

УДК 532.517.4:533.6.011.72

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО
ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ В КОНИЧЕСКОМ СОПЛЕ ЛАВАЛЯ
НА РЕЖИМЕ ПЕРЕРАСШИРЕНИЯ**

МАЛИК Т. И., ТАГИРОВ Р. К.

При работе сверхзвукового сопла Лавалья на режиме перерасширения возникает отрыв потока, приводящий к изменению характеристик сопла. В настоящее время по этой проблеме накоплен обширный, в основном экспериментальный, материал (см., например, [1-4]). Имеются различные (полуэмпирические, численные) методы расчета турбулентных отрывных течений, однако относительно мало расчетных исследований отрывных течений непосредственно в сверхзвуковой части сопла Лавалья. Эмпирические методы расчета таких течений даны, например, в [1, 5, 6]. С привлечением численных методов расчета невязкого ядра потока отрывное течение рассмотрено в [7, 8] в предположении постоянства давления в отрывной зоне.

В то же время в литературе нет работ, в которых при расчете отрыва в сопле учитывались бы особенности пограничного слоя, был бы объяснен и учтен эффект повышения давления вдоль стенки в области восстановления.

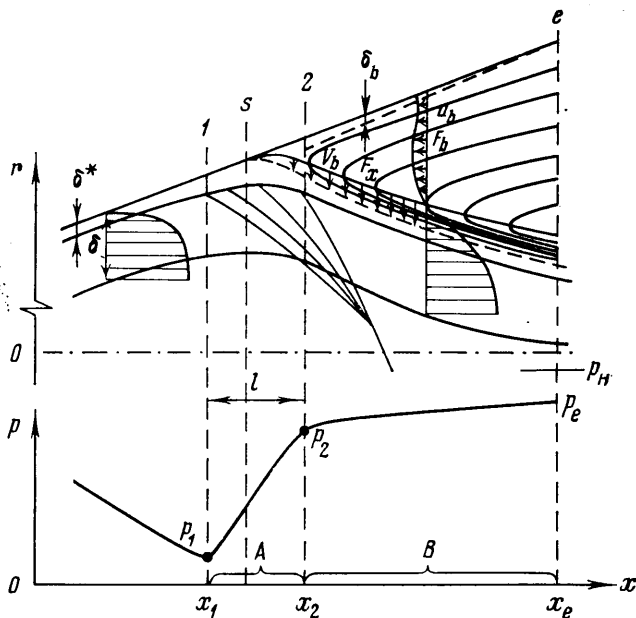
Цель данной работы — разработка математической модели отрывного течения в сопле с учетом влияния пристеночного пограничного слоя и изменения давления вдоль всей отрывной зоны внутри сопла, а также проведение численного исследования влияния геометрических и газодинамических факторов на картину отрывного течения.

1. Рассмотрим схему отрывного течения сверхзвуковой части конического сопла Лавалья, ограничиваясь случаями, когда оторвавшийся поток симметричен и не присоединяется повторно к стенке.

На основе имеющихся данных (см., например, [9,10]) можно считать, что существует два типа отрывных течений в сопле: симметричный и несимметричный. Первый, по-видимому, характерен для осесимметричных сопел, второй — для плоских, что можно объяснить следующим образом. Допустим, что под влиянием случайного возмущения граница симметричной струи может сдвинуться к одной из стенок плоского сопла. Тогда в этой зоне отрыва давление будет падать из-за уменьшения площади и массы потока, поступающей из окружающего пространства, и под влиянием разности давлений на двух границах плоская струя присоединится с одной стороны к стенке. Для осесимметричного сопла такое возмущение может и не вызывать аналогичного смещения струи, поскольку частицы газа будут поступать в область разрежения не только вдоль рассматриваемой образующей сопла, но и по всему кольцевому объему отрывной зоны, ликвидируя тем самым влияние кратковременного возмущения.

Вероятно, и в плоском сопле можно ожидать появления симметричного отрыва, если угол раствора сопла достаточно велик или отрыв происходит недалеко от выходного сечения сопла, или возмущения очень малы. Очевидно также, что при определенных условиях, например при наличии охлаждаемых стенок, и для осесимметричного сопла можно ожидать появления несимметричного отрыва.

Испытания натурального сопла трубчатой конструкции с охлаждаемыми стенками показали [10], что, хотя отрыв происходит по всему периметру сопла, линия отрыва имеет несимметричную форму. Наличие такого отрыва приводит к появлению боковой силы на режимах перерасширения. Отмечено, что вблизи выходного сечения сопла несимметричность отрыва



Фиг. 1

становится малой. Испытания на холодном воздухе показали, что внутри сопла возникает симметричный отрыв. По-видимому, такое различие в картинах отрыва объясняется тем, что устойчивость пограничного слоя к отрыву, т. е. величина критического перепада давлений на скачке P_k , зависит от температурного фактора T_w [11]. Поскольку в сопле трубчатой конструкции нельзя достичь симметричного охлаждения по периметру, то на различных образующих будут различные значения T_w и различные продольные координаты точек отрыва x_s .

Пусть в некотором сечении 1 (фиг. 1) перед областью взаимодействия (сечение «зарождающегося» отрыва) все параметры известны, т. е. известны параметры невозмущенного пограничного слоя и невязкого ядра потока. В продольном направлении отрывное течение можно разделить на две характерные области: область взаимодействия А, где происходит относительно резкое повышение давления от p_1 до p_2 , и область восстановления В, где имеет место относительно медленный рост давления от p_2 до $p_e < p_n$, где p_n — давление в затопленном пространстве. Отношение $p_2/p_1 = P_k$ называется критическим перепадом давлений на скачке [11]. Для определенности принимается, что от p_1 до p_2 давление вдоль стенки меняется по закону кубической параболы. Вид этой кривой не имеет принципиального значения. Пробные расчеты с линейным изменением давления на этом относительно малом участке привели практически к тем же результатам.

В поперечном направлении можно выделить следующие характерные участки: невязкий основной поток, зона смещения, обратный поток в зоне отрыва, пристеночный пограничный слой в зоне обратного потока. Предполагается, что в каждом поперечном сечении зоны смещения и отрыва давление сохраняется постоянным.

Для решения задачи будем исходить из следующего основного положения: течение в области обратного потока и в зоне смещения близко к автомодельному. Иначе говоря, при перемещении точки отрыва вдоль стенки сопла картина отрывного течения сохраняет подобный вид. Это позволяет использовать для рассматриваемой задачи известные автомодельные решения, а для учета некоторых деталей течения — поправочные константы.

В области взаимодействия давление повышается под воздействием ко-сого скачка уплотнения. В области восстановления, как показывают экспериментальные данные, давление сохраняется практически постоянным, если угол раствора сопла большой. При уменьшении этого угла появляется положительный градиент давления. Этот рост давления можно объяснить следующим образом. За точкой отрыва s струя отходит от стенки сопла. Под влиянием сил трения вдоль границы струи образуется зона смешения, которая эжектирует газ из области отрыва. В результате газ из окружающего пространства поступает в зону отрыва и создает обратный дозвуковой поток в сужающемся канале между стенкой сопла и зоной смешения. Если в этой зоне выделить линию нулевых продольных скоростей, то станет ясно, что вся поступающая из окружающего пространства масса газа должна отводиться через эту линию.

При увеличении угла раствора сопла интенсивность эжектирования газа зоной смешения сохраняется, а поперечные площади обратного потока увеличиваются. Это ведет к уменьшению скорости обратного потока и соответственно градиента давления. В целях упрощения задачи предполагается, что обратный поток одномерен и имеет постоянную плотность, а вертикальная составляющая скорости v_b вдоль линии нулевых скоростей сохраняет постоянное значение. Возникающие из-за этих предположений погрешности в некоторой степени будут компенсироваться с помощью поправочных коэффициентов.

В целом математическая модель отрывного течения в сопле включает решение трех задач: определения параметров невязкого основного потока, пристеночного пограничного слоя и отрывной области.

В первой задаче течение сжимаемого невязкого и нетеплопроводного газа описывается системой уравнений Эйлера, для численного интегрирования которых используется метод установления [8]. При этом геометрическая форма сопла, все необходимые параметры в начальном сечении сужающейся части сопла и отношение полного давления потока к давлению затопленного пространства $x_c = p_0^*/p_H$ считаются заданными.

Во второй задаче предполагается, что вдоль стенки сопла от критического сечения нарастает турбулентный пограничный слой. Для его расчета используется интегральный метод работы [12].

Решение третьей задачи включает нахождение местоположения области взаимодействия (координаты x_1) и расчет распределения статического давления вдоль области восстановления. Координату x_1 будем определять из условия достижения равенства $P_K(x) = p_2/p_1$.

Методы определения критического перепада давления P_K на скачке уплотнения и длины области взаимодействия $l = x_2 - x_1$ в зависимости от M_1 , числа Рейнольдса Re_x и толщины вытеснения δ_1^* были даны в работах [11, 13].

Для определения p_2/p_1 запишем выражение для статического давления обратного потока в виде

$$p_b = p_b^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_b^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1)$$

где u_b , p_b^* — скорость и полное давление обратного потока, в котором $p_b(x) < p_H$, γ — показатель адиабаты. Считаем, что

$$p_b^* = p_H \sigma, \quad \sigma \approx 1 - C_{fb} \frac{\rho_b u_b^2}{p_H} k_1 (x_e - x)$$

где σ — коэффициент сохранения полного давления, x_e — координата выходного сечения сопла, k_1 — поправочный коэффициент, C_{fb} — пристеночный коэффициент трения обратного потока.

Введем в рассмотрение отношение скоростей двух смешивающихся потоков (обратного и основного) при отсутствии тепловых потоков: $m = u_b/u_c$.

Скорость на границе невязкого ядра основного потока (на линии вытеснения) на каждой итерации решения считается известной величиной, а m — неизвестной. В соответствии с [14] введем относительную вертикальную скорость на линии нулевых скоростей в зоне смешения

$$V_b^\circ = \frac{k_2}{2} \frac{v_b}{u_c + u_b} (1 + \rho_b^\circ), \quad \rho_b^\circ = \frac{\rho_b}{\rho_c}, \quad v_b \approx \text{const}$$

где k_2 — константа, v_b — вертикальная составляющая скорости на линии нулевых скоростей. Это выражение перепишем в виде

$$m = \left[\frac{2}{k_2 V_b^\circ (1 + \rho_b^\circ)} \frac{v_b}{u_b} - 1 \right]^{-1} \quad (2)$$

Теперь задача свелась к определению V_b° и v_b/u_b . Величину V_b° найдем из решения автомодельной задачи плоскопараллельного смешения двух потоков, текущих в противоположных направлениях. На основе работы [14] это решение получается в виде

$$V_b^\circ = \frac{B_2 - (1+m)B_1}{1 - mB_3}$$

$$B_1 = A_0 - 2A_1 + A_2 - \frac{m}{m+1} (A_0 - A_1)$$

$$B_2 = 1 - \frac{A_0 - 1}{m+1} - \left[2 - \frac{m}{m+1} - \frac{1}{\rho_b^\circ (m+1)} \right] A_1 + \left(1 - \frac{1}{\rho_b^\circ} \right) A_2$$

$$B_3 = \frac{A_1 - (m+1)A_2}{A_0 - (m+2)A_1 + (m+1)A_2}$$

$$A_0 = \int_0^1 \rho^\circ d\eta, \quad A_1 = \int_0^1 \rho^\circ f d\eta, \quad A_2 = \int_0^1 \rho^\circ f^2 d\eta$$

$$f = (1 - \eta^{1.5})^2, \quad \eta = \frac{y - y_b}{b}, \quad \rho^\circ = \frac{1 - C_c^2}{1 - \varphi^2 C_c^2}$$

$$\varphi = 1 - (m+1)f, \quad C_c^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_c^2$$

Для определения v_b/u_b используем уравнение неразрывности для обратного потока (см. схему на фиг. 1)

$$k_3 u_b F_b - 2k_4 r_w \delta_b^* u_b = v_b F_x, \quad F_b \approx r_w^2 - r_c^2, \quad F_x \approx 2 \int_{x_1}^x r_c dx$$

где δ_b^* — толщина вытеснения пристеночного пограничного слоя; F_b , F_x — поперечная площадь обратного потока и боковая площадь струи, определяемые в предположении, что линия вытеснения (радиус границы эквивалентной невязкой струи) зоны смешения совпадает с линией нулевых скоростей; k_3 и k_4 — поправочные коэффициенты, учитывающие отличие действительного течения от одномерного; r_w — радиус стенки сопла.

После некоторых преобразований уравнение (2) принимает следующий окончательный вид:

$$m = \left\{ Q \left[1 + (x - x_1) \frac{\text{tg } \alpha}{r_1 + r_c} \right] - 1 \right\}^{-1} \quad (3)$$

$$Q = \frac{2k_3 F_x^\circ}{k_2 V_b^\circ (1 + \rho_b^\circ)} \left[F_b^\circ (\text{tg } \alpha + \text{tg } \theta_c) - \frac{2k_4 r_w \delta_b^*}{(x - x_1)(r_w + r_c)} \right]$$

$$F_x^\circ = \frac{(x-x_1)(r_1+r_c)}{F_x}, \quad F_b^\circ = \frac{F_b}{(x-x_1)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta_c)(r_v+r_c)}$$

где α — угол наклона стенки, θ_c — угол наклона луча, проведенного из точки 1 на стенке до границы невязкой струи в рассматриваемом сечении.

Таким образом, расчет отрывного течения в сопле ведется по следующей схеме. Проводится расчет невязкого безотрывного течения в сопле для какого-либо большого значения λ_c . Определяется распределение параметров (δ^*, C_f) пристеночного пограничного слоя. Задается исследуемое значение λ_c и ищется решение задачи в процессе установления по времени. При этом на каждом временном шаге известны координата x_1 и все параметры невязкой струи с предыдущего временного шага. Для этого сечения известны, следовательно, M_1 , p_1 , $(dp/dx)_1$, $\operatorname{Re}_x = \rho_1 u_1 x / \mu_1$, δ_1^* и C_{f1} .

С помощью соотношений работ [11, 13] определяются критический перепад на скачке P_K и длина области взаимодействия l . Поскольку граница струи известна, то определяются площади F_b и F_x , а затем v_b/u_b , V_b° , m , p_b с помощью соотношений (3), (1) для сечения $x_2 = x_1 + l$. Далее определяется отношение $p_2/p_1 = p_b(x_2)/p_1$ и уточняется координата x_1 : если $P_K > p_2/p_1$, то $(x_1)_i = (x_1)_{i-1} + \Delta x$, если $P_K < p_2/p_1$, то $(x_1)_i = (x_1)_{i-1} - \Delta x$, где Δx — продольный размер расчетной сетки, i — номер итерации (номер шага по времени).

С помощью соотношений (3), (1) определяется распределение давления $p_b(x)$ от x_2 до x_e , а с помощью аппроксимации кубической параболой — между сечениями x_1 и x_2 . При этом четыре коэффициента параболы определяются из следующих условий: $p = p_1$, $dp/dx = 2(p_2 - p_1)/l$ при $x = x_1$; $p = p_2$, $dp/dx = (dp_b/dx)_2$ при $x = x_2$.

С использованием найденного распределения давления от x_1 до x_e проводится новый расчет границы невязкой струи на новом временном шаге. Установление решения по времени ведется до тех пор, пока максимальное относительное различие давлений в поле невязкой струи, сравниваемых через 50 временных слоев, не станет меньше заданной величины 0,01. При этом достигается и искомое равенство $P_K = p_2/p_1$.

Из условия наилучшего согласования рассчитываемого распределения давления вдоль стенки с экспериментальными данными были подобраны следующие значения коэффициентов: $k_1 = 1,7/(\operatorname{tg} \alpha)^{1,5}$, $k_2 = 0,052$, $k_3 = 0,75$, $k_4 = 0,5$.

Для получения устойчивого совместного решения для области отрыва и невязкого ядра потока в функцию Q , входящую в правую часть уравнения (3), были внесены упрощения. Первое: для избежания итерационного поиска m в сечении 2 предполагалось, что функция Q зависит от значения m_a , определяемого с помощью решения автомодельной задачи истечения плоской турбулентной струи из ограниченного пространства [15], которое представляется в виде $m_a = 0,15(1 - 0,139M_2)/\operatorname{tg} \theta_s$, где θ_s — угол отклонения потока при отрыве, равный углу отклонения потока в скачке уплотнения. Второе: угол θ_c , входящий в функцию Q , определяется с помощью радиуса эквивалентной струи, который находится на основе интегрирования соотношений Прандтля — Майера при известном градиенте давления. Третье: предполагается, что в диапазоне $x_2 \leq x \leq x_e$ функция $Q = Q(x_2) = \operatorname{const}$.

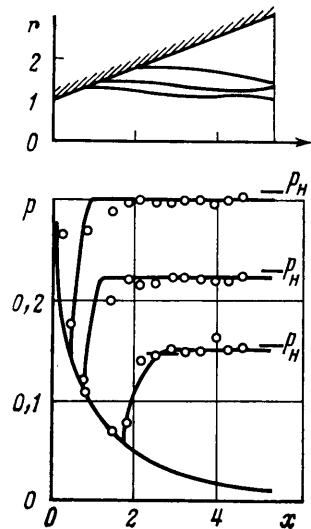
2. Поскольку разработанный метод расчета отрывного течения в сопле полупирический, он требует экспериментальной проверки. Расчетные исследования были проведены для конических сопел с углом раствора стенок $2\alpha = 8-45^\circ$, для которых имелись экспериментальные распределения давления, полученные в МВТУ им. Н. Э. Баумана.

Эти сопла имели одну и ту же сужающуюся часть (радиус кривизны стенки перед критическим сечением равен 2, угол наклона стенки 45° , радиус цилиндрического входного участка 4,4), но разные расширяющиеся части, примыкающие к сужающейся части с образованием точки излома и имеющие радиус выходного сечения 3,2 (радиус критического сечения равен единице). Предполагалось, что тепловые по-

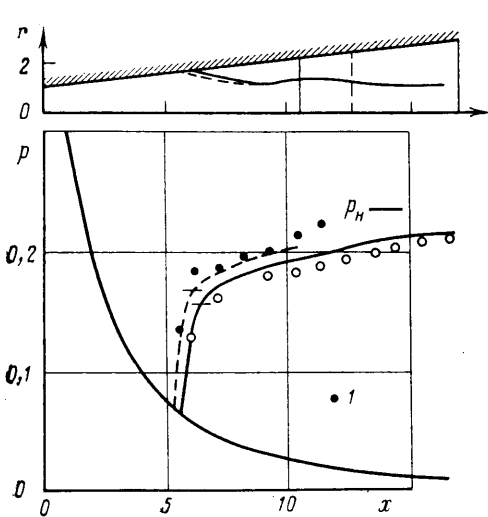
токи отсутствуют, пограничный слой на стенке соответствует развитому турбулентному режиму. При расчетах принималось: $\gamma=1,4$, число Рейнольдса $Re_L=10^7$ и начальная толщина вытеснения $\delta_0^*=0,001$. Расчет каждого варианта начинался с безотрывного режима, затем по мере установления решения по времени точка зарывающегося отрыва перемещалась внутрь сопла до достижения решения для заданного κ_c .

Полученные распределения давления на отрывных и безотрывных режимах показаны на фиг. 2–4 сплошными линиями для конических сопел, имеющих углы раствора сверхзвуковой части сопла $2\alpha=45, 14, 8^\circ$ соответственно. На фиг. 2 показаны распределения давления и границы оторвавшихся струй для $\kappa_c=4,4; 5,88; 8,74$, на фиг. 3 — для $\kappa_c=5,71$, на фиг. 4 — для $\kappa_c=7,88$. На этих же графиках точками обозначены результаты измерений. Согласование расчетных и экспериментальных данных удовлетворительное. На фиг. 3 приведены также результаты расчетного (штриховая линия, $x_c=10,4$) и экспериментального (точки 1, $x_c=12,6$) исследований влияния на распределение давления уменьшения длины исходного сопла, имеющего длину $x_c=17$. При уменьшении длины, как и следовало ожидать, точка x_1 смещалась вверх по потоку в сторону критического сечения сопла.

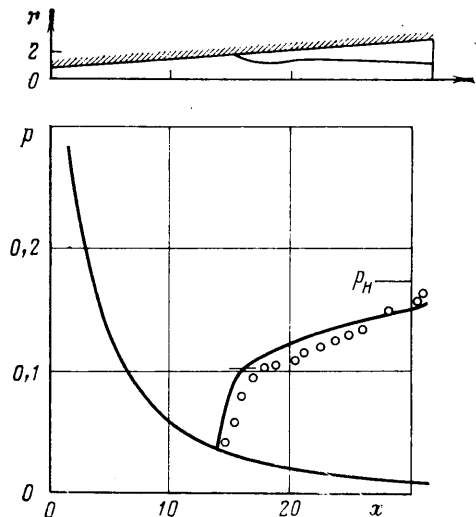
Результаты расчета показывают, что по мере уменьшения κ_c точка x_1 смещается внутрь сопла, при этом происходит уменьшение длины области взаимодействия, обусловленное уменьшением толщины вытеснения набегающего пограничного слоя. Этот результат нуждается в экспериментальной проверке путем измерений па-



Фиг. 2

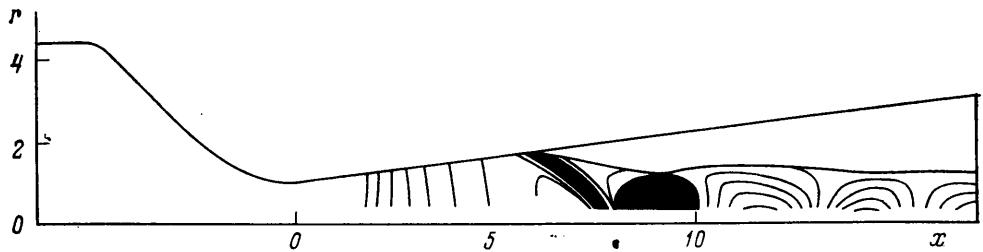


Фиг. 3



Фиг. 4

раметров пристеночного пограничного слоя. По мере уменьшения угла полураствора сопла происходит все более интенсивное повышение давления в области восстановления. Отметим, что на всех графиках горизонтальные черточки справа обозначают уровень давления в затопленном пространстве p_H , а черточки слева — рассчитанную величину $p_2=P_{кр1}$ за скачком уплотнения.



Фиг. 5

Представление о характере течения в ядре потока дают изобары (фиг. 5). Эта картина течения соответствует распределению давления, приведенному на фиг. 3 для $\lambda_e=5,71$, $x_e=17$. Видны косые скачки уплотнения, идущие из области взаимодействия, и бочкообразная структура ядра потока. Изобары показаны только внутри невязкого ядра потока до линии вытеснения зоны смешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И., Лихущин В. Я., Некрасов И. П., Соркин Л. И. Влияние вязкости на сверхзвуковой поток со скачками уплотнения // Тр. ЦИАМ. 1952. № 224. 28 с.
2. Herbert M. V., Herd R. J. Boundary-layer separation in supersonic propelling nozzles. // Aeronaut. Res. Council. Rep. and Mem. 1964. № 3421. 71 p.
3. Sunley H. L. G., Ferriman V. N. Jet separation in conical nozzles // J. Roy. Aeronaut. Soc. 1964. V. 68. № 648. P. 808–818.
4. Зеленков О. С., Юрков А. В. Экспериментальное исследование отрыва потока в недорасширенных конических соплах // Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук. 1968. Вып. 43. № 338. С. 94–101.
5. Васильев А. П., Кудрявцев В. М., Кузнецов В. А. и др. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. М.: Высш. шк., 1975. 656 с.
6. Буркальцев В. А., Туманов М. Д. К расчету статического давления за скачком уплотнения на стенке перерасширенного конического сопла // Изв. вузов. Машиностроение. 1977. № 11. С. 185–187.
7. Meanze G., Fourmaux A. A coupled inverse-inverse method for over-expanded supersonic nozzles // Seventh intern. simp. on air breathing engines. 1985. P. 45–49 (ISABE 85-7003).
8. Тагиров Р. К. Численное исследование течения в осесимметричных соплах Лавалля, включая режимы перерасширения с отрывом потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 161–165.
9. Lawrence R. A., Weynand E. E. Factors affecting flow separation in contoured supersonic nozzles // AIAA J. 1968. V. 6. № 6. P. 1159–1160.
10. Nave L. H., Coffey G. A. Sea level side loads in high-area-ratio rocket engines // AIAA Paper. 1973. № 73. 1284. 15 p.
11. Тагиров Р. К. Расчет критического перепада давлений на скачке уплотнения, возникающего при отрыве турбулентного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 38–45.
12. Sasman P. K., Cresci R. J. Compressible turbulent boundary layer with pressure gradient and heat transfer // AIAA J. 1966. V. 4. № 1. P. 19–25.
13. Малик Т. И., Тагиров Р. К. Расчет длины области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 180–183.
14. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960. 715 с.
15. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. Интегральные методы расчета. М.: Машиностроение, 1969. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.VII.1987