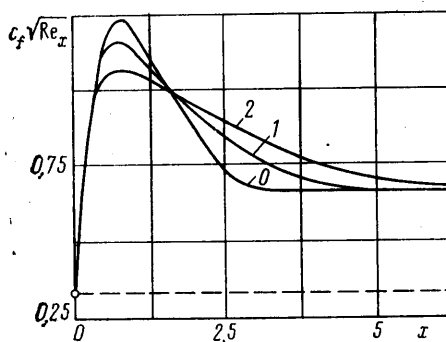


Фиг. 2



Фиг. 3

пограничного слоя. При $Re_d=0$ локальный коэффициент трения мало отличается от полученного в [1]. При увеличении Re_d снижается концентрация примеси в пристенной зоне, что приводит к уменьшению межфазной силы, действующей на газ; вследствие этого величина максимума $c_f \sqrt{Re_x}$ уменьшается. На этот эффект накладывается другой, вызванный тем, что из-за отрицательной поперечной скорости, частицы со значительно большей, чем у несущей фазы, продольной скоростью оказываются вблизи пластины. В результате u_{sw} остается отличной от нуля в большей области, чем при $Re_d=0$; как видно из фиг. 3, величина c_f при $x > 1,6$ тем больше, чем больше Re_d .

Таким образом, расчет ламинарного газодисперсного пограничного слоя при $Re_d \sim 1$ необходимо проводить с учетом подъемной силы Сэфмэна, действующей на дисперсные частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипцов А. Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 48–54.
2. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Кравцов М. В. Сопротивление свободному установившемуся движению сферы в вязкой среде // Инж.-физ. журн. 1968. Т. 15. № 3. С. 464–470.
4. Селезнев Л. И., Игнатевская Л. А. Особенности структуры двухфазного ламинарного пограничного слоя // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1976. Вып. 306. С. 20–24.
5. Осипцов А. Н. Движение запыленного газа в начальном участке канала // Отчет Ин-та механики МГУ. 1985. № 3141. 27 с.

Калининград

Поступила в редакцию
30.III.1987

УДК 532.529.6

ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ЖИДКОСТИ

ДОМБРОВСКИЙ С. Э., ДОРФМАН А. А.

Динамика цилиндрической полости в жидкости без учета вертикального перемещения рассматривалась в [1–3]. В настоящей работе исследуется пульсационное движение цилиндрической полости вблизи свободной границы жидкости с учетом перемещения оси полости в вертикальном направлении.

Рассмотрим динамику цилиндрической полости, совершающей поступательно-пульсационное движение вблизи свободной границы жидкости. Пусть в начальный момент времени в полубезграничной несжимаемой жидкости плотностью ρ распо-

ложена цилиндрическая газовая полость, радиус поперечного сечения которой равен R_0 , расстояние от оси полости до свободной границы жидкости H . Давление газа внутри полости p_0 , давление жидкости на глубине расположения полости p_∞ .

Будем считать, что атмосфера полости представляет собой идеальный газ. Допустим также, что изменением формы свободной поверхности можно пренебречь и что ось полости в любой момент времени параллельна свободной границе жидкости.

В этом случае динамику полости определяют две основные составляющие: пульсационное движение вблизи оси, вызванное перепадом давления $p_0 - p_\infty$, и поступательное движение в вертикальном направлении, обусловленное скоростью V , поддерживаемое силой плавучести.

Для составления уравнений движения полости необходимо определить потенциал скорости, обусловленной пульсирующим и всплывающим в направлении к свободной границе жидкости цилиндром, т. е. найти такую гармоническую функцию во внешности цилиндра радиуса R , которая удовлетворяет следующим краевым условиям: $\partial\Phi/\partial r = R + Z \cos \theta$ — на поверхности цилиндра, $\Phi = 0$ — на свободной границе жидкости, где Z — вертикальная координата оси полости, отсчитываемая от начального положения; точка над переменной величиной здесь и далее — символ дифференцирования по времени.

Введем биполярные координаты по формулам

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \tau}, \quad x = \frac{a \sin \tau}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \tau}, \quad a = \sqrt{h^2 - R^2}, \quad h = H - Z$$

где x, z — декартовы координаты с началом, расположенным на свободной границе жидкости, причем ось z направлена в глубь жидкости. Тогда придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

При этом краевые условия на поверхности цилиндра $\alpha = \alpha_0$ и свободной границе жидкости $\alpha = 0$ примут вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \dot{R} \frac{aR}{h + R \cos \tau} + \dot{Z} a R \frac{R + h \cos \tau}{(h + R \cos \tau)^2} \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (2)$$

$$\Phi = 0 \quad (\alpha = 0)$$

Будем искать решение задачи (1), (2) в виде ряда Фурье

$$\Phi = \frac{1}{2} A_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha) \cos n\tau \quad (3)$$

Тогда получим

$$\Phi = R \dot{R} \alpha + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{R \dot{R}}{n} + \dot{Z} a \right) \exp(-n\alpha_0) \frac{\operatorname{sh} n\alpha}{\operatorname{ch} n\alpha_0} \cos n\tau$$

Отметим, что при вычислении коэффициентов ряда (3) использовано допущение $R/h < 1$. На основании (3) выражение для кинетической энергии жидкости может быть записано следующим образом:

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_{\alpha = \alpha_0} d\tau = 2\pi \rho R^2 \dot{R}^2 \left(\frac{\alpha_0}{2} + T_{11} \right) + 4\pi \rho \dot{R} \dot{Z} R a T_{12} + 2\pi \rho \dot{Z}^2 a^2 T_{22} \quad (4)$$

$$T_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-2n\alpha_0)}{n} \operatorname{th} n\alpha_0, \quad T_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2n\alpha_0) \operatorname{th} n\alpha_0$$

$$T_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-2n\alpha_0) \operatorname{th} n\alpha_0, \quad \alpha_0 = \ln \frac{h+a}{R}$$

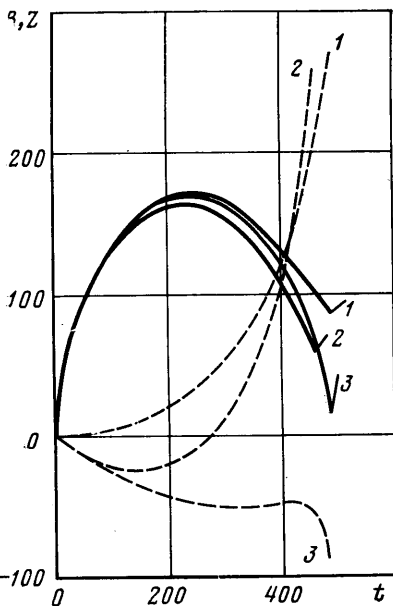
Потенциальная энергия системы жидкость – полость может быть представлена в виде

$$\Pi = \pi R^2 \left[\frac{p_0}{\kappa - 1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2\kappa} + p_\infty - \rho g Z \right] \quad (5)$$

где κ – показатель адиабаты газа внутри полости, g – ускорение свободного падения.

На основании выражений (4), (5) составим функцию Лагранжа и определим уравнения движения цилиндрической полости вблизи свободной границы жидкости, принимая во внимание, что ряды в выражении (4) вместе с рядами, составленными из производных, сходятся равномерно. Введем безразмерные переменные $R' = R/R_0$, $Z' = Z/R_0$, $t' = t\sqrt{p_\infty/R_0^2 \rho}$. Тогда основная система уравнений может быть записана следующим образом:

$$(\ddot{R}\dot{R} + \dot{R}^2)(\alpha_0 + T_{11}) - \frac{\dot{R}^2}{2} \left(\frac{R}{a} e^{-\alpha_0} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{dT_{11}}{d\alpha_0} \right) -$$



$$- \dot{Z}^2 \left[\left(\frac{h}{a} - 2 \right) T_{22} + \frac{a^2}{R^2} \left(\frac{e^{-\alpha_0}}{a} + \frac{1}{R} \right) \frac{dT_{22}}{d\alpha_0} \right] + \quad (6)$$

$$+ \dot{R}\dot{Z}e^{-\alpha_0} \left(1 + \frac{h}{a} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{dT_{11}}{d\alpha_0} \right) + 2\dot{Z}aT_{12} =$$

$$= \delta R^{-2\kappa} - 1 + \beta Z$$

$$R\ddot{Z} \frac{a^2}{R^2} T_{22} + \dot{Z}^2 \left[\frac{h}{R} T_{22} - e^{-\alpha_0} \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{ah}{R} \right) \frac{dT_{12}}{d\alpha_0} \right] +$$

$$+ \dot{R}\dot{Z} \frac{a}{R} T_{12} + \frac{\dot{R}^2}{4} e^{-\alpha_0} \left(1 + \frac{h}{a} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{dT_{11}}{d\alpha_0} \right) +$$

$$+ \ddot{R}aT_{12} = \frac{1}{4} \beta R$$

Система (6) решается при начальных условиях

$$t=0: R=1, Z=0, \dot{R}=\mu, \dot{Z}=\nu$$

$$\delta = \frac{p_0}{p_\infty}, \quad \beta = \frac{\rho g R}{p_\infty}, \quad \nu = V \sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}, \quad \mu = W \sqrt{\frac{\rho}{4p_\infty}}$$

где W – начальное значение скорости пульсационного движения.

Отметим, что при записи системы (6) и ниже штрихи у безразмерных переменных опущены.

Введем обозначение $\varepsilon = R/2h$ и упростим систему (6), считая $\varepsilon < 1$

$$(\ddot{R}\dot{R} + \dot{R}^2)(\alpha_0 + 2\varepsilon^2) - \frac{1}{2} \dot{R}^2(1 - 2\varepsilon^2) - \frac{1}{2} \dot{Z}^2(1 - \varepsilon^2) - 2\dot{R}\dot{Z}\varepsilon + R\ddot{Z}\varepsilon + O(\varepsilon^3) = \delta R^{-2\kappa} - 1 + \beta Z \quad (7)$$

$$RZ(1 - 4\varepsilon^2) + 8R^2\varepsilon + 2R\dot{Z}(1 - \varepsilon^2) - 2R\dot{R}\varepsilon + O(\varepsilon^3) = \beta R$$

Положим в системе (7) $Z=0$ и $\varepsilon=0$, тогда придем к соответствующим уравнениям [2], описывающим пульсационное движение цилиндрической полости в безграничной жидкости.

Результаты численного решения задачи о движении цилиндрической полости вблизи свободной границы жидкости при различных значениях параметров β и ε даны на фигуре (сплошные линии – R , штриховые – Z). При расчетах были приняты следующие значения параметров: $\nu = \mu = 0$; линии 1–3 соответствуют $\beta = 2 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$, 0; $\varepsilon = 0, 10^{-3}, 10^{-3}$; во всех случаях $\delta = 10^4$, $\kappa = 4/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кедринский В. К. О некоторых приближенных моделях одномерной пульсации цилиндрической полости в несжимаемой жидкости // Физика горения и взрыва. 1976. Т. 12. № 5. С. 768–773.

2. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1977. 259 с.
 3. Слепян Л. И. Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 809–813.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.IV.1987

УДК 532.59+551.466.81

О СДВИГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКОВ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

ГОЛАНД В. И.

Проводится линейный анализ устойчивости стратифицированных по плотности потоков идеальной жидкости конечной глубины с профилем скорости Гельмгольца. Кроме волны Кельвина – Гельмгольца обнаружены дополнительные неустойчивые моды. Получены аналитические выражения для нейтральных кривых этих мод. Обсуждается их природа.

Большинство теоретических и экспериментальных работ, посвященных неустойчивости Кельвина – Гельмгольца сдвиговых потоков идеальной жидкости, связано с исследованием экспоненциального роста во времени коротковолновых возмущений (волновые числа порядка h^{-1} , где h – толщина сдвигового слоя) (см., например, [1–3]). Однако в [4] было высказано предположение, что в условиях, допускающих так называемое явление сверхотражения внутренних волн от границы раздела жидкости, наличие внешних отражающих границ может привести к дестабилизации более длинных волн и появлению новых неустойчивых мод. Это предположение нашло свое подтверждение в [5–6], где в применении к атмосфере исследован стратифицированный по плотности поток идеальной жидкости при наличии тангенциального разрыва средней скорости течения на некотором расстоянии от нижней твердой границы, а также в [7], где профиль скорости описывался гиперболическим тангенсом безразмерной глубины и учитывались обе (верхняя и нижняя) границы.

Ниже дается линейный анализ более простой, чем в [7], модели, в которой поток стратифицированной идеальной жидкости (частота Брента – Вейсяля N постоянна по глубине) с тангенциальным разрывом скорости на средней глубине ограничен снизу на уровне $z = -H/2$ жестким дном и сверху на уровне $z = H/2$ свободной поверхностью. Профиль горизонтальной средней скорости U описывается ступенчатой функцией: $U = V$ для $z > 0$ и $U = -V$ для $z < 0$. В рамках этой модели удается получить аналитические выражения для нейтральных кривых мод, отличных от волн Кельвина – Гельмгольца, а также выявить связь неустойчивости этих мод с явлением сверхотражения внутренних волн от границы раздела жидкости. Уравнения, описывающие малые двумерные возмущения данного потока в приближении Буссинеска, рассматривались неоднократно (см. например, [1, 4–6]).

Представим решение этих уравнений в виде монохроматической волны $f(z) \exp(ik(x - cVt))$, где k – волновое число, а c – комплексная безразмерная фазовая скорость. Тогда с учетом граничных условий (на дне – равенство нулю вертикальной скорости; на свободной поверхности – кинематическое и динамическое условия $\omega = \partial \zeta / \partial t + U \partial \zeta / \partial x$, $p'(x, \zeta, t) = 0$, где ω – вертикальная скорость, $\zeta = \zeta(x, z, t)$ – смещение уровня жидкости, p' – возмущение давления; на границе раздела – непрерывность давления и функции ζ) можно получить дисперсионное уравнение

$$l_+(1-c)^2 \sin l_- \cos l_+ + l_-(1+c)^2 \sin l_+ \cos l_- = \frac{2V^2 l_+ (1-c)^2}{gH} (l_- (1+c)^2 \cos l_- \cos l_+ - l_+ (1-c)^2 \sin l_- \sin l_+) \quad (1)$$

$$l_{\pm} = \frac{1}{2} [4R(c \mp 1)^{-2} - \alpha^2], \quad R = \frac{1}{4} N^2 H^2 V^{-2}, \quad \alpha = kH$$

где R – число Ричардсона, α – безразмерное волновое число. Использование приближения «твердой крышки», требующего равенства нулю вертикальной скорости жидкости на верхней границе и отфильтровывающего поверхностные волны, приводит к дисперсионному уравнению, представляющему собой равенство нулю левой части уравнения (1)

$$l_+(1-c)^2 \sin l_- \cos l_+ + l_-(1+c)^2 \sin l_+ \cos l_- = 0 \quad (2)$$

Аналогичная модель без внешних границ приводит к уравнению [4]

$$l_+^* (1-c)^2 + l_-^* (1+c)^2 = 0, \quad l_{\pm}^* = [N^2 V^{-2} (c \mp 1)^{-2} - k^2]^{1/2} \quad (3)$$