

УДК 532.517.4

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ТЕПЛА. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА В ТРУБЕ

ЛУЩИК В. Г., ПАВЕЛЬЕВ А. А., ЯКУБЕНКО А. Е.

Предложенная авторами в 1976 г. трехпараметрическая модель турбулентности [1] в течение последующих шести лет прошла всестороннюю проверку при исследовании течения несжимаемой жидкости в каналах, пристеночных и свободных пограничных слоях. Основные результаты проведенного исследования представлены в [2, 3], а также отмечены в [4]. Главным итогом проверки модели турбулентности следует считать подтверждение ее работоспособности и универсальности в указанном классе задач, позволяющее проводить расчеты без изменения констант, входящих в уравнения для характеристик турбулентности, которые были определены в [1, 2] и в последующих расчетах не менялись.

Следующим шагом на пути развития модели турбулентности представляет обобщение ее на случай течений с тепло- и массообменом, что позволило бы вплотную подойти к решению многих актуальных задач для практических приложений. При этом авторы отдают себе отчет в том, что с увеличением числа параметров задачи вероятность получить неправильный ответ будет больше, чем при исследовании только характеристик течения. Тем не менее, как отмечается в [5], «перспективы не такие мрачные, как это может показаться, однако, тогда как ошибка на 15% в определении коэффициента поверхностного трения может быть неприемлемо большой для многих задач аэродинамики, предсказание уровня коэффициента теплопередачи с такой степенью точности будет достаточным для большинства приложений».

Вопросам разработки моделей переноса тепла (массы) на различных уровнях замыкания посвящена обширная литература (см., например, в [5]). Поиск оптимальных решений в направлении выбора модели переноса тепла должен начинаться с простейших подходов к замыканию уравнения энергии. Таковым для определения турбулентного потока тепла с использованием гипотезы типа Буссинеска $-(v'T') = a_t \partial T / \partial y$ является введение турбулентного числа Прандтля Pr_t в определение связи турбулентной температуропроводности a_t с турбулентной вязкостью ν_t . Обоснованием правомочности такого подхода является то обстоятельство, что немногочисленные измерения характеристик турбулентного переноса импульса и тепла в неизотермических потоках подтверждают, что величины a_t и ν_t всегда одного порядка. Что же касается турбулентной вязкости, то использование для ее определения рассчитанных на основе трехпараметрической модели турбулентности полей турбулентного трения и скорости позволяет надеяться на достоверность полученных результатов. При этом Pr_t полагается величиной, постоянной по всей толщине сдвигового слоя, хотя это предположение в последнее время подвергается критике.

Очевидно, что продуктивность такого подхода можно оценить, проведя расчеты в широком диапазоне изменения определяющих параметров — чисел Рейнольдса и Прандтля, и установить границы применимости его, что и было сделано в [4]. В [4] рассмотрен теплообмен при течении среды с постоянными и переменными физическими свойствами. Учет эффектов сжимаемости потребовал дополнения соответствующими членами уравнений для характеристик турбулентности.

Сравнение результатов расчета с известными экспериментальными данными в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 10^4 - 10^6$, Прандтля $Pr = 10^{-3} - 10$, Маха $M = 0 - 4$ оказалось вполне удовлетворительным.

Следующим шагом на пути разработки моделей турбулентного переноса тепла является конструирование дифференциального уравнения переноса для турбулентного потока тепла. Следует, однако, отдавать себе отчет в том, что экспериментального материала, на котором должна базироваться эта деятельность, в настоящее время чрезвычайно мало. Как отмечается в [5], «в некоторых случаях наилучшие из имеющихся данных по простым фундаментальным течениям содержат неопределенность 50% и более по измеренным уровням турбулентного переноса тепла».

Литературу по использованию уравнения переноса для турбулентного потока тепла можно найти в обзорах [5, 6]. В монографии [7] сформулировано уравнение для турбулентного потока тепла, а в работе [8] уравнение турбулентного потока тепла использовалось совместно с моделью турбулентности, в которой уравнения пере-

носа записывались для напряжений Рейнольдса, а для масштаба турбулентности использовалась формула Прандтля — Никурадзе.

В данной работе уравнение для турбулентного потока тепла использовалось совместно с трехпараметрической моделью турбулентности. При этом для определения констант в уравнении переноса для турбулентного потока тепла использовалась та же методика, что и при разработке трехпараметрической модели.

1. Уравнение для турбулентного потока тепла. Замыкающие соотношения. Уравнение для переноса тепла в турбулентном потоке несжимаемой жидкости имеет вид [4]

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho c_p \langle u_i' T' \rangle \right) + \Phi \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi = \Phi_\mu + \Phi_t$, где $\Phi_\mu = \mu (\partial u / \partial y)^2$ в приближении пограничного слоя, а Φ_t — величина диссипации в уравнении турбулентной энергии [4]: ρ , μ , λ , c_p — плотность, динамическая вязкость, теплопроводность и удельная теплоемкость жидкости, u_i — средняя скорость. Величина $-\rho c_p \langle u_i' T' \rangle$, входящая в (1.1), представляет собой турбулентный поток тепла.

В случае стационарного плоского течения уравнения (1.1) в приближении пограничного слоя можно переписать в более простом виде

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_t \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \Phi_t \quad (1.2)$$

Величина $q_t = -c_p \langle v' T' \rangle$ заранее не известна и для ее определения требуются дополнительные гипотезы. Обычно в литературе используется гипотеза, основанная на введении турбулентного числа Прандтля

$$\text{Pr}_t = \frac{\langle u' v' \rangle}{\langle v' T' \rangle} \frac{\partial T / \partial y}{\partial u / \partial y} \quad (1.3)$$

которое считается либо постоянным во всей области течения, либо задается в виде функции, зависящей от определяющих параметров.

Во многих работах турбулентное число Прандтля считают постоянным и равным 0,85, что подтверждается экспериментами [9] для области с логарифмическим законом распределения скорости.

Используя гипотезу о постоянстве Pr_t в [4] проведены расчеты течений, в которых применима эта гипотеза. Однако, как показывают эксперименты, существуют течения, в которых постоянство величины Pr_t может нарушаться. В первую очередь это относится к течениям, в которых величины $\langle u' v' \rangle$ и $\partial u / \partial y$ обращаются в нуль в разных точках потока. В окрестности таких точек соотношение для

$$\langle v' T' \rangle = \frac{1}{\text{Pr}_t} \frac{\langle u' v' \rangle}{\partial u / \partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.4)$$

следующее из определения турбулентного числа Прандтля (1.3), будет давать неверные результаты, если не привлекать дополнительные гипотезы, которые содержатся, например в [4]. Кроме того, из (1.4) следует, что $\langle v' T' \rangle$ и $\partial T / \partial y$ обращаются в нуль в одних и тех же точках, что несправедливо для течений с профилем температуры, несимметричным относительно точки, в которой $\partial T / \partial y = 0$. Отметим также, что соотношение $\text{Pr}_t = \text{const}$ не соответствует действительности в вязком подслое [9].

Указанные недостатки можно попытаться устранить, используя уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Это уравнение может быть получено с использованием обычной процедуры [2]. В случае несжимаемой жидкости получим (см. также [7])

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \langle u_i' T' \rangle}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \langle u_i' T' \rangle}{\partial x_\alpha} \right) = -\rho c_p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\langle u_\alpha' u_i' T' \rangle + \frac{1}{\rho} \langle p' T' \rangle \delta_{i\alpha} \right) +$$

$$+ c_p \left\langle p' \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\rangle + c_p \mu \left\langle T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\alpha^2} \right\rangle + \lambda \left\langle u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_\alpha^2} \right\rangle - \\ - \rho c_p \left(\langle u_\alpha' T' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) \quad (1.5)$$

Здесь $\mu = \rho \nu$, $\lambda = \rho c_p a$, где ν, a — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности.

Для замыкания уравнения (1.5) требуются дополнительные гипотезы, которые будут сформулированы ниже.

Для первого члена в правой части (1.5), характеризующего турбулентную диффузию величины $\langle u_i' T' \rangle$, примем, как обычно, градиентную гипотезу

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\langle u_\alpha' u_i' T' \rangle + \frac{1}{\rho} \langle p' T' \rangle \delta_{\alpha i} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(a_q \sqrt{E} L \frac{\partial \langle u_i' T' \rangle}{\partial x_\alpha} \right) \quad (1.6)$$

Здесь $a_q \sqrt{E} L$ — коэффициент турбулентной диффузии, a_q — константа.

Для второго члена, описывающего связь пульсаций давления с градиентом пульсаций температуры, используем гипотезу, предложенную в [10]

$$\frac{1}{\rho} \left\langle p' \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\rangle = - c_s \frac{\sqrt{E}}{L} \langle u_i' T' \rangle, \quad E = 0,5 \Sigma \langle u_i'^2 \rangle \quad (1.7)$$

Здесь E — энергия турбулентности; L — интегральный масштаб турбулентных пульсаций скорости, определенный в [2]; c_s — константа.

Для аппроксимации третьего и четвертого членов используем гипотезы, предложенные в [7, 8]

$$\nu \left\langle T' \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \right\rangle + a \left\langle u_i' \frac{\partial^2 T}{\partial x_\alpha^2} \right\rangle = \nu f(\text{Pr}) \left(\frac{\partial^2 \langle u_i' T' \rangle}{\partial x_\alpha^2} - c_0 \frac{\langle u_i' T' \rangle}{L^2} \right) \quad (1.8)$$

Здесь $f(\text{Pr})$ — функция числа Прандтля $\text{Pr} = \nu/a$; c_0 — константа.

Два последних члена в правой части уравнения (1.5) описывают порождение величины $\langle u_i' T' \rangle$ за счет градиентов средних полей скорости и температуры. Для двумерных течений эти слагаемые будут иметь вид

$$\Pi_i = \langle u_\alpha' T' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \langle u' T' \rangle \frac{\partial v}{\partial x} + \langle v' T' \rangle \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + \langle u' v' \rangle \frac{\partial T}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial T}{\partial y} \quad (i=2) \quad (1.9)$$

Дальнейшее упрощение (1.9) связано с использованием приближения пограничного слоя. В этом случае членом $\langle u' T' \rangle \partial v / \partial x$ можно пренебречь по сравнению с членом $\langle v' T' \rangle \partial v / \partial y$, который согласно уравнению неразрывности равен $-\langle v' T' \rangle \partial u / \partial x$.

Последнее слагаемое в (1.9) будем аппроксимировать выражением $c_{10} E \partial T / \partial y$. Окончательно получим

$$\Pi_2 = - \langle v' T' \rangle \frac{\partial u}{\partial x} + \langle u' v' \rangle \frac{\partial T}{\partial x} + c_{10} E \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.10)$$

Здесь c_{10} — эмпирическая константа.

С учетом соотношений (1.6) — (1.10) в приближении пограничного слоя и полагая, что члены с производными по x в (1.10) малы, уравнение (1.5) для турбулентного потока тепла $q_i = -c_p \langle v' T' \rangle$ запишем в виде

$$\rho \left(u \frac{\partial q_i}{\partial x} + v \frac{\partial q_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [\mu f(\text{Pr}) + a_q \sqrt{E} L] \frac{\partial q_i}{\partial y} \right\} -$$

$$-[c_8 \rho \sqrt{E} L + c_9 \mu f(\text{Pr})] \frac{q_t}{L^2} + c_{10} \rho c_p E \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.11)$$

Таким образом, уравнения (1.5), (1.11) вместе с уравнениями движения, неразрывности и уравнениями переноса для характеристик турбулентности E , $\tau = -\langle u'v' \rangle$, $\omega = E/L^2$ [2] при известных константах a_0 , c_8 , c_9 , c_{10} и функции $f(\text{Pr})$ образуют замкнутую систему уравнений, позволяющую решать задачи течения с теплообменом.

2. Оценка констант в уравнении для турбулентного потока тепла. Рассмотрим стационарное плоскопараллельное в среднем турбулентное течение, направленное всюду вдоль оси x , со средней скоростью $u = u(y)$ и температурой $T = T(y)$, причем $\partial u / \partial y$ и $\partial T / \partial y$ вдоль оси x постоянны. Предполагается, что турбулентной диффузией можно пренебречь. При этих предположениях уравнения для характеристик турбулентности E , L , τ [2] и турбулентного потока тепла q_t (1.11) примут вид

$$u \frac{\partial E}{\partial x} = -(c \sqrt{E} L + c_4 \nu) \frac{E}{L^2} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{c}{2} \sqrt{E} L + \frac{c_1}{5} \nu \right) \frac{1}{L} - c_4 L \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

$$u \frac{\partial \tau}{\partial x} = -(3c \sqrt{E} L + c_6 \nu) \frac{\tau}{L^2} + c_7 E \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u \frac{\partial q_t}{\partial x} = -(c_8 \sqrt{E} L + c_9 \nu f(\text{Pr})) \frac{q_t}{L^2} + c_{10} c_p E \frac{\partial T}{\partial y}$$

Оценку для константы c_{10} в уравнении для q_t можно получить из анализа развития решеточной турбулентности с градиентами средней скорости и температуры [11] аналогично тому, как это было сделано в [2] при оценке констант c_4 и c_7 в уравнениях для L и τ . Предположим, что при развитии решеточной турбулентности при больших числах Рейнольдса турбулентности $\text{Re}_t = \sqrt{E} L / \nu$ в потоке с постоянными градиентами скорости и температуры вдали от решетки устанавливается такая структура турбулентности, при которой величины

$$\tau_0 = \frac{\tau}{E}, \quad z = \frac{L}{\sqrt{E}} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad \text{Pr}_t = \frac{c_p \tau}{q_t} \frac{\partial T / \partial y}{\partial u / \partial y}$$

постоянны и не зависят от расстояния. Так как система уравнений (2.1) должна описывать это состояние турбулентности, то, преобразуя уравнения для τ , q_t в уравнение для Pr_t , получим

$$u \frac{\partial \text{Pr}_t}{\partial x} = \left\{ c_8 - 3c + (c_7 - c_{10} \text{Pr}_t) \frac{z}{\tau_0} + [c_9 f(\text{Pr}) - c_8] \frac{1}{\text{Pr}_t} \right\} \frac{\sqrt{E}}{L} \text{Pr}_t \quad (2.2)$$

Уравнения для z и τ_0 , преобразованные из уравнений для E , L , τ , приведены в [2].

Далее, полагая $\text{Re}_t \gg 1$ и приравняв нулю производную по x в (2.2), получим следующее соотношение для константы c_{10} :

$$c_{10} = \frac{1}{\text{Pr}_{t*}} \left[c_7 + \frac{\tau_*^\circ}{z_*} (c_8 - 3c) \right] \quad (2.3)$$

Здесь z_* , τ_*° и Pr_{t*} — предельные значения величин z , τ° и Pr_t , которые устанавливаются вдали от решетки, причем $\text{Pr}_{t*} \approx 1$ [11].

Оценку для константы c_8 можно получить из анализа уравнений для τ и q_t в логарифмическом слое развитого течения в канале, где величина Pr_t постоянна [9]. Это означает, что в уравнениях переноса для τ и q_t

можно оставить только члены с «порождением» и «диссипацией», приравнявая которые, получим

$$3c \frac{\sqrt{E}}{L} \tau = c_7 E \frac{\partial u}{\partial y}, \quad c_8 \frac{\sqrt{E}}{L} q_i = c_{10} c_p E \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что

$$c_8 = 3c \frac{c_{10}}{c_7} \text{Pr}_t \quad (2.5)$$

Здесь Pr_t — значение турбулентного числа Прандтля в логарифмическом слое, которое, согласно [9], составляет 0,85.

Полагая, что $\text{Pr}_t \approx \text{Pr}_t^*$, из (2.3), (2.5) можно получить следующие значения констант: $c_8 = 3c$, $c_{10} = c_7/\text{Pr}_t$.

Оценку для константы c_9 можно получить из анализа уравнения для q_i (1.11) в непосредственной близости от стенки, где главными членами в (1.11) будут вязкие. Если положить $q_i \sim y^s$, то из определения $q_i = -c_p \langle v'T' \rangle$ следует, что $s \geq 2$, так как вблизи стенки $v' \sim y^2$. Относительно поведения T' вблизи стенки в настоящее время нет достоверной информации. Если предположить, что $T' \rightarrow 0$ аналогично u' , т. е. $T' \sim u' \sim y$ при $y \rightarrow 0$, то $\langle v'T' \rangle \sim \langle u'v' \rangle$ и константа c_9 должна совпадать с константой c_6 в члене с вязкой диссипацией уравнения для τ [2]. Таким образом, $c_9 = c_6 = 9c_1$.

Константа a_q в диффузионном члене уравнения (1.11) по порядку величины должна совпадать с аналогичной константой a_τ в уравнении для напряжения сдвига τ [2]. Примем $a_q = a_\tau$ и отметим, что изменение величины a_q в несколько раз слабо сказывается на результатах расчета. Этот факт был отмечен ранее¹.

Функция $f(\text{Pr})$ выбиралась методом численной оптимизации при решении задачи о развитом теплообмене в круглой трубе с учетом предположения $\nu f(\text{Pr}) \sim (\nu + a)L_T/L$, где L_T интегральный масштаб, определенный по полю пульсаций температуры. Для L_T можно воспользоваться соотношением $L_T/L \sim \text{Pr}^{-0,5} + d$, которое справедливо в случае изотропной турбулентности [12]. Константа d , входящая в соотношение, является эмпирической и добавлена в него в соответствии с предположением (см. сноску на стр. 46) об ограничении масштаба L_T при $\text{Pr} \rightarrow \infty$. Окончательный вид функции $f(\text{Pr})$ определим, полагая $f(1) = 1$. Константа d была принята равной 0,25.

Таким образом, проведенный анализ дает следующие оценки констант в уравнении для турбулентного потока тепла (1.11):

$$a_q = a_\tau, \quad c_8 = 3c, \quad c_9 = 9c_1, \quad c_{10} = c_7/\text{Pr}_t \quad (2.6)$$

$$f(\text{Pr}) = \frac{1+d}{2} \frac{\sqrt{\text{Pr}} + 1/\sqrt{\text{Pr}}}{1+d\sqrt{\text{Pr}}}, \quad d=0,25$$

Константы трехпараметрической модели турбулентности, которые вошли в (2.6), в соответствии с [2] равны: $c=0,3$; $c_1=5\pi/4$; $c_7=0,2$; $a_\tau=0,12$. Примем, согласно [9], $\text{Pr}_t=0,85$.

3. Развитый теплообмен в трубе. Для проверки справедливости уравнения (1.11) с константами (2.6) была решена задача о развитом теплообмене в круглой трубе.

¹ *Максим П. Л.* Расчет турбулентного переноса импульса и тепла при течении жидкости с постоянными и переменными физическими свойствами в трубах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИВТАН СССР, 1977. 136 с.

Такое течение характеризуется тем, что для температуры выполняется соотношение

$$T = \frac{x}{r_0} T^\circ + t(r) \quad (3.1)$$

Здесь r_0 — радиус трубы, а x — координата вдоль ее оси. Уравнения (1.2) и (1.11) запишем в цилиндрической системе координат. Для развитого теплообмена и развитого течения ($v=0$, $u=u(r)$) с учетом (3.1) получим

$$\rho c_p u(r) \frac{T^\circ}{r_0} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\lambda \frac{dt}{dr} + \rho q_t \right) \right] \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r D_q \frac{dq_t}{dr} \right] - \frac{D_q}{r^2} q_t - [c_s \rho \sqrt{E} L - c_s \mu f(\text{Pr})] \frac{q_t}{L^2} = c_{10} \rho c_p E \frac{dt}{dr} \quad (3.2)$$

Входящие в (3.2) величины E , τ и L являются функциями только координаты r и определяются из решения задачи о развитом течении в трубе [2]. Кроме того, в уравнении (3.2) опущен член с диссипацией Φ_μ , так как он мал по сравнению с другими членами.

Из первого уравнения (3.2) интегрированием по r от 0 до r получим

$$\lambda \frac{dt}{dr} = -\rho q_t - \rho c_p \frac{T^\circ}{r_0} \frac{1}{r} \int_0^r r u dr \quad (3.3)$$

В (3.3) учтено, что $q_t=0$ на оси канала (при $r=0$). Пусть

$$q_w = \lambda \left(\frac{dt}{dr} \right)_{r=r_0}, \quad \langle u \rangle = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r u dr$$

Полагая в уравнении (3.3) $r=r_0$, получим $T^\circ = 2q_w / (\rho c_p \langle u \rangle)$. После подстановки T° в (3.3) найдем

$$\lambda \frac{dt}{dr} = -\rho q_t + \frac{q_w}{\langle u \rangle r_0} \frac{2}{r} \int_0^r r u dr \quad (3.4)$$

Исключим из уравнения (3.2) величину dt/dr с помощью уравнения (3.4). В результате этого задача сведется к решению уравнения второго порядка для q_t с граничными условиями на оси и стенках трубы

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_q \frac{dq_t}{dr} \right) - \left[\frac{D_q}{r^2} + c_{\infty} \rho \frac{\sqrt{E}}{L} + c_s \mu \frac{f(\text{Pr})}{L^2} + c_{10} \frac{\rho}{a} E \right] q_t = \quad (3.5)$$

$$= c_{10} \frac{q_w E}{a \langle u \rangle r_0} \frac{2}{r} \int_0^r r u dr$$

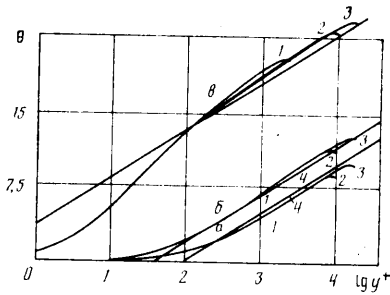
$$q_t = 0 \quad (r=0), \quad (r=r_0) \quad (3.6)$$

С использованием безразмерных переменных получим

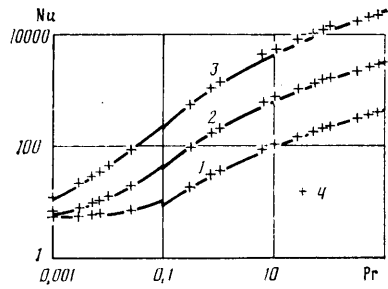
$$r = \frac{r}{r_0}, \quad L = \frac{L}{r_0}, \quad u_+ = \frac{u}{u_*}, \quad \langle u_+ \rangle = \frac{\langle u \rangle}{u_*}$$

$$E_+ = \frac{E}{u_*^2}, \quad D_+ = \frac{D_q}{\rho u_* r_0}$$

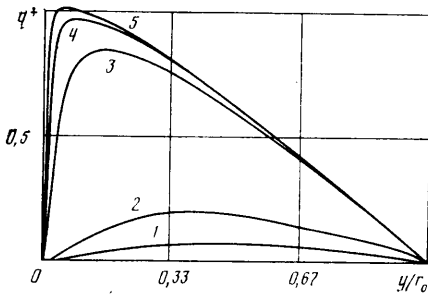
$$q_+ = \frac{q_t \lambda}{2 r_0 q_w c_p u_*}, \quad \text{Re}_* = \frac{r_0 u_*}{\nu}, \quad u_* = \frac{|\tau_w|^{0.5}}{\rho}$$



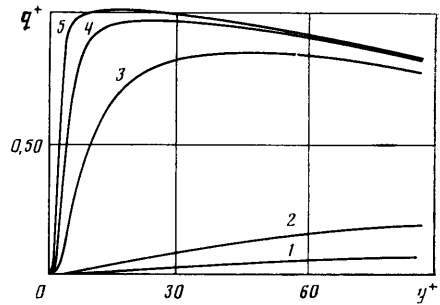
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\varphi(r) = \frac{1}{\langle u_+ \rangle} \frac{1}{r} \int_0^r r u_+ dr$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_+ \frac{dq_+}{dr} \right) - \left[\frac{D_+}{r^2} - c_8 \frac{\sqrt{E_+}}{L} - c_9 \frac{f(\text{Pr})}{\text{Re}_* L^2} - c_{10} \text{Pr Re}_* E_+ \right] q_+ = c_{10} E_+ \varphi(r) \quad (3.7)$$

Решение уравнения (3.7) было проведено численно в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($10^4 \leq \text{Re} \leq 10^6$) и Прандтля ($10^{-3} \leq \text{Pr} \leq 10^3$).

Для нахождения распределения температуры по сечению канала использовалось уравнение (3.4) с граничным условием $t = t_w$ при $r = r_0$, которые с использованием безразмерных переменных примут вид

$$\frac{d\theta}{dr} = \text{Pr Re}_* q_+ - \varphi(r), \quad \theta = \lambda \frac{t_w - t}{2q_w r_0} \quad (3.8)$$

$$\theta = 0 \quad (r = 1)$$

Проведем анализ результатов расчетов. Известно, что при использовании динамической координаты $y_+ = y u_* / \nu$ профиль температуры в развитом течении в трубе в некоторой области, называемой логарифмической, имеет универсальный вид [9]

$$\frac{T_w - T}{T_*} = 4,88 \lg y_+ + \beta(\text{Pr})$$

$$\beta(\text{Pr}) = (3,85 \text{Pr}^{1/4} - 1,3)^2 + 4,88 \lg \text{Pr}, \quad T_* = \frac{q_w}{\rho c_p u_*} \quad (3.9)$$

Здесь $\beta(\text{Pr})$ — универсальная функция числа Прандтля.

На фиг. 1 представлено сравнение результатов расчета профилей температуры $\theta = (T_w - T) / T_*$ с логарифмическим законом (3.9) для ряда значений чисел Рейнольдса (кривые 1, 2, 3 соответствуют числам $\text{Re} = 10^5$, $4 \cdot 10^5$, 10^6) и Прандтля ($a - \text{Pr} = 0,01$; $b - 0,026$; $e - 0,7$). Как видно из

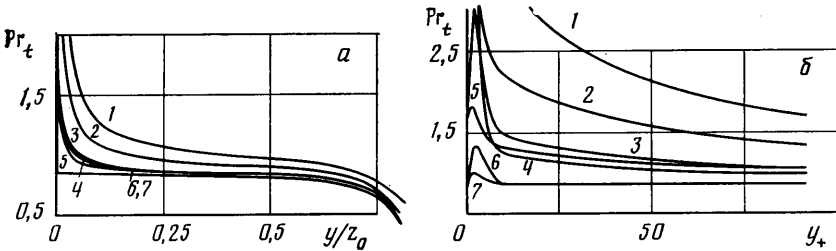
фиг. 1, с ростом числа Рейнольдса возрастает протяженность области, отвечающей логарифмическому закону (3.9).

Для инженерной практики помимо профиля температур наибольший интерес представляет коэффициент теплоотдачи, безразмерным аналогом которого является число Нуссельта Nu

$$Nu = \frac{2r_0 q_w}{\lambda(T_w - \langle T \rangle)}, \quad \langle T \rangle = \frac{\int_0^{r_0} r u T dr}{\langle u \rangle r_0^2}$$

Здесь $\langle T \rangle$ — среднемассовая температура.

Имеется большое число работ, посвященных измерению коэффициента теплоотдачи при развитом течении в круглой трубе. По результатам этих измерений получено много формул, позволяющих найти число Нуссельта



Фиг. 5

в зависимости от чисел Re и Pr . Наиболее распространенной является формула [13]

$$Nu = \frac{(\xi/8) Re Pr}{K_1 + K_2 (\xi/8)^{1/4} (Pr^{1/4} - 1)}, \quad K_1 = 1 + \frac{900}{Re}, \quad K_2 = 12,7 \quad (3.10)$$

Здесь ξ — коэффициент сопротивления, K_1 , K_2 — эмпирические константы.

Формула (3.10) справедлива для чисел Pr , Re в диапазонах: $0,5 \leq Pr \leq 1000$ и $10^4 \leq Re \leq 5 \cdot 10^6$.

При малых числах Прандтля ($0,01 \leq Pr \leq 0,1$) результаты экспериментальных значений для Nu хорошо аппроксимируются формулой [13]

$$Nu = 5 + 0,025 (Re \cdot Pr)^{0,8} \quad (3.11)$$

На фиг. 2 представлены результаты расчета числа Нуссельта (цифра 4) в широком диапазоне изменения числа Прандтля $10^{-3} - 10^3$ для чисел $Re = 10^4, 10^5, 10^6$. Сплошными линиями на фиг. 2 (кривые 1–3 соответственно) нанесены зависимости (3.11) для чисел $Pr \leq 0,1$ и зависимости (3.10) для $Pr > 0,1$. Различие между результатами расчета и эксперимента нигде не превосходит 12%.

На фиг. 3, 4 приведено распределение турбулентного потока тепла q_+ по сечению трубы (число $Re = 10^4$; числа $Pr = 0,01; 0,026; 0,7; 6; 100$ — кривые 1–5). На фиг. 3 — в координатах y/r_0 , на фиг. 4 — в пристенной области в координатах y_+ . Зависимость q_+ от r близка почти всюду к зависимости $q_+ \sim r$, что подтверждается немногочисленными экспериментами.

На фиг. 5 представлена зависимость турбулентного числа Прандтля Pr_t по сечению трубы (а) и в пристеночной области (б) (число $Re = 10^5$; числа $Pr = 0,01; 0,026; 0,1; 0,7; 6; 100; 1000$ — соответственно кривые 1–7). Предположение о постоянстве числа Pr_t хорошо выполняется в большей части сечения трубы и нарушается в пристенной области и вблизи оси трубы.

Анализ расчетов, проведенных с применением уравнения переноса для турбулентного потока тепла, показывает хорошее согласование результа-

тов расчетов с результатами экспериментов как по интегральным, так и по локальным характеристикам. Такое совпадение позволяет надеяться на успешное применение этого уравнения для решения более сложных задач теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Модель сдвиговой турбулентности // Аннот. докл. 4-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Киев: Наук. думка, 1976. С. 66.
2. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
3. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Исследование сдвиговых течений с использованием трехпараметрической модели турбулентности // Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механ. Алма-Ата: Наука, 1981. С. 241–242.
4. Луцик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: Расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
5. Турбулентность/Под ред. Брэдшоу П. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.
6. Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В. Методы расчета турбулентно-пограничного слоя // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 11. М.: ВИНТИ АН СССР, 1978. С. 155–304.
7. Коловандин Б. А. Моделирование теплопереноса при неоднородной турбулентности. Минск: Наука и техника, 1980. 184 с.
8. Петузов Б. С., Поляков А. Ф., Максим П. Л., Ушпурас Е. В. Баланс энергии турбулентности, турбулентных касательных напряжений и турбулентных тепловых потоков при течении газа в трубах // Конвективный теплообмен. Методы и результаты исследований/Под ред. Петухова Б. С. М.: ИВТАН СССР, 1982. С. 6–28.
9. Кадер Б. А., Яглом А. М. Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ АН СССР, 1980. Т. 15. С. 81–155.
10. Монин А. С. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1. № 1. С. 45–54.
11. Tavoularis S., Corrsin S. J. Experiments in nearly homogenous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient // J. Fluid Mech. 1981. V. 104. P. 311–348.
12. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
13. Петузов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Атомиздат, 1974. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.X.1987