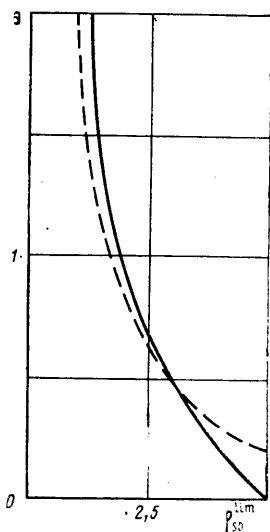
При подготовке к численным расчетам вводилась новая независимая переменная x , полученная система уравнений интегрировалась численно методом Кутты — Мерсона. Для вычисления компонент скорости несущей фазы и их производных по координатам использовалась кубическая интерполяция табличных значений функции φ из [9].

Была исследована зависимость профиля концентрации частиц, который формируется вдали от входа, от параметров Re_{s0} и κ_0 . Из результатов численных расчетов следует, что с увеличением x концентрация частиц становится функцией одной переменной θ , что подтверждает изложенную выше асимптотическую структуру течения. Расстояние от передней кромки, на котором происходит формирование автомоделного профиля концентрации, существенно зависит от κ_0 , так при $\kappa_0=0$ $x \geq 20$; при $\kappa_0 = -300$ $x \geq 200$.

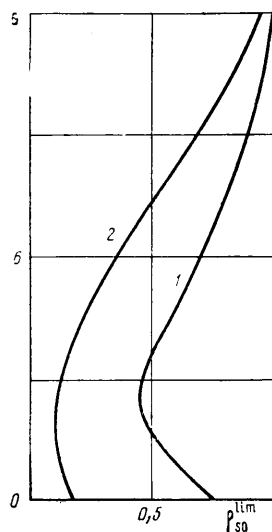
На фиг. 1 приведены графики $1/\rho_{s0}^{\text{lim}}$ (предельного распределения при больших x) как функции θ без учета силы Сэфмана ($\kappa_0=0$), цифрами 1—3 отмечены кривые при $\text{Re}_{s0}=0, 100, 1000$ соответственно. Видно, что в качественном отношении распределение концентрации частиц в области стабилизированного течения слабо зависит от максимального числа Рейнольдса обтекания частиц. Зависимость предельного профиля концентрации частиц от вклада силы Сэфмана продемонстрирована на фиг. 2, 3. Было положено $\text{Re}_{s0}=0$. Штриховая линия на фиг. 2 соответствует случаю $\kappa_0=0$, сплошная — $\kappa_0=10$. На фиг. 3 кривые 1—2 соответствуют случаям $\kappa_0=50; 300$. Видно, что с увеличением вклада силы Сэфмана в межфазный обмен импульсом происходит качественная перестройка профиля



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

концентрации частиц, исчезает область повышенной концентрации частиц вблизи стенки.

Следует иметь в виду, что в рамках используемой математической модели не учитывались частицы, отраженные от стенки. Таким образом, предполагалось, что частицы, выносимые на стенку силой Сэфмана, остаются в тонком слое, толщина которого несущественна.

Кроме того, в случае мелких частиц ($\chi_0=0$) в полученном решении при $x=1$ на стенке концентрация частиц неограниченно возрастает, причем, как показано в [10], возникающая особенность концентрации не интегрируема. Это означает, что на самом деле вблизи $x=1$ мелкие частицы концентрируются, возникает «горка» частиц, где их содержание близко к плотной упаковке. Позади «горки» должна образоваться область, свободная от частиц. Следовательно, в реальном распределении концентрации мелких частиц на участке стабилизированного течения вместо неограниченного роста концентрации (фиг. 1) вблизи стенки должна быть узкая зона, где концентрация частиц резко убывает до нуля, т. е. максимум концентрации достигается на конечном расстоянии от стенки.

Соотношение (2.9) позволяет простым пересчетом аргумента найти распределение концентрации частиц в поперечном сечении канала по рассчитанным зависимостям $\rho_{SO}^{lim}(\theta)$ (фиг. 1–3).

В монографии [5] приведены пять типичных распределений концентрации частиц, обнаруженных в различных экспериментах для вертикальных труб и каналов, в частности в экспериментах работы [11]. В качественном отношении эти распределения относятся к двум типам: а) максимум концентрации частиц находится на небольшом расстоянии от стенок, б) максимум концентрации находится на оси канала. Изложенное выше решение объясняет формирование таких профилей концентрации и переход от профиля а) к б) с увеличением роли силы Сэфмана в межфазном обмене импульсом.

4. Течение в начальном участке круглой трубы. Изложенная выше асимптотическая структура двухфазного течения сохраняется и в случае круглой трубы. В самом деле, на масштабе длины a уравнения погранич-

ного слоя на стенках совпадают с уравнениями пограничного слоя на пластине. Не сказывается влияние кривизны стенок и на уравнения, описывающие течение в области нижнего подслоя (в силу малости ее толщины по сравнению с a). Изменяются лишь асимптотические уравнения, описывающие равновесное течение смеси на продольном L и поперечном a масштабах. Однако для определения распределения концентрации частиц требуется знание лишь функции $G(X)$, а для нахождения распределения концентрации частиц в области стабилизированного течения необходима лишь асимптотика $G(X)$ при $X \rightarrow \infty$. Найдем эту асимптотику: при больших X профиль скорости выходит на профиль Пуазейля [9] (r — размерное расстояние до оси трубы)

$$u\left(\frac{r}{a}\right) = 2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \lim_{X \rightarrow \infty} G(X) = 4$$

Можем записать связь между $\rho_{s0}^{\text{lim}}(\theta)$ и распределением $\rho_{s3}(Y)$ в области стабилизированного течения (аналогично (2.9))

$$\rho_{s3}(Y) = \rho_{s0}^{\text{lim}}(\theta), \quad Y = \theta \left[\frac{\varepsilon(1+\alpha)}{\lambda} \right]^{1/4} \sqrt{\frac{0,33206}{4}}$$

В заключение отметим, что использованное выражение Сэфмана для подъемной силы пригодно лишь при малых числах Рейнольдса и малых скоростях сдвига обтекающей частицу потока [2]. В начальном участке канала и трубы есть зоны, где указанные условия обтекания частиц могут не выполняться, поэтому возможно лишь качественное сравнение полученных выше распределений концентрации частиц с данными экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марбл Ф. Е. Динамика запыленных газов // Механика: Период. сб. перев. иностр. ст. 1971. № 6. С. 48–89.
2. Saffman P. G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385–400. Corrigendum: J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt 3. P. 624.
3. Файзуллаев Д. Ф. Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах. Ташкент: Фан, 1966. 220 с.
4. Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П. Гидродинамика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом // Киев: Наук. думка, 1980. 251 с.
5. Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей // М.: Наука, 1981. 174 с.
6. Волощук В. М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеиздат, 1971. 208 с.
7. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
8. Осипцов А. Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 48–54.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
10. Осипцов А. Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 46–52.
11. Злобин В. В. Экспериментальное исследование течения смеси газа и частиц в трубе // ИФЖ. 1977. Т. 33. № 4. С. 611–616.

Москва

Поступила в редакцию
30.X.1987