

УДК 532.516.5:532.527

СМЕРЧ И ОСОБОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

ЯКИМОВ Ю. Л.

Особые решения уравнений гидродинамики имеют исключительное значение для понимания сути явлений. Наибольший интерес представляют автомодельные постановки, которые не только просты с точки зрения математического описания, но, что более существенно, позволяют среди многих факторов, влияющих на характер течения, выделить главные параметры. Характерно, что, даже когда автомодельные постановки сводятся к достаточно сложным системам уравнений, наиболее интересное решение имеет простой вид, например задача о сильном взрыве [1].

В статье рассмотрено особое решение системы уравнений для стационарных осесимметричных автомодельных движений вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, качественно описывающее смерч и другие аналогичные природные явления, в которых закрученность потока и вязкость являются наиболее характерными свойствами. Показано, что это решение не только хорошо описывает наблюдаемые свойства смерчей, но и позволяет объяснить механизм концентрации кинетической энергии в этом грозном природном явлении.

1. Широкий класс задач, в постановку которых входят только постоянные, размерности которых зависят от размерностей вязкости ν и плотности жидкости ρ , являются автомодельными [1]. Для крупномасштабных течений с развитой турбулентностью под ν можно понимать турбулентную вязкость. Для осесимметричного случая введем сферическую систему координат r, θ, λ . Компоненты меридиональной, радиальной и трансверсальной скорости и давление представим в виде

$$V_\theta = \frac{\nu}{r} \operatorname{Re} \varphi(\theta), \quad V_r = \frac{\nu}{r} \operatorname{Re} f(\theta), \quad V_\lambda = \frac{\nu}{r} \operatorname{Re} \psi(\theta), \quad P = \frac{\nu^2}{r^2} \rho \operatorname{Re}^2 p(\theta) \quad (1.1)$$

Выражения (1.1) отличаются от соответствующих формул в [1] только безразмерным множителем $\operatorname{Re} > 0$, который введен для того, чтобы при конечных размерных скоростях безразмерные функции φ, f, ψ, p при $\nu \rightarrow 0$ оставались конечными т. к. при этом $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эти течения, имеет вид

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\Phi'}{\sin \theta} \right)' \right]' = \frac{(\psi^2 \sin^2 \theta)'}{\sin^2 \theta} \quad (1.2)$$

$$\Phi = \left(\frac{\Phi'}{\operatorname{Re}} - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \sin^2 \theta - \frac{\Phi}{\operatorname{Re}} \sin \theta \cos \theta \quad (1.3)$$

$$\operatorname{Re} \varphi (\psi' + \psi \operatorname{ctg} \theta) = (\psi' + \psi \operatorname{ctg} \theta)' \quad (1.4)$$

$$f = -(\varphi' + \varphi \operatorname{ctg} \theta) \quad (1.5)$$

$$p = -\frac{1}{2} \left[f^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \frac{1}{\operatorname{Re}} f' \operatorname{ctg} \theta - \varphi f' + \frac{1}{\operatorname{Re}} f'' \right] \quad (1.6)$$

Функции f и p определяются после решения уравнений (1.2)–(1.4) подстановкой решения в (1.5) и (1.6).

Следуя [2], можно представить уравнение (1.4) в виде

$$\gamma(\theta) = \psi \sin \theta = \int_{\theta_0}^{\theta} C \sin \theta \exp\left(\operatorname{Re} \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi d\theta\right) d\theta + \gamma_0 \quad (1.7)$$

где $\gamma(\theta)$ — циркуляция скорости вокруг оси симметрии, C и γ_0 — произвольные постоянные.

Подставив (1.7) в (1.2), после интегрирования найдем выражение для $\Phi(\theta)$. Подставив его в (1.3), получим вместо системы дифференциальных уравнений шестого порядка (1.2)–(1.4) одно интегродифференциальное уравнение [3]

$$\left(\frac{1}{\operatorname{Re}} \varphi' - \frac{1}{2} \varphi^2\right) \sin^2 \theta - \frac{1}{\operatorname{Re}} \varphi \sin \theta \cos \theta = M_1 \cos 2\theta + N_1 \cos \theta + R_1 + I \quad (1.8)$$

$$I = 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{C}{\sin \theta} \times \\ \times \exp\left(\operatorname{Re} \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi d\theta\right) \left[\gamma_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} C \sin \theta \exp\left(\operatorname{Re} \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi d\theta\right) d\theta\right] d\theta d\theta$$

Уравнение (1.8) кроме несущественного нормирующего множителя Re содержит в явном виде пять произвольных постоянных $C, \gamma_0, M_1, N_1, R_1$. При $M_1 = N_1 = R_1 = C = 0$ (1.8) становится однородным дифференциальным уравнением Риккати, решение которого, содержащее в явном виде шестую произвольную постоянную A , имеет вид [1]

$$\varphi = \frac{2 \sin \theta}{A + \cos \theta}$$

В общем случае значению $\varphi(\theta) = 0$ соответствуют конические поверхности тока, одна из которых может совпадать с осью симметрии. Поэтому анализ (1.8) может быть сведен к анализу течений в области, где знак φ остается неизменным. Пользуясь этим, выберем направление интегрирования так, чтобы в рассматриваемой области знак $\varphi d\theta$ был отрицательным. Тогда при $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$

$$\eta(\theta) = \exp \operatorname{Re} \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi d\theta \rightarrow 0$$

во всей области, за исключением малой окрестности θ_0 . Это означает, что в основной области течения $\theta > \theta_0 + \Delta\theta$ два внутренних интеграла в (1.8) равны значениям, полученным при интегрировании на отрезке $\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta$. Не нарушая общности, в качестве θ_0 можно взять значение, при котором $\varphi(\theta_0) = 0$, если $\theta_0 \neq 0$. Вычислив

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta d\theta = \frac{1}{4} \cos 2\theta - \cos \theta_0 \cos \theta + \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{4} \cos 2\theta_0$$

представим I в виде

$$I = 2E + 2C(\gamma_0 I_1 + C I_0) \left(\frac{1}{4} \cos 2\theta - \cos \theta_0 \cos \theta + \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{4} \cos 2\theta_0\right)$$

$$I_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \frac{1}{\sin \theta} \eta(\theta) d\theta, \quad I_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \sin \theta \eta(\theta) d\theta \quad (1.9)$$

$$E = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \eta(\theta) \left[C\gamma_0 + C^2 \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \eta(\theta) d\theta \right] d\theta - \right. \\ \left. - C\gamma_0 I_1 - C^2 I_0 \right\} d\theta d\theta \quad (1.10)$$

Выражения (1.9), (1.10) дают в малой области $\theta \ll \theta_0 + \Delta\theta$ и в области $\theta > \theta_0 + \Delta\theta$ общий вид решения в явном виде, зависящем от шести произвольных постоянных $M_1, N_1, R_1, C, \gamma_0, \theta$. Действительно, в первой области разложения

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} k_i (\theta - \theta_0)^i, \quad \gamma(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (\theta - \theta_0)^i \quad (1.11)$$

полностью определяются этими шестью постоянными. В основной области течения правая часть (1.8) сводится к виду общего интеграла системы при постоянной циркуляции [1] переобозначением произвольных постоянных M_1, N_1, R_1 по следующим формулам:

$$M = M_1 + \frac{1}{2} (C^2 I_0 + C\gamma_0 I_1), \quad N = N_1 - 2(C^2 I_0 + C\gamma_0 I_1) \cos \theta_0 \\ R = R_1 + (C^2 I_0 + C\gamma_0 I_1) \left(2 \cos^2 \theta_0 - \frac{1}{9} \cos 2\theta_0 \right) + 2E(\theta) \quad (1.12)$$

где $E(\theta)$ — функция, стремящаяся к нулю при $\Delta\theta \rightarrow 0$.

Рассмотрим левую часть (1.8). При $\text{Re} \rightarrow \infty$ в основной области течения, где $\varphi \neq 0$, главным будет член $-\varphi^2 \sin^2 \theta$. Следовательно, в общем случае все предельные решения при $\text{Re} \rightarrow \infty$ могут быть представлены в виде [3]

$$\varphi_* = \pm \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{-2(M \cos 2\theta + N \cos \theta + R)} \quad (1.13)$$

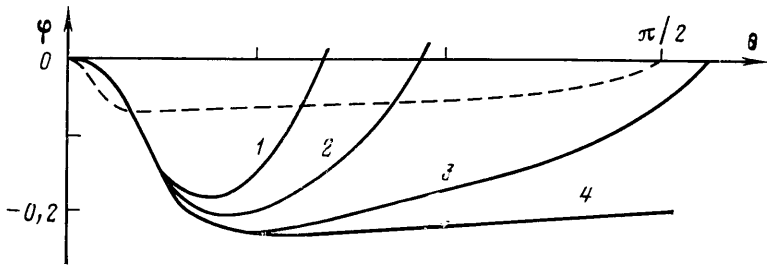
Не теряя общности, в представлении (1.1) одну из постоянных в (1.13) можно положить равной 1. Тогда число Re не только компенсирует малость ν , но и определяет масштаб скоростей, а по своему фактическому содержанию является числом Рейнольдса для рассматриваемых задач. При этом вид предельного течения будет существенно зависеть от двух постоянных, оставшихся в (1.13).

Вблизи границ области, где $\varphi \rightarrow 0$, и в особой точке системы (1.2) — (1.4) на оси симметрии выражение (1.11) даже при больших числах Re не описывает течения, и необходимо исследовать непосредственно систему (1.2) — (1.4).

2. Рассмотрим теперь класс особых решений $\varphi_1(\theta)$, для которых $\theta_0 = 0$. Подстановкой (2.1) в (1.7) и (1.2), (1.3) можно убедиться, что вблизи оси $\theta = 0$ имеет место общее асимптотическое решение, зависящее от шести производных постоянных

$$\frac{1}{\text{Re}} \varphi_1 = \frac{c_1}{\theta} + c_2 \theta \ln \theta + c_3 \theta + c_4 \theta^3 \ln \theta + c_5 \theta^3 \quad (2.1)$$

$$\gamma(\theta) = \gamma_0 + \frac{1}{2} c \theta^2 \\ c_1 = -\frac{1}{2} (M_1 + N_1 + R_1), \quad c_2 = -\frac{1}{2} N_1 - 2M_1, \quad c_3 = 1/(A+1), \\ c_4 = \frac{1}{16} C\gamma_0, \quad c_5 = -\frac{1}{8} N_1 - \frac{3}{64} C\gamma_0$$



Фиг. 1

В зависимости от постановки задачи можно взять в (2.1) вместо одной из постоянных число Re , как и в случае (1.13).

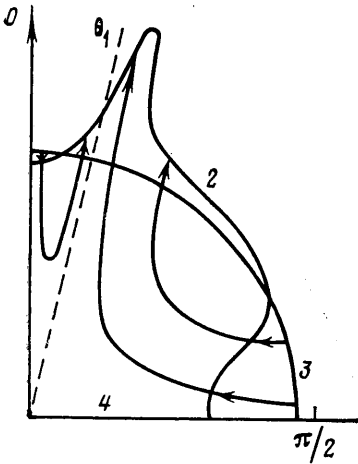
Безразмерные постоянные c_i связаны с размерными определяющими параметрами. Так, постоянной c_1 соответствует наличие на оси симметрии источника с интенсивностью $\theta_0 = 2\pi\nu Re^2 c_1$, а постоянной c_2 — наличие распределенной вдоль оси силы $F(r) = \rho F_0/r$, где линейная плотность силы $F_0 = 2\pi\nu Re c_2$. Величина c_3 связана с наличием скорости вдоль оси $V_r(0) = \nu/r Re(c_3^2 - 4c_3)$. Постоянная γ_0 связана с наличием на оси вихревой особенности с интенсивностью $\Gamma_0 = 2\pi\nu Re \gamma_0$. Постоянной C соответствует вращение жидкости вблизи оси, как твердого тела, с переменной вдоль оси угловой скоростью $\omega(r) = \nu Re C/2r^2$. Особенности, связанные с θ_0 , F_0 , Γ_0 , могут присутствовать одновременно в одном течении. Последний член существует, только когда $\gamma_0 = c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4$, и в соответствии с (1.6) определяет величину давления.

3. Рассмотрим течения $\varphi_1(\theta)$ без особенностей на оси. Эти значения соответствуют $c_1 = c_2 = c_4 = \gamma_0 = 0$ и зависят только от постоянных C , c_3 и $c_3 = -1/8 N_1$. Из условий $c_1 = c_2 = 0$ выразим постоянные M_1 и R_1 через N_1 , которую, не нарушая общности, положим равной 1

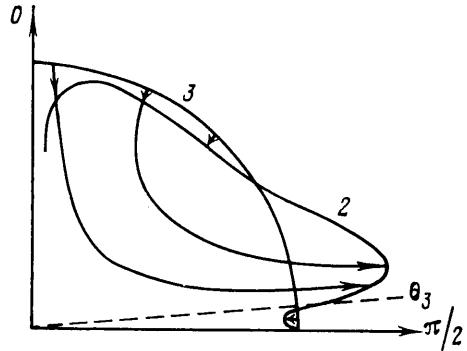
$$4M_1 = 1/3 R_1 = -N_1 = -1$$

Если выполнено еще условие $2C^2 I_0 = N_1 = 1$, из (1.12) при $\theta_0 = 0$ следует, что $M = N = R = 0$. Это соответствует $\varphi_* = 0$. Следовательно, общим свойством этих предельных течений является то, что вне малой окрестности оси они стремятся к чисто вращательным течениям с постоянной циркуляцией. Это не означает, что и вблизи оси решение так же тривиально. Как будет показано ниже, вблизи оси имеет место сложное течение с переменной циркуляцией и мощным радиальным потоком.

Действительно, рассмотрим наиболее простой случай $c_3 = 0$. Вблизи оси имеет место вращение жидкости, аналогичное вращению твердого тела без особенностей скоростей. По мере удаления от оси циркуляция монотонно возрастает, принимая почти постоянное значение Γ_1 , зависящее только от Re , так как постоянная C определяется из условия $\varphi_1(\pi/2) = 0$. На фиг. 1 приведены результаты приближенного расчета $\varphi_1(\theta)$ для двух значений чисел Re : 20 и 200 (сплошные и штриховая кривые соответственно). Для первого случая показаны варианты 1–4, в которых φ_1 обращается в нуль на различных конических поверхностях в зависимости от значения C : 9,2; 0,88; 0,85 и 0,84 соответственно. Кроме того, можно проследить, как с ростом числа Re убывает абсолютная величина φ_1 . Одновременно на некотором расстоянии от оси симметрии возрастает ее производная. Это означает, что с ростом Re в соответствии с уравнением (1.5) резко возрастает радиальная скорость вдоль некоторого конуса вблизи оси симметрии. При $\theta = \pi/2$ $f < 0$ и $f' < 0$, следовательно, на плоскости есть внешняя сила, направленная к оси. Из фиг. 1 и построения решения видно, что при заданном Re вблизи оси $\theta = 0$ решение практически не зависит от значения θ_1 , при котором $\varphi_1(\theta_1) = 0$. Это означает, что эти особые



Фиг. 2



Фиг. 3

решения являются универсальными и могут быть использованы внутри различных областей.

В более общем случае $c_3 \neq 0$ можно указать два качественно различных течения. Так, при $c_3 < 0$, $\varphi_1 < 0$ характер течения не отличается от течения при $c_3 = 0$. А в случае малого положительного c_3 , такого, что $0 < c_3 \ll |c_5|$ в точке $\theta_1 \approx \sqrt{c_3/c_5}$ φ_1 обращается в нуль и меняет знак. Следовательно, имеется коническая поверхность тока $\theta = \theta_1 = \sqrt{c_3/c_5}$, внутри которой жидкость движется вниз вдоль оси и поднимается вдоль поверхности конуса, а вне, где $\varphi_1 < 0$, течение аналогично рассмотренному выше.

На фиг 2 показана качественная картина сечения поверхностей тока меридиональной плоскостью. 1 — коническая линия тока $\theta = \theta_1$, 2 — эпюра скоростей, нулевому уровню которой соответствует окружность 3. Поток с постоянной циркуляцией движется к центру вдоль плоскости 4 и затем мощной направленной струей поднимается вверх. Вблизи центра на плоскости имеет место наибольшая скорость потока, при этом импульс на любой полусфере конечен. В зависимости от значения постоянной C вместо плоскости 4, ограничивающей поток, можно выбрать любой конус $\theta = \theta_2$, где $\varphi_1(\theta_2) = 0$. В [5] отмечено, что течение, изображенное на фиг. 2, очень хорошо соответствует течению в тайфуне (фиг. 4, 5, в [4], фиг. 2, 3, в [5]). В частности, описывает огромные скорости ветра на границе «глаза» тайфуна, слабое течение вниз на оси, линейное распределение трансверсальных скоростей по расстоянию от оси, коническую форму глаза тайфуна. Вдоль плоскости, как указано выше, имеет место тянущая к центру сила. В реальных условиях этой силы нет, но есть сила, приложенная к тем же струям жидкости, тянущая их вверх и связанная с всплыванием теплого воздуха после выпадения осадков [4].

Ниже будет показано, что некоторым усложнением этого решения можно построить автомодельное решение с внешней силой, приложенной в области струи.

4. Рассмотрим теперь класс течений $\varphi_2(\theta)$, в которых меридиональная скорость направлена к оси симметрии от плоскости или конической поверхности $\theta = \theta_0$, где $\varphi_2(\theta_0) = 0$. В случае плоскости $\theta_0 = \pi/2$ из (1.11) имеем следующую связь между постоянными:

$$k_1 = -M_1 + R_1, \quad 2k_2 = -N_1, \quad 3k_3 - k_1 = 2M_1 \quad (4.1)$$

из условий прилипания следует, что $\varphi_2 = f = \psi' = \varphi_2' = k_1 = \gamma_0 = 0$. Тогда из (4.1) получим $R_1 = M_1 = 3/2 k_3$. С другой стороны, в случае $\theta_0 = \pi/2$ из (1.13) имеем

$$M = M_1 + 1/2 C^2 I_0, \quad N = N_1, \quad R = R_1 + 1/2 C^2 I_0 + 2E(\theta)$$

если $C^2 I_0/2 = M_1$ и $N_1 = 0$ при $\Delta\theta \rightarrow 0$, $E \rightarrow 0$, то в области $\theta > \theta_0$ имеем полное сокращение членов в правой части уравнения (1.8). Если положить дополнительно $M_1 = -1$, то из интегрального соотношения $I_0 = I_0(\text{Re})$ получим C как функцию числа Re . При этом в предельном течении вне окрестности плоскости $\theta = \pi/2$ имеем чисто вращательное течение с почти постоянной циркуляцией Γ_2 .

На фиг 3 представлена качественная картина течения $\varphi_2(\theta)$ для случая $M_1 = R_1 = -1$, $N_1 = -2E(0)$ (обозначения аналогичны фиг. 2). На оси $\theta = 0$ главный член правой части (1.8) имеет вид: $E\theta^2$, что соответствует в (2.1) $c_2 = E/2$ и наличие распределенной силы на оси симметрии. Бесконечный импульс этой силы вместе с бесконечным импульсом давлений на плоскости уравнивается отрицательным давлением на оси симметрии при малых θ . Кроме этой силы имеется также источник, мощность которого стремится к нулю вместе с $\eta(\theta)$, так что в разложении (2.1) $c_1 \ll 1$. Как следует из уравнения (1.6), давление на плоскости отрицательно, так как

$$\Delta p = -f'' = \varphi_2''' = 6c_3 < 0$$

Для дальнейшего существенно отметить, что условию $\varphi_2(\theta) = 0$ кроме плоскости $\theta = \theta_0$ может одновременно соответствовать еще конус $\theta = \theta_2$ в зависимости от величины C . Кроме того, так как k_2 и k_3 разных знаков, вблизи плоскости имеет место еще один нуль θ_3 , где $\varphi_2(\theta_3) = 0$.

5. Рассмотренные два решения $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$ очень сходны: во-первых, вблизи оси и плоскости в обоих течениях имеет место значительный градиент φ_1 и φ_2 и, следовательно, большая радиальная скорость $\sim \text{Re}$; во-вторых, первое решение вне малой окрестности оси, а второе вне окрестности плоскости или конуса $\theta = \theta_0$ стремятся к чисто вращательному движению с постоянной циркуляцией; в-третьих, оба течения практически не зависят от положения конуса $\theta = \theta_2$, где $\varphi_1(\theta_2) = 0$ или $\varphi_2(\theta_2) = 0$, и в этом смысле эти решения являются фактически пограничными слоями для потенциального вихря: одно вблизи оси, а другое вблизи плоскости (или конуса $\theta = \theta_0$).

Два последних свойства указывают на возможность приближенной «склейки» этих решений на некоторой конической линии тока $\theta = \theta_*$. Точно склеить решения с непрерывными производными при конечных Re принципиально невозможно. Например, невозможно обеспечить непрерывность производной Γ_θ' , так как $\Gamma_1(\theta)$ и $\Gamma_2(\theta)$ — монотонные функции, одна из которых убывающая, а другая возрастающая. Однако из (1.7) получим, что в основной области «разрыв» $[\Gamma_\theta']$ крайне мал: при $\text{Re} \rightarrow \infty$

$$[\Gamma_\theta'] \sim [\gamma'] \sim \exp(-\text{Re}) \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

Если на некотором конусе склейки $\theta \sim \theta_*$ потребовать только непрерывность скорости и напряжений, то для разрывов безразмерных функций получим следующие шесть условий:

$$\begin{aligned} [\nu \text{Re } \varphi] &= [\nu \text{Re } f] = [\nu^2 \text{Re } f'] = [\nu^2 \text{Re} (\text{Re } p + 2\varphi \text{ctg } \theta)] = \\ &= [\nu \text{Re } \psi] = [\nu^2 \text{Re} (\gamma' / \sin \theta - 2\psi \text{ctg } \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая, что можно вместо c_5 ввести Re_1 в решении φ_1 и Re_2 вместо M в решении φ_2 , получим, что шесть условий (5.2) зависят от следующих семи постоянных: ν_1/ν_2 , Re_1 , Re_2 , A , c_1 , c_2 , θ_* . При этом уже выполнены условия прилипания на плоскости и условие отсутствия особенностей на оси. Из двух последних условий (5.2) и оценки (5.1) следует, что $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\nu_1/\nu_2 \rightarrow 1$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Если $\theta_* \neq \theta_2$ разрыв не является контактным. Трудно физически объяснить изменение вязкости при протекании сквозь конус $\theta = \theta_*$. Если же потребовать, чтобы разрыв был контактным и допустить $\nu_1 \neq \nu_2$, то добавится седьмое условие $\theta_* = \theta_2$, где $\varphi_1(\theta_2) = \varphi_2(\theta_2) = 0$. И однопараметрический класс решений возможен, только если не выполнено одно

из условий, например соответствующее поверхностной силе на конусе $\theta = \theta_2$, которая может быть крайне малой (5.1).

Таким образом, при наличии условий прилипания (эти течения поставим в соответствие смерчу) на поверхности склейки неизбежно имеет место внешняя поверхностная сила.

Рассмотрим теперь вместо φ_2 течение φ_3 , не удовлетворяющее условиям прилипания, склейку которого с φ_1 поставим в соответствие тайфунам. Тогда возможен случай $[\operatorname{Re} \gamma'] = 0$ и, следовательно, при $v_1 = v_3$ в отличие от предыдущего возможен случай, когда на неконтактном разрыве отсутствует внешний момент. Однако, так как $\gamma_3' = \gamma_1' > 0$, внешний момент будет неизбежно присутствовать на плоскости. Если теперь снова рассмотреть контактный разрыв, совмещая θ_1 (фиг. 1) и θ_3 (фиг. 2), то возможен случай при $v_1 \neq v_3$, когда для φ_3 $\Gamma_3 = \text{const}$, $C = \gamma_3' = I = 0$ (1.7), (1.8) и отсутствует внешний момент на плоскости. Вторым условием, естественным для тайфуна, следует потребовать отсутствие касательной радиальной силы на плоскости $k_2 = 0$ (4.1). Действительно, во-первых, наличие в реальных условиях пограничного слоя у земли и силы трения не имеет значения для течения в целом при огромных числах Рейнольдса, характерных для тайфуна. Во-вторых, однопараметрическое течение, как и в предыдущем случае, возможно, только если на конусе склейки присутствует касательная или нормальная сила. Можно дополнительно потребовать, чтобы суммарная сила была нормальна к поверхности плоскости, и тогда возникает один дополнительный параметр, характеризующий только величину этой силы. Наличие этой силы для тайфуна имитирует отмеченную выше силу плавучести. Несущественным усложнением уравнений, оставаясь в рамках автомодельной постановки, эту силу можно сделать распределенной по непрерывному решению вблизи контактного разрыва, а картина течения будет похожа на представленную на фиг. 2.

На фиг. 4 качественно построена интегральная кривая 2 склеенного решения для смерча и показаны характерные области, где это решение близко подходит к кривым 3, 4, которые соответствуют функциям $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$, полученным формальной подстановкой в (1.13) соответствующих значений M, N, R при заданном конечном Re . Кривая 1 изображает правую часть уравнения (1.8). В точке $\theta = 0$ функция 1 имеет нуль третьего порядка малости, затем становится отрицательной и снова обращается в нуль, не достигая $\theta = \theta_2$. За точкой $\theta = \theta_2$ она становится отрицательной функцией, величина которой определяется значением $k_3 = -2/3$.

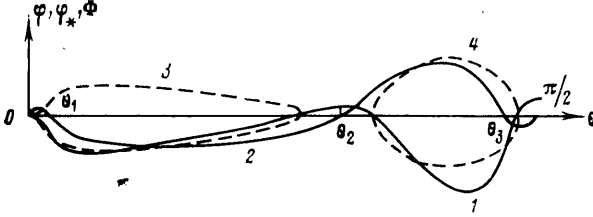
При $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ промежуток в окрестности $\theta = \theta_2$ между кривыми 3 и 4 стремится к нулю.

Решение $\varphi_1(\theta)$ (кривая 2), выйдя из точки $\theta = 0$ с конечной производной, зависящей от константы A , либо сразу приближается к кривой 3 ($A < 0$), либо сначала пересекает ось в точке $\theta = \theta_1$ ($A > 0$), а затем приближается к кривой 3. В точке, близкой к минимальному значению $\varphi_1(\theta)$, решение пересекает ветвь 3 и движется к точке $\theta = \theta_2$.

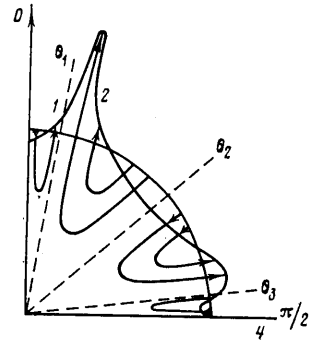
Рассмотрим решение $\varphi_2(\theta)$. Выйдя из точки $\varphi_2(\pi/2) = \varphi'(\pi/2) = 0$ в соответствии со знаком правой части (1.8), эта кривая обращается в нуль $\varphi(\theta_3) = 0$ и подходит к ветви 4. После достижения максимума пересекает ее и подходит к точке $\theta = \theta_2$, соединяясь с $\varphi_1(\theta)$.

На фиг. 5 приведена качественная картина проекции радиальной скорости и поверхностей тока на меридиональную плоскость склеенного решения. Обозначения те же, что и на фиг. 2. Потенциальный поток с постоянной циркуляцией втекает в центр по направлению $\theta = \theta_2$, растекаясь затем двумя завихренными резко выраженными струями. На оси имеет место течение, зависящее от знака s_3 , направленное от центра или к центру. В последнем случае поток разворачивается внутри конуса $\theta = \theta_1$.

Во всех рассмотренных выше решениях имеется существенный недостаток с точки зрения описания смерча. Так, в первом решении со стороны плоскости к потоку приложены распределенная сила и момент. Во втором решении аналогичная особенность имеется на оси, а в склеенном — на плоскости склейки. Таким образом, во всех случаях имеется внешний источник энергии, поддерживающий движение жидкости, в то время как в реальных условиях никаких внешних поверхностных источников энергии нет. Кроме того, интеграл по поверхности от внешних поверхностных сил и интеграл давления расходятся в начале координат.



Фиг. 4



Фиг. 5

6. Рассмотрим близкую автомодельную постановку, состоящую в том, что вместо постоянной вязкости ν введем переменную вязкость $\nu_r = r^\alpha \nu$ [3], имея, например, в виду, что течение определяется турбулентной вязкостью, которая зависит от расстояния до центра смерча. Ниже в этой постановке найдено близкое к склеенному непрерывное решение, в котором нет внешних поверхностных источников энергии, а интеграл от импульса давления в начале координат конечен.

В дальнейшем будем рассматривать случай $0 < \alpha \ll 1$, так что при конечных r ν почти постоянна.

Вместо (1.1) введем скорости и давление в виде

$$V_\theta = \frac{\nu \operatorname{Re}}{r^{1-\alpha}} \varphi_r(\theta), \quad V_r = \frac{\nu \operatorname{Re}}{r^{1-\alpha}} f_r(\theta), \quad V_\psi = \frac{\nu \operatorname{Re}}{r^{1-\alpha}} \psi_r(\theta),$$

$$p = \frac{\nu^2 \operatorname{Re}^2}{r^{2(1-\alpha)}} \rho p_r(\theta)$$

Подставив в уравнения Навье — Стокса эти выражения, вновь получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающуюся от [1] наличием дополнительных членов, содержащих множитель α и безразмерные функции $\varphi_r, f_r, \psi_r, p_r$.

Следовательно, решение этой системы на ограниченном отрезке θ при $\alpha \rightarrow 0$ будет мало отличаться от решения в [1]. В частности, вместо (1.5) и (1.7) получим

$$(1+\alpha) f_r = -(\varphi_r' + \varphi_r \operatorname{ctg} \theta) \quad (6.1)$$

$$\psi_r \sin \theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \exp\left(\operatorname{Re} \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi_r d\theta\right) c(\theta) d\theta + \gamma_{0r}$$

$$c(\theta) = c_r - \alpha \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{Re} \psi_r (\operatorname{Re} f_r - 1) \exp\left(-\operatorname{Re} \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi_r d\theta\right) d\theta \quad (6.2)$$

а в правой части добавится еще один член

$$I_3 = \alpha \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{Re} \psi d\theta d\theta d\theta$$

$$\psi = 2\psi_r^2 \operatorname{ctg} \theta + \frac{2}{\operatorname{Re}} f_r' - 2\varphi_r \varphi_r' - 2f_r \varphi_r - \frac{2}{\operatorname{Re}} f_r - \frac{2}{\operatorname{Re}} (1-\alpha) \varphi_r -$$

$$-f_r f_r' - \frac{(1+\alpha)}{\operatorname{Re}} f_r$$

Рассмотрим функцию $c(\theta)$ (6.2) при $\alpha \ll 1$ и $\text{Re} \gg 1$. При некотором выборе констант эта функция будет иметь почти ступенчатый вид. Действительно, сначала она практически не отличается от c_τ , но за счет экспоненциального роста подынтегральной функции при $\varphi_\tau < 0$ $c(\theta)$ меняет знак. Если при этом так же, как в склеенном решении, имеет место смена знака φ_τ , то затем подынтегральное выражение стремится к нулю, а $c(\theta)$ принимает другое почти постоянное значение.

Таким образом, вне некоторой окрестности θ_0 , где $\varphi_\tau(\theta_2) = 0$, функция $c(\theta)$ близка к постоянным значениям разного знака, а решение вне окрестности θ_2 будет мало отличаться от склеенного с различными постоянными $c_{1\tau}$ и $c_{2\tau}$. Описанное непрерывное решение существует при наличии определенной связи между постоянными c_5 , Re , c_τ , и α . Если, например, α очень мало, то $c(\theta) \simeq c_\tau$ и не меняет знак при заданных значениях остальных постоянных. Существование непрерывного решения связано с оценкой величины α , которая должна быть достаточно малой, чтобы непрерывное решение мало отличалось от склеенного.

Рассмотрим случай, когда при $\theta \rightarrow 0$ $\varphi_\tau \sim -c_5 \text{Re} \theta^3$. Тогда

$$\eta_\tau(\theta) = \exp\left(-\text{Re} \int_0^\theta \varphi_\tau d\theta\right) \sim \exp(-\text{Re} c_5 \theta^4/4) \sim 1 - \frac{3}{32} \text{Re}^2 c_5 \theta^4$$

Отсюда из условия $\eta(\theta) > 0$ получим $\Delta\theta \sim (\text{Re}^2 c_5)^{-1/4}$. Тогда для основной области $\varphi_\tau \sim -c_5 \text{Re} (\Delta\theta)^3 \sim c_5 \text{Re} (\text{Re}^2 c_5^3)^{-3/4}$, а из (1.6)

$$|f_\tau| = |\varphi_\tau| \sim c_5 \text{Re} (\text{Re}^2 c_5)^{-3/4}$$

положив далее для $\theta \rightarrow 0$, $\eta_\tau(\theta) \sim 1$, из (1.7) и (6.2) получим в основной области

$$\gamma_\tau \sim \psi_\tau \sim C (\Delta\theta)^2 \sim c_\tau (\Delta\theta)^2 \sim C (\text{Re}^2 c_5)^{-1/2} \quad (6.4)$$

Сравнивая члены для $c(\theta)$ в (6.2) и учитывая оценки, сделанные выше, получим:

$$\begin{aligned} C &\sim c_\tau \sim \alpha \text{Re}^2 \psi_\tau f_\tau \exp(\text{Re} \varphi_\tau) \sim \\ &\sim \alpha c \text{Re} (\text{Re}^2 c_5)^{-1/4} \exp(\text{Re}^2 c_5)^{1/4} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Кроме того, из (1.8) имеем $c_5 \sim N_1 \sim I \sim c^2 (\Delta\theta)^5$ или, учитывая (6.5) и (6.4),

$$\gamma \sim C (\Delta\theta)^2 \sim c_5^{1/2} (\Delta\theta)^{-1/2} \sim c_5^{1/2} (\text{Re}^2 c_5)^{1/6} \quad (6.6)$$

Из этих оценок вытекает, что при $c_5 \sim 1$ и $\text{Re} \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow 0$ достаточно быстро (6.5), так что добавочный член (6.3) становится несущественным всюду, кроме окрестности точки $\theta = \theta_2$. Из оценок также следует, что стремление потока к потенциальному вихрю происходит неравномерно. Наиболее существенно то, что в этом решении нет внешних источников энергии. Механизм образования мощной струи вблизи оси смерча можно связать в этом решении с градиентом циркуляции. Действительно, если сравнить величину циркуляции на некоторой линии тока в двух точках на одном расстоянии от оси смерча: одна вблизи центра смерча, а другая на струе, то из-за роста циркуляции по степенному закону $\Gamma = r^\alpha \Gamma_\tau$ циркуляция и центробежные силы на струе будут больше. Это приводит к тому, что струя подобно центробежному насосу вытягивает жидкость из центра смерча, захватывая при этом и предметы с поверхности.

Описанный механизм связан с наличием градиента циркуляции по вертикали. Роль вязкости проявляется в формировании этого градиента и передаче циркуляции струе.

Заметим, что, поскольку с ростом Re течение стремится к чисто вращательному, а при малых Re смерч не образуется, течение, характерное

для смерча, может наблюдаться при некотором промежуточном Re_0 . Если для оценки на основе наблюдений принять, что характерный линейный размер смерча у основания имеет порядок 10 м, скорость ~ 100 м/с, $\nu = 10^{-5}$ м²/с, то формально получим значение $Re_0 \approx 10^8$. Учитывая, что реально течение становится существенно турбулентным при $Re \geq Re_* \sim 10^4$, а эффективное турбулентное число $Re_T = Re_0/Re_*$ [6], получим оценку для $Re_0 \sim Re_T \approx 10^4$.

7. Эта оценка показывает, что при докритических течениях $Re < Re_*$ также может наблюдаться течение типа смерча при $Re \sim 10^4$. Такую настольную модель смерча можно наблюдать (фиг. 6) над подогретой до 60–70° водой при наличии примерно



Фиг. 6

в метре над водой небольшой крыльчатки, имитирующей вращение в грозовом облаке¹. По-видимому, модель близкого масштаба наблюдал Н. Е. Жуковский в 1898 г. [7].

¹ Эта модель была продемонстрирована во время доклада автора на Международной конференции «Современные математические проблемы механики и их приложения», Москва, 11–15.XI.1987 г.

На фотографиях натурального смерча (фиг. 122, 140 в [4] или 7–10 в [5]) хорошо различимы внутренний основной конус смерча и пологий наружный, называемый каскадом. Построенное течение качественно соответствует известным явлениям, отмеченным наблюдателями [4]. Так, внутри основной воронки аналогично тайфуну отмечают слабое движение и небольшое вращение, как и в решении $\varphi_1(\theta)$. Наблюдала, что каскад водяного смерча представляет собой водопад. Действительно, вода, засасываемая струей вблизи плоскости в соответствии с решением $\varphi_2(\theta)$, по мере ослабления скорости выпадает в виде дождя-водопада. Наблюдала, как в мелком водоеме смерч высасывает воду, обнажая дно, но вода не поступает внутрь образовавшейся полости, что связано с наличием внешней струи $\varphi_2(\theta)$. Многочисленные наблюдения свидетельствуют об относительной тонкости струи основного смерча (как и в решении $\varphi_1(\theta)$). Схема течения на фиг. 5 позволяет также объяснить наличие больших давлений на плоскость в центре смерча, которое проявляется в том, что вдоль трассы смерча трава и другие предметы оказываются вдавленными в грунт. Это явление, по-видимому, связано с особенностями решения $\varphi_2(\theta)$, течение в котором образуется за счет соударения струи, втянутой по направлению θ_2 , и образования каскада вдоль плоскости. Наличие резкого увеличения скорости вблизи начала координат в рассмотренном автомоделном решении позволяет объяснить и такие природные явления, как разрушительное действие «воздушной волны», сопровождающей снежную лавину. В [8] предложена модель этой волны в виде полукольцевого вихря, сопровождающего лавину. Эта модель объясняет большую дальность распространения воздушной волны, причем при оценке дальности методом физического моделирования была использована замена молекулярной вязкости на турбулентную. Но эта модель недостаточна для объяснения разрушительного действия волны, даже если учесть наличие снега в воздушном потоке [8], так как скорость лавин редко превышает 30–50 м/с. Описанные выше течения показывают, что в точке контакта потока с циркуляцией может возникнуть усиление скорости в соответствии с решением типа $\varphi_1(\theta)$.

Полученное в работе общее решение, зависящее от полного набора произвольных постоянных как вне особой точки системы (1.2)–(1.6), так и вблизи нее, и может быть использовано для широкого круга задач, описывающих течения при больших числах Рейнольдса. Решения, описывающие смерч и тайфун, во-первых, особые как выходящие из особой точки системы, во-вторых, тривиальные среди предельных и, в-третьих, единственные при заданном числе Re .

При этом основной механизм тайфуна можно описать в рамках автомоделной постановки с постоянной вязкостью, а для смерча основной механизм, связанный с градиентом циркуляции вдоль струи, не может быть описан в рамках этой постановки, но может быть описан в рамках близкой автомоделной постановки с переменной вязкостью.

Автор признателен Н. Н. Лукерченку, выполнившему численный расчет, и А. К. Казеннову за помощь в подготовке демонстрационного модельного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
2. Якимов А. Ю. Точное решение уравнений Навье – Стокса при наличии вихревой особенности на луче // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 79–82.
3. Якимов Ю. Л. Предельные течения воды // Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. М.: Наука, 1987. С. 7–25.
4. Наливкин Д. В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. 487 с.
5. Якимов Ю. Л. Смерч и особое решение уравнений Навье – Стокса // В сб. Механика. Современные проблемы. Изд-во МГУ, 1987. С. 21–33.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Жуковский Н. Е. Теоретические основы воздухоплавания. М.: Гостехиздат. 1925. 306 с.
8. Шурова П. Е., Якимов Ю. Л. Природа воздушной волны, вызванной снежной лавиной // Тр. III Всесоюз. гляциологического симпозиума. Фрунзе, 1968. С. 225.

Москва

Поступила в редакцию
3.II.1987