

2. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1977. 259 с.
 3. Слепян Л. И. Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 809–813.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.IV.1987

УДК 532.59+551.466.81

О СДВИГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКОВ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

ГОЛАНД В. И.

Проводится линейный анализ устойчивости стратифицированных по плотности потоков идеальной жидкости конечной глубины с профилем скорости Гельмгольца. Кроме волны Кельвина – Гельмгольца обнаружены дополнительные неустойчивые моды. Получены аналитические выражения для нейтральных кривых этих мод. Обсуждается их природа.

Большинство теоретических и экспериментальных работ, посвященных неустойчивости Кельвина – Гельмгольца сдвиговых потоков идеальной жидкости, связано с исследованием экспоненциального роста во времени коротковолновых возмущений (волновые числа порядка h^{-1} , где h – толщина сдвигового слоя) (см., например, [1–3]). Однако в [4] было высказано предположение, что в условиях, допускающих так называемое явление сверхотражения внутренних волн от границы раздела жидкости, наличие внешних отражающих границ может привести к дестабилизации более длинных волн и появлению новых неустойчивых мод. Это предположение нашло свое подтверждение в [5–6], где в применении к атмосфере исследован стратифицированный по плотности поток идеальной жидкости при наличии тангенциального разрыва средней скорости течения на некотором расстоянии от нижней твердой границы, а также в [7], где профиль скорости описывался гиперболическим тангенсом безразмерной глубины и учитывались обе (верхняя и нижняя) границы.

Ниже дается линейный анализ более простой, чем в [7], модели, в которой поток стратифицированной идеальной жидкости (частота Брента – Вейсяля N постоянна по глубине) с тангенциальным разрывом скорости на средней глубине ограничен снизу на уровне $z = -H/2$ жестким дном и сверху на уровне $z = H/2$ свободной поверхностью. Профиль горизонтальной средней скорости U описывается ступенчатой функцией: $U = V$ для $z > 0$ и $U = -V$ для $z < 0$. В рамках этой модели удается получить аналитические выражения для нейтральных кривых мод, отличных от волн Кельвина – Гельмгольца, а также выявить связь неустойчивости этих мод с явлением сверхотражения внутренних волн от границы раздела жидкости. Уравнения, описывающие малые двумерные возмущения данного потока в приближении Буссинеска, рассматривались неоднократно (см. например, [1, 4–6]).

Представим решение этих уравнений в виде монохроматической волны $f(z) \exp(ik(x - cVt))$, где k – волновое число, а c – комплексная безразмерная фазовая скорость. Тогда с учетом граничных условий (на дне – равенство нулю вертикальной скорости; на свободной поверхности – кинематическое и динамическое условия $\omega = \partial \zeta / \partial t + U \partial \zeta / \partial x$, $p'(x, \zeta, t) = 0$, где ω – вертикальная скорость, $\zeta = \zeta(x, z, t)$ – смещение уровня жидкости, p' – возмущение давления; на границе раздела – непрерывность давления и функции ζ) можно получить дисперсионное уравнение

$$l_+(1-c)^2 \sin l_- \cos l_+ + l_-(1+c)^2 \sin l_+ \cos l_- = \frac{2V^2 l_+ (1-c)^2}{gH} (l_-(1+c)^2 \cos l_- \cos l_+ - l_+(1-c)^2 \sin l_- \sin l_+) \quad (1)$$

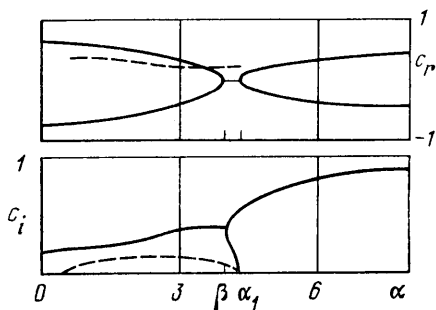
$$l_{\pm} = \frac{1}{2} [4R(c \mp 1)^{-2} - \alpha^2], \quad R = \frac{1}{4} N^2 H^2 V^{-2}, \quad \alpha = kH$$

где R – число Ричардсона, α – безразмерное волновое число. Использование приближения «твердой крышки», требующего равенства нулю вертикальной скорости жидкости на верхней границе и отфильтровывающего поверхностные волны, приводит к дисперсионному уравнению, представляющему собой равенство нулю левой части уравнения (1)

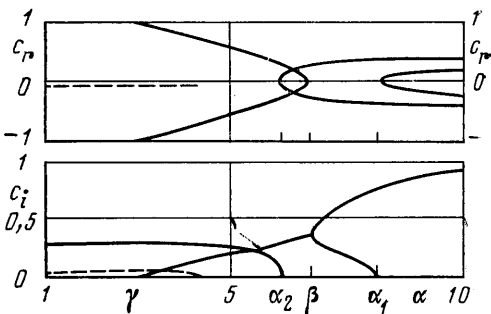
$$l_+(1-c)^2 \sin l_- \cos l_+ + l_-(1+c)^2 \sin l_+ \cos l_- = 0 \quad (2)$$

Аналогичная модель без внешних границ приводит к уравнению [4]

$$l_+^* (1-c)^2 + l_-^* (1+c)^2 = 0, \quad l_{\pm}^* = [N^2 V^{-2} (c \mp 1)^{-2} - k^2]^{1/2} \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Анализ дисперсионных уравнений начнем с выяснения критерия применимости приближения «твердой крышки». Заметим, что отношение правой части уравнения (1) к левой порядка V^2/gH . Малость этого числа, равно квадрату отношения половины сдвига скорости течения к фазовой скорости длинных поверхностных волн, и является искомым критерием. В реальных океанических условиях это число обычно не превышает 10^{-4} . Последующие аналитические результаты связаны с уравнением (2), а результаты численного анализа относятся к уравнению (1).

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что два типа нейтральных решений удовлетворяют уравнению (2)

$$c=0 \quad R=1/4(\alpha^2+n^2\pi^2), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$c=\pm 1+i0, \quad R=\alpha^2+(2n-1)^2\pi^2 \quad (5)$$

В точках первого типа частная производная левой части уравнения (2) по c обращается в нуль, а производная по α отлична от нуля. Из этого следует, что точки (4) являются точками ветвления дисперсионной кривой и отделяют области устойчивости от областей неустойчивости. При этом вещественные ветви отвечают волнам с энергией разных знаков в любой системе координат, движущейся относительно выбранной системы с некоторой ненулевой скоростью. Подобная ситуация описана в [8]. Неустойчивость в окрестности нейтральных кривых (4) объясняется взаимодействием волн с энергией разного знака.

Раскладывая уравнение (2) в окрестности нейтральных точек (4) по приращению волнового числа до первого порядка малости и фазовой скорости до второго порядка (с учетом равенства нулю частной производной левой части уравнения по c), найдем асимптотику дисперсионных кривых в окрестности нейтральных точек (4)

$$\delta c = \pm \left\{ 0,5(-1)^n \alpha \delta \alpha R^{-1} \left[4+3(-1)^n - \frac{4R}{n^2\pi^2}(2+(-1)^n) \right]^{-1} \right\}^{1/2} \quad (6)$$

Из (6) видно, что для нечетных n область неустойчивости всегда слева от нейтральной кривой, а для четных n ситуация определяется величиной R . Если $R < 7/8n^2\pi^2$, то область неустойчивости слева от нейтральной точки, в противном случае — справа.

Относительно точек второго типа (5) область неустойчивости находится справа, а поведение дисперсионных кривых в их окрестности дается формулой возмущений следующей из уравнения (2)

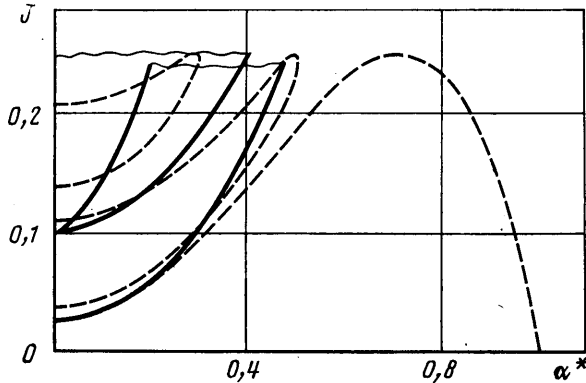
$$\frac{dc}{d\alpha} \Big|_{c=\pm 1+i0} = \mp \frac{\alpha(\sqrt{R/2\pm i})}{\sqrt{R(1+R/4)}} \quad (7)$$

Дисперсионные кривые сколь угодно близко подходят справа по α к точкам $c=\pm 1$, $R=\alpha^2+(2n-1)^2\pi^2$ (ср. с (5)), но сами эти точки не являются корнями уравнения (2), следовательно, в точках второго типа дисперсионные кривые обрываются. Этот факт подтверждается приводимыми ниже результатами численного решения уравнения (1).

Численный анализ уравнения (1) проводился методом Ньютона с использованием асимптотик (6), (7) для начала счета. Вычисленные значения фазовой скорости в окрестности нейтральных точек служили первым приближением для более отдаленных точек и т. д. На фиг. 1, 2 приведены результаты расчетов дисперсионных кривых для двух значений числа $R=7$ и 19 (сплошные линии). При $R=19$ существуют нейтральные точки обоих типов. Точки первого типа обозначены α_n , где n соответствует номеру моды в формуле (4), а точка второго типа — γ . При $R=7$ имеется только точка первого типа α_1 . На обоих графиках имеется еще одна особенность — точка ветвления β . Из этой точки вправо по α выходит ветвь со значениями фазовой

скорости, близкими к значениям, даваемым формулой $c^2 = 1 - \frac{1}{2} N^2 V^{-2} k^{-2}$, которая получена для бесконечно глубокого океана из уравнения (3) (см. [1, 4]). Эта ветвь описывает коротковолновую неустойчивость типа Кельвина – Гельмгольца. Волновые числа, соответствующие точкам β , при увеличении числа R стремятся к значению $N/(\sqrt{2}V)$, с которого начинается область неустойчивости в модели [4]. Как было показано в [4], в точке β при заданной амплитуде смещения изолиний максимален поток энергии $\langle p'\omega \rangle$ волн, излучаемых вихревой пеленой в интервале волновых чисел от 0 до N/V с нулевой фазовой скоростью. Но именно в точках β дополнительные неустойчивые моды, связанные с наличием внешних границ, имеют максимальный инкремент нарастания, что указывает на механизм возникновения этих мод, представляющий собой многократное сверхотражение внутренних волн от границы раздела жидкости и обычное отражение от внешних границ. Этот механизм подтверждается и самим интервалом волновых чисел неустойчивых дополнительных мод (от 0 до $[N^2/V^2 - n^2\pi^2/H^2]^{1/2}$), а также уменьшением инкрементов нарастания этих мод при увеличении глубины H .

Интересным представляется сравнение изложенных результатов с результатами анализа модели, в которой профиль скорости течения жидкости описывается функ-



Фиг. 3

цией $U(z) = V \tanh z/d$ при прочих равных условиях. В [7], где исследовалась такая модель, было показано, что дисперсионные кривые определяются двумя параметрами – числом Ричардсона в точке перегиба скорости $J = N^2 d^2 / V^2$ и отношением глубины потока к толщине вихревого слоя $y = \frac{1}{2} H/d$. Сравнивая определения чисел R , J и y , найдем, что $R = Jy^2$. На фиг. 1 и 2 штриховыми линиями изображены дисперсионные кривые, рассчитанные в [7] для случая $y = 10$, $J = 0,07$ и $0,19$ соответственно. А на фиг. 3 ($\alpha^* = kd = \alpha/(2y)$) приведены области неустойчивости, даваемые обеими моделями для $y = 10$. Результаты [7] здесь также даны штриховыми линиями.

Как и следовало ожидать, большее совпадение наблюдается для меньших J , соответствующих более тонкому сдвиговому слою. При этом области неустойчивости и фазовые скорости возмущений, даваемые двумя моделями, различаются меньше, чем инкременты нарастания, сильно зависящие от J . Существующее соответствие указывает на подобие дисперсионных кривых для достаточно малых J и больших y , т. е. на зависимость их лишь от произведения $R = Jy^2$. Отметим, что в области больших J (близких к $\frac{1}{4}$) и малых y формула (4) все же позволяет оценивать число дополнительных неустойчивых мод. Как сообщается в [7], в интервале $0 \leq J \leq \frac{1}{4}$ первая дополнительная мода появляется при $y_1 = 5,38$ и вторая при $y_2 = 8,33$, а, согласно формуле (4), $y_n = n\lambda$. Эта простая формула дает число дополнительных мод тем точнее, чем больше y .

Длинные внутренние волны, обнаруженные в сдвиговых зонах атмосферы и связанные с дестабилизирующим действием внешних границ, видимо, возбуждаются и в сдвиговых областях океана. Настоящая модель может быть использована для расчета числа неустойчивых мод, областей неустойчивости, фазовых скоростей, а также длины волны наиболее неустойчивого возмущения. Расчет же инкрементов нарастания по этой модели оправдан лишь для очень тонких сдвиговых слоев (по-видимому, $J < 10^{-2}$ и $y > 10$).

Автор благодарит В. И. Кляцкина и Л. Я. Любавина за интерес к работе и плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drazin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // Advance in Applied Mechanics. N. Y.: Acad. press, 1966. V. 9. P. 1–89.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях: М.: Мир, 1977. 431 с.
3. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. Инфразвук и гравитационные волны в атмосфере – их взаимодействие и распространение. М.: Мир, 1978. 532 с.

4. Lindzen R. S. Stability of a Helmholtz velocity profile in a continuously stratified, infinite Boussinesq fluid-applications to clear air turbulence // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. № 6. P. 1507—1514.
5. Lindzen R. S., Rosenthal A. J. On the instability of Helmholtz velocity profiles in stably stratified fluids when a lower boundary is present // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. № 9. P. 1561—1571.
6. Lalas D. P., Einaudi F., Fua D. The destabilizing effect of the ground on Kelvin-Helmholtz waves in the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. № 1. P. 59—69.
7. Einaudi F., Lalas D. P. The effect of boundaries on the stability of inviscid stratified shear flows // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1976. V. 43. № 2. P. 243—248.
8. Островский Л. А., Степаняц Ю. А., Цимринг Л. Ш. Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 204—239.

Владивосток

Поступила в редакцию
27.IV.1987

УДК 533.6.011.72

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЭРОЗИОННОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ТВЕРДЫХ МИШЕНЕЙ КОЛЬЦЕВЫМИ ЛУЧАМИ

ЗАХАРОВ Н. С., КОРОБЕЙНИКОВ В. П.

В последнее время в физике высоких давлений все шире применяются конструкции, в которых используются сходящиеся ударные волны [1—8]. Исследование газодинамических течений со сходящимися ударными волнами приводит к необходимости более тщательного расчета движений газа в областях, размеры которых существенно меньше характерных размеров течения. В данной работе численным методом изучаются газодинамические явления, сопровождающие облучение твердых преград кольцевыми лучами монохроматического излучения.

1. При образовании сходящихся ударных волн параметры течения за ними вблизи центра симметрии должны описываться известным решением Гудерлея — Станюковича [9—11]. Однако в тех случаях, когда выход решения на автомодельную асимптотику неочевиден или невозможен в силу специфики задачи, для определения деталей течения около центра необходимо применять специальную методику [12]. Для примера рассмотрим задачу о воздействии на твердую преграду профилированного лазерного излучения.

Пусть на поглощающую плоскую диэлектрическую преграду (типа текстолита) нормально к поверхности падает кольцевой цилиндрический пучок монохроматического излучения с внутренним радиусом r_1 , внешним r_2 и плотностью потока энергии

$$q_{\infty}(r, z, t) = \begin{cases} q_{\infty}(t), & r_1 < r < r_2 \\ 0, & r < r_1 \text{ и } r > r_2 \end{cases}$$

Под действием поглощенной доли энергии излучения происходит нагрев, испарение преграды и образование у ее поверхности в кольцевой зоне $\Delta r = r_2 - r_1$ эрозионной плазмы с повышенным давлением [13], которое вызовет возникновение сходящихся и расходящихся ударных волн в окружающем газе. Пусть твердая преграда занимает в цилиндрической системе координат полупространство $z \leq 0$, а область $z > 0$ первоначально заполнена неподвижным воздухом с давлением p_0 и плотностью ρ_0 , прозрачным для излучения. Полагая плазму вязким и нетеплопроводным газом, запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \\ & \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) = 0 \\ & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \mathbf{V}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \kappa q_{\infty} \times \\ & \times \left[\exp\left(-\int_z^{\infty} \kappa dz\right) + R \exp\left(-\int_0^z \kappa dz\right) \exp\left(-\int_0^z \kappa dz\right) \right] \\ & E = e + V^2/2 \end{aligned} \tag{1.1}$$