

УДК 532.526.013.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НЕВЯЗКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТОНКОМ УДАРНОМ СЛОЕ

ГУЩИН В. Р., ФЕДОРОВ А. В.

В последнее время проявляется интерес к проблеме ламинарно-турбулентного перехода при обтекании тел с большими скоростями потока. Характерны режимы течения, при которых скачок уплотнения располагается близко к обтекаемой поверхности, образуя тонкий ударный слой. Первым шагом в построении теории ламинарно-турбулентного перехода в ударном слое является анализ его устойчивости относительно малых возмущений.

В [1] дана постановка задачи устойчивости к двумерным возмущениям плоско-параллельного ударного слоя для простейшей модели течения. Предполагалось, что возле обтекаемой поверхности имеется пограничный слой, а в области между скачком уплотнения и пограничным слоем течение однородно. Численные расчеты [1, 2] показали, что скачок уплотнения сильно влияет на инкременты нарастания. В узком диапазоне чисел Рейнольдса обнаружены режимы абсолютной неустойчивости [2].

В отличие от классической задачи устойчивости пограничного слоя [3] возмущения в ударном слое способны отражаться от скачка уплотнения. Ударный слой проявляет свойства волновода с неоднородными характеристиками в поперечном направлении. В нем может существовать и взаимодействовать много различных мод. Задача является многопараметрической. Она усложняется при учете энтропийных эффектов, вязко-невязкого взаимодействия. В таких случаях полезен качественный анализ с помощью асимптотических методов. В [4] использован ВКБ-метод для анализа коротковолновой неустойчивости сверхзвукового слоя смещения. В настоящей работе аналогичным методом исследуются различные типы невязких трехмерных коротковолновых возмущений в тонком ударном слое совершенного газа с произвольными распределениями скорости и температуры поперек слоя. Получены простые аналитические выражения дисперсионных соотношений для нейтральных возмущений. Результаты асимптотического анализа сравниваются с прямыми численными расчетами для простой модели ударного слоя.

1. Рассматривается тонкий двумерный ударный слой, образующийся между скачком уплотнения и поверхностью, обтекаемой совершенным газом. Предполагается, что угол наклона скачка уплотнения к обтекаемой поверхности $\theta_s \rightarrow 0$. Ось x направлена вдоль по потоку, ось y — перпендикулярно к поверхности, ось z — в трансверсальном направлении. За характерный масштаб длины δ принимается расстояние от стенки до скачка уплотнения. Профили x -компоненты скорости $U(y)$ и температуры $T(y)$ обезразмерены по скорости U_2 и температуре T_2 за скачком уплотнения. Предполагается, что масштаб δ изменения характеристик течения по нормали к обтекаемой поверхности много меньше характерного масштаба L в направлении x . Так как характерная длина волны собственных колебаний $\lambda \lesssim \delta$, в главном приближении по малому параметру $\epsilon = \delta/L$ приходим к локально-однородной по x задаче для возмущений, т. е. основное течение полагается локально-параллельным.

На основное течение накладывается малое возмущение вида $G(y) \exp(\alpha x + i\beta z - i\omega t)$, где α, β — волновые числа в x - и z -направлениях, ω — частота, отнесенная к U_2/δ , t — безразмерное время, $G = (u, v, w, p, \theta)$ — вектор-функция, компоненты которой описывают амплитуду возмущений x -, y -, z -компонент скорости, давления и температуры соответственно. В невязком пределе линеаризованные уравнения Эйлера для амплитуды $G(y)$ сводятся к уравнению для возмущения давления $p(y)$ со следующи-

ми граничными условиями [6]:

$$p'' - \left(\frac{2U'}{U-c} - \frac{T'}{T} \right) p' + \alpha^2 q p = 0 \quad (1.1)$$

$$p'(0) = 0, \quad p(1) = 0 \quad (1.2)$$

$$q(y) = M^2 (U-c)^2 T^{-1} - \kappa^2, \quad \kappa^2 = 1 + \beta^2 \alpha^{-2}$$

Здесь $c = \omega/\alpha$ — фазовая скорость, M — число Маха в ударном слое за скачком уплотнения, штрих обозначает дифференцирование по y . Первое равенство эквивалентно условию непротекания на стенке. Второе условие следует из анализа линеаризованных соотношений Рэнкина — Гюгонио на скачке уплотнения [5] в предположении, что угол наклона скачка к обтекаемой поверхности $\theta_s \rightarrow 0$. Данное условие может выполняться при показателе адиабаты $\gamma \rightarrow 1$ и числе Маха набегающего потока $M_1 \rightarrow \infty$.

Краевая задача (1.1), (1.2) есть задача на собственные значения α при заданной фазовой скорости c или наоборот.

Предположим, что $\kappa = O(1)$, $M = O(1)$, $\alpha \gg 1$; c, α — вещественные, т. е. будем исследовать коротковолновые нейтральные возмущения с длиной волны $\lambda = 2\pi/\alpha \ll 1$. Тогда для асимптотического анализа задачи можно воспользоваться методом ВКБ [7]. Выполним преобразование $p(y) = (U-c)T^{-1/2}u(y)$. Из (1.1), (1.2) в главном приближении по α получим

$$u'' + \alpha^2 q u = 0, \quad u'(0) = u(1) = 0 \quad (1.3)$$

Качественное поведение решения уравнения (1.3) зависит от знака функции $q(y)$. Все поле течения можно разбить на области, где q сохраняет знак. В областях с $q > 0$ решение для u имеет колебательный характер, если $q < 0$ — экспоненциальный вид

$$u(y) = q^{-1/4} \left[c_1 \cos \left(\alpha \int_{y_a}^y \sqrt{q} dy \right) + c_2 \sin \left(\alpha \int_{y_a}^y \sqrt{q} dy \right) \right] (1 + O(\alpha^{-1})) \quad (1.4)$$

$$u(y) = (-q)^{-1/4} \left[a_1 \exp \left(\alpha \int_{y_a}^y \sqrt{-q} dy \right) + a_2 \exp \left(-\alpha \int_{y_a}^y \sqrt{-q} dy \right) \right] (1 + O(\alpha^{-1}))$$

Здесь y_a — точка поворота, в которой $q(y_a) = 0$. В окрестности y_a асимптотические решения (1.4) непригодны. Предположим, что $q'_a = q'(y_a) < 0$. Произведем замену переменных

$$\xi = \left[\frac{3}{2} \alpha \int_{y_a}^y \sqrt{q} dy \right]^{2/3} \quad (1.5)$$

Имеется асимптотическое решение уравнения (1.3), которое равномерно пригодно как в областях $q < 0$, $q > 0$, так и в окрестности точки $q = 0$

$$u(\xi) = \left| \frac{\xi}{q} \right|^{1/6} [b_1 Ai(\xi) + b_2 Bi(\xi)] (1 + O(\alpha^{-1})) \quad (1.6)$$

Кроме точек поворота необходимо рассмотреть особую точку y_c , в которой скорость течения равняется фазовой скорости возмущения: $U(y_c) = c$. Переходя к новой переменной $\eta = \kappa \alpha (y - y_c)$, получим, что в главном приближении в окрестности критической точки

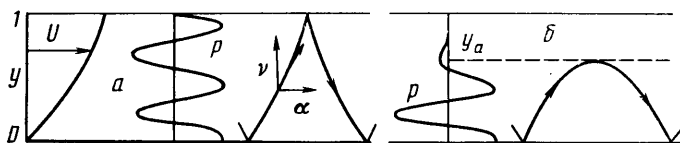
$$\frac{d^2 p}{d\eta^2} - \frac{2}{\eta} \frac{dp}{d\eta} - p = 0$$

Решение этого уравнения

$$p(\eta) = d_1(\eta-1)e^\eta + d_2(\eta+1)e^{-\eta} \quad (1.7)$$

где d_1, d_2 — константы. Ниже проанализированы конкретные решения краевой задачи (1.1), (1.2) в зависимости от вида функции $q(y)$.

Допустим, что $q > 0$ при $0 \leq y \leq 1$. Это условие эквивалентно ограничению на фазовую скорость $c < \min_y (U - \kappa \sqrt{T}/M)$ либо $c > \max_y (U + \kappa \sqrt{T}/M)$. В данном случае отсутствуют точки поворота y_a и критическая точка y_c . Заменяем в (1.4) нижний предел интегрирования нулем и удовлетворим граничным условиям. В результате получим собственную функцию $p(y)$



Фиг. 1

и дисперсионное соотношение

$$p(y) = (U - c) T^{-1/2} q^{-1/4} C_1 \cos\left(\alpha \int_0^y \sqrt{q} dy\right) (1 + O(\alpha^{-1}))$$

$$\cos\left(\alpha \int_0^1 \sqrt{q} dy\right) = 0 \quad (1.8)$$

Решая (1.8) относительно волнового числа α , имеем дискретный набор собственных значений

$$\alpha_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \left[\int_0^1 \sqrt{q} dy\right]^{-1}, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Таким образом, при $q > 0$ краевая задача (1.1), (1.2), в главном приближении имеет бесконечный дискретный спектр α_n . Формула (1.9) получена с точностью $O(\alpha^{-1})$. Структура собственной функции и характер распространения возмущения показаны схематически на фиг. 1, а. С точки зрения геометрической акустики, лучи, по которым распространяются волны, последовательно отражаются от скачка и стенки. Волновое число ν по y -направлению имеет вид $\nu = \alpha \sqrt{q}$. Ударный слой работает как резонатор, который весь заполнен нейтральными акустическими колебаниями разных длин волн. Скачок уплотнения и твердая стенка отражают звуковые волны с коэффициентом, равным единице.

Рассмотрим случай, когда в нижней части ударного слоя $q > 0$ (область I), в верхней $q < 0$ (область II на фиг. 1, б). Для этого случая равномерно пригодное асимптотическое решение определяется формулой (1.6). При большом волновом числе переменная ξ из (1.5), вычисленная на стенке или на скачке, будет также большой величиной. Тогда применимы асимптотические разложения для функций Эйри [8]

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{\xi^{-1/4} \exp(-2/3 \xi^{3/2})}{2\sqrt{\pi}} [1 + O(\xi^{-3/2})], \quad \xi \rightarrow +\infty$$

$$\text{Bi}(\xi) = \frac{\xi^{-1/4} \exp(2/3 \xi^{3/2})}{\sqrt{\pi}} [1 + O(\xi^{-3/2})], \quad \xi \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\xi) &= \frac{(-\xi)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left[\frac{2}{3} (-\xi)^{3/4} + \frac{\pi}{4} \right] [1 + O(\xi^{-3/4})], \quad \xi \rightarrow -\infty \\ \text{Bi}(\xi) &= \frac{(-\xi)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left[\frac{2}{3} (-\xi)^{3/4} + \frac{\pi}{4} \right] [1 + O(\xi^{-3/4})], \quad \xi \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя асимптотики (1.10) в (1.6), получаем в областях I, II

$$\begin{aligned} p_I &= \frac{U-c}{\sqrt{T\pi}} q^{-1/4} \left[b_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \int_y^{y_a} \sqrt{\bar{q}} dy \right) + b_2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \int_y^{y_a} \sqrt{\bar{q}} dy \right) \right] \\ p_{II} &= \frac{U-c}{\sqrt{T\pi}} \left[b_1 \exp \left(-\alpha \int_{y_a}^y \sqrt{-q} dy \right) + b_2 \exp \left(\alpha \int_{y_a}^y \sqrt{-q} dy \right) \right] \end{aligned}$$

Из условий (1.2) в главном приближении получаем систему уравнений для констант b_1, b_2 , из которой находим дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \int_0^{y_a} \sqrt{\bar{q}} dy \right) &= -\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \int_0^{y_a} \sqrt{\bar{q}} dy \right) \left[2 \exp \left(\alpha \int_{y_a}^1 \sqrt{-q} dy \right) \right]^{-1} \times \\ &\times [1 + O(\alpha^{-1})] \end{aligned} \quad (1.11)$$

При больших α член в правой части экспоненциально стремится к нулю и дисперсионное соотношение для волнового числа α принимает вид

$$\alpha_n = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \left(\int_0^{y_a} \sqrt{\bar{q}} dy \right)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.12)$$

На фиг. 1, б схематически показано распределение возмущения давления $p(y)$ и распространение волн с точки зрения геометрической акустики. В области II давление экспоненциально затухает, т. е. эта область является «зоной молчания». Ударная волна влияет на дисперсионное соотношение экспоненциально слабо. Таким образом, ударный слой является волноводом, ограниченным стенкой и точкой поворота y_a .

Случай, когда точка поворота совпадает со скачком уплотнения, необходимо рассмотреть отдельно. При $y_a=1$ остается только одна зона I, в которой решение имеет вид (1.6). Константы b_1, b_2 связаны с условием на скачке соотношением $b_1 \text{Ai}(0) + b_2 \text{Bi}(0) = 0$. При нулевом значении аргумента $\text{Ai}(0) = \text{Bi}(0)/\sqrt{3}$, поэтому $b_1 = -b_2 \sqrt{3}$. Условие $p'(0) = 0$ в главном приближении дает следующее уравнение, из которого получается дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \int_0^1 \sqrt{\bar{q}} dy \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \int_0^1 \sqrt{\bar{q}} dy \right) &= 0 \\ \alpha_n &= \left(\frac{5}{12} + n \right) \pi \left(\int_0^1 \sqrt{\bar{q}} dy \right)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Рассмотрим режим, когда в ударном слое существует одна точка поворота $q(y_a) = 0, q'(y_a) < 0$ и критическая точка y_c . В этом случае необходимо срастить решения, пригодные в областях I, II, III и C, показанных на фиг. 2, а. Асимптотический предел $y \rightarrow y_c - 0$ решения (1.6) имеет вид

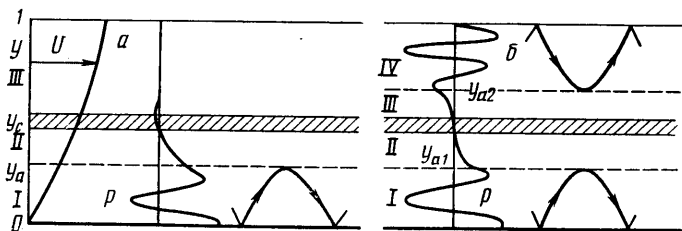
согласно разложениям (1.10)

$$p_{II} \sim \frac{U_c'(y-y_c)}{2\sqrt{\pi\kappa T}} [a_1 \exp(-\alpha J_1 - \alpha\kappa(y-y_c)) + 2a_2 \exp(\alpha J_1 + \alpha\kappa(y-y_c))]]$$

$$U_c' = U'(y_c), \quad J_1 = \int_{y_a}^{y_c} \sqrt{-q} dy > 0$$

В критическом слое при $|\kappa\alpha(y-y_c)| \rightarrow \infty$, пользуясь произволом выбора констант, получим из (1.7)

$$p_c \sim \frac{U_c'(y-y_c)}{2\sqrt{\pi\kappa T}} [d_1 \exp(-\alpha\kappa(y-y_c)) + d_2 \exp(\alpha\kappa(y-y_c))]]$$



Фиг. 2

Асимптотическое решение (1.4), справедливое в области III, имеет предел

$$p_{III} \sim \frac{U_c'(y-y_c)}{2\sqrt{\pi\kappa T}} [b_1 \exp(-\alpha J_2 + \alpha\kappa(y-y_c)) + b_2 \exp(\alpha J_2 - \alpha\kappa(y-y_c))] \quad y \rightarrow y_c + 0, \quad J_2 = \int_{y_c}^1 \sqrt{-q} dy > 0$$

Пользуясь этими соотношениями, находим из условий сращивания и граничных условий связь между константами

$$a_1 \exp(-\alpha J_1) = d_1 = b_2 \exp(\alpha J_2), \quad 2a_2 \exp(\alpha J_1) = d_2 = b_1 \exp(-\alpha J_2) \\ b_1 \exp(-\alpha J_2) + b_2 \exp(\alpha J_2) = 0$$

Этих уравнений достаточно для вывода дисперсионного соотношения, которое в точности совпадает с соотношениями (1.11), (1.12), полученными без учета критического слоя.

Рассмотрим режим, при котором в области течения находятся одна критическая точка и две точки поворота $y_{a,1}, y_{a,2}$, причем $0 < y_{a,1} < y_c < y_{a,2} < 1$, $q'(y_{a,1}) < 0$, $q'(y_{a,2}) > 0$ (см. фиг. 2, б).

Для областей I, II, C решения не изменятся. В областях III и IV имеем

$$p = \frac{U-c}{\sqrt{T}} \left| \frac{\eta}{q} \right|^n [b_1 \text{Ai}(\eta) + b_2 \text{Bi}(\eta)]$$

$$\eta = \pm \left| \frac{3}{2} \alpha \int_{y_{a,2}}^y \sqrt{|q|} dy \right|^n$$

Знак плюс берется в области III, минус — в области IV. Производя сра-

щивание, получаем дисперсионное соотношение

$$\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = -\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 [4 \exp(2\alpha J)]^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})] \quad (1.13)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + \alpha \int_0^{v_{\alpha,1}} \sqrt{q} dy, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \alpha \int_{v_{\alpha,2}}^1 \sqrt{q} dy$$

$$J = \int_{v_{\alpha,1}}^{v_{\alpha,2}} \sqrt{-q} dy > 0$$

Асимптотическая структура волн для этого режима показана на фиг. 2, б. Ударный слой подобен двум взаимодействующим волноводам. Интенсивность взаимодействия определяется экспонентой в соотношении (1.13). В общем случае (1.13) является трансцендентным уравнением относительно α . Однако при $\alpha J \gg 1$ (слабовзаимодействующие волноводы) правой частью можно пренебречь и дисперсионное соотношение расщепится на два

$$\alpha_n = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \left(\int_0^{v_{\alpha,1}} \sqrt{q} dy \right)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\alpha_m = \left(\frac{3}{4} \pi + \pi m \right) \left(\int_{v_{\alpha,2}}^1 \sqrt{q} dy \right)^{-1}, \quad m \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

Первое соотношение описывает колебания в нижнем волноводе, второе — в верхнем. Расщепление (1.14) справедливо далеко от точек синхронизма, в которых $\alpha_n = \alpha_m$.

Другой предельный режим — сильно взаимодействующие волноводы ($J \rightarrow 0$) соотношением (1.13) не описывается. В этом случае $y_{\alpha,1} \rightarrow y_c - 0$, $y_{\alpha,2} \rightarrow y_c + 0$, причем из-за особенности в критической точке ВКБ-решения типа (1.6) непригодны в точках поворота. Слияние точек поворота с критической точкой равносильно условию $|y_c - y_c| \approx \kappa \sqrt{T} (U_c' M)^{-1} \ll 1$, т. е. рассматривается гиперзвуковой предел, $M \gg 1$.

Будем искать решение в виде ряда по малому параметру

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad \varepsilon = M^{-1/2} \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty$$

Переходя к внутренней переменной критического слоя C , в главном приближении получим

$$\frac{d^2 p_0}{d\xi^2} - \frac{2}{\xi} \frac{dp_0}{d\xi} + \frac{\alpha^2 U_c'^2}{T_c} \xi^2 p_0 = 0 \quad (1.15)$$

$$\xi = \sqrt{M} (y - y_c)$$

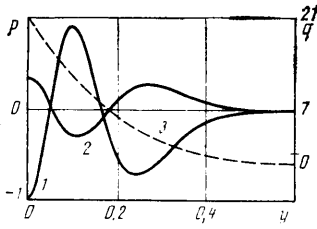
Общее решение (1.15) имеет вид

$$p_0 = \xi_1^{-1/2} [C_1 J_{3/2}(\xi_1) + C_2 Y_{3/2}(\xi_1)], \quad \xi_1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha U_c'}{\sqrt{T_c}} \xi^2 \quad (1.16)$$

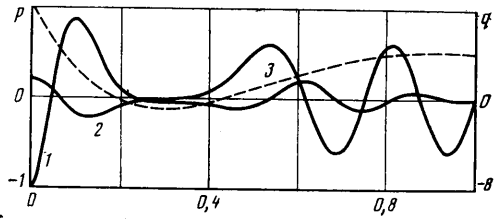
Здесь $J_{3/2}$, $Y_{3/2}$ — функции Бесселя первого и второго рода. Точка $\xi_1 = 0$ является точкой ветвления для (1.16).

Асимптотические решения в областях I и II

$$p_1 = \frac{U-c}{\sqrt{T}} q_1^{-1/2} \left[a_1 \cos \left(M \int_y^{y_c} \sqrt{q_1} dy + \varphi \right) + a_2 \sin \left(M \int_y^{y_c} \sqrt{q_1} dy + \varphi \right) \right]$$



Фиг. 3



Фиг. 4

(1.17)

$$P_{11} = \frac{U-c}{\sqrt{T}} q_1^{-1/2} \left[b_1 \cos \left(M \int_{v_c}^y \sqrt{q_1} dy + \varphi \right) + b_2 \sin \left(M \int_{v_c}^y \sqrt{q_1} dy + \varphi \right) \right]$$

Здесь $q_1 = \alpha^2 (U-c)^2 / T > 0$, $\varphi = -5\pi/8$. После сращения (1.17) с асимптотиками (1.16) при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ получим формулы связи $a_1 = b_1 - 2b_2$, $a_2 = -b_2$, которые совместно с граничными условиями дают дисперсионное соотношение

$$\sqrt{2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi_1 = \alpha M \int_{v_c}^1 \frac{U-c}{\sqrt{T}} dy, \quad \varphi_2 = \alpha M \int_0^{v_c} \frac{c-U}{\sqrt{T}} dy$$

При рациональном φ_1/φ_2 собственные значения образуют бесконечную периодическую последовательность. В противном случае последовательность будет квазипериодической.

Отметим, что с увеличением числа Маха поперечные размеры волноводов растут, взаимодействие между их модами усиливается. С увеличением угла наклона волны $\theta_w = \arctg(\beta/\alpha)$ области волноводов, в которых $q > 0$, сужаются. Для заданных распределений $U(y)$, $T(y)$ и значений M , c существуют критические углы наклона, начиная с которых, осциллирующих по y решений не существует. Они определяются из условия $\beta^2/\alpha^2 > \max_y [(U-c)^2 M^2 / T - 1]$.

2. Для иллюстрации результатов асимптотического анализа выполнены численные расчеты для системы (1.1), (1.2). Основное течение в ударном слое полагалось изотермическим, $T(y) = 1$, и представляло собой плоскопараллельный пограничный слой с числом Прандтля $Pr = 1$, безразмерным коэффициентом вязкости $\mu = T = 1$, показателем адиабаты $\gamma = 1,001$. Между скачком уплотнения и пограничным слоем поток считался однородным. Безразмерная толщина вытеснения пограничного слоя $\delta^* = 0,276$.

На фиг. 3, 4 приведены распределения $\text{Re}p(y)$, $\text{Im}p(y)$ (кривые 1, 2 соответственно) и функция $q(y)$ (кривая 3). Расчеты выполнены для числа Маха за скачком уплотнения $M = 5$. Рассмотрены двумерные волны с $\beta = 0$ ($\kappa = 1$). Собственные функции с волновым числом $\alpha = 7,663$ и частотой $\omega = 7,266 - i0,0031$, показанные на фиг. 3, согласуются с асимптотической схемой фиг. 2, а и соответствуют моде с номером $n = 2$ в дисперсионном соотношении (1.12). Для $\alpha = 14,429$, $\omega = 8,492 - i0,0125$ на фиг. 4 реализуется режим двух взаимодействующих волноводов по схеме фиг. 2, б. В нижнем волноводе, $0 < y < y_{a,1}$, имеется волна, соответствующая номеру $n = 1$ в дисперсионном соотношении (1.14). В верхнем волноводе, $y_{a,2} < y < 1$ — волна с номером $m = 3$. Аналогичное качественное соответствие прямого численного расчета с асимптотической структурой собственных колебаний наблюдается на других, рассмотренных в разд. 1 режимах.

Отметим, что асимптотический анализ дает наглядную информацию о свойствах собственных колебаний в ударном слое. Полученные дисперсионные соотношения можно использовать в качестве начального приближения для численных расчетов характеристик устойчивости различных мод с учетом вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. В. Влияние скачка уплотнения, ограничивающего гиперзвуковой ударный слой, на устойчивость пограничного слоя // Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск, 1982. С. 25-34.
2. Petrov G. V. Stability of thin viscous shock layer on a wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-Turbulent Transition. IUTAM Symp., Novosibirsk/USSR, 1984. P. 487-493.
3. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 145 с.
4. Колыхалов П. И. Неустойчивость плоскопараллельных сверхзвуковых потоков газа в линейном приближении // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 10-16.
5. Блохин А. М. Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне: Препринт № 110. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. 18 с.
6. Бетхов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 352 с.
7. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1987