

УДК 533.6.011.55 : 541.124.13

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ГИПЕРЗВУКОВЫХ СЛЕДАХ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ЧИСЕЛ Re

САВЕЛЬЕВ Ю. П., СТЕПАНОВ М. М.

Проведено исследование дальнего гиперзвукового химически и термодинамически неравновесного следа, возникающего за телами при спуске в атмосфере и характеризующегося малыми числами Рейнольдса. Рассмотрение проводится на основе упрощенных уравнений Навье — Стокса параболического типа для многокомпонентной химически реагирующей смеси газов, дополненных уравнениями энергии для электронов и колебательных степеней свободы отдельных молекул воздуха. Переносные свойства вычисляются в третьем приближении теории Чепмена — Энскога с учетом явлений термо- и бародиффузии, диффузионного термоэффекта, отличия температуры электронов от температуры тяжелых частиц. На основании численных экспериментов исследовано влияние термодинамической и химической неравновесности, выбора модели переносных свойств частично ионизированной плазмы дальнего следа на параметры этой области течения.

При гиперзвуковом полете в условиях разреженной среды многие физико-химические процессы течения частично ионизированной смеси газов как непосредственно около тела, так и в следе за ним могут протекать неравновесно. Вследствие больших времен релаксации наиболее вероятно неравновесное протекание химических реакций, неравновесное возбуждение внутренних степеней отдельных молекул воздушной газовой смеси, а также отсутствие термодинамического равновесия между системами «электроны» и «тяжелые частицы». Большинство существующих к настоящему времени работ, посвященных данному вопросу, ограничивается рассмотрением поля течений только с учетом неравновесной химической кинетики. Примером может служить дальний гиперзвуковой след [1–5].

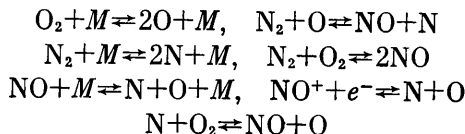
Кроме того, в этих исследованиях переносные свойства слабоионизированной плазмы определяются, как правило, с помощью соответствующих коэффициентов, вычисляемых по простейшим зависимостям типа «степенного» закона, формулы Сатерленда или несколько более сложным — формулам Уилке, Саксена и др. Термо- и бародиффузия в таких случаях не учитываются. Однако, как отмечается в [6–10], для частично ионизованных газов такой подход может привести к довольно большим погрешностям и поэтому необходимо использовать более точные методы, основанные на молекулярно-кинетической теории газов. Причем рассчитывая соответствующие коэффициенты переноса по методу Чепмена — Энскога, необходимо учитывать высшие приближения при отыскании их в виде рядов по полиномам Сонина.

Выбор приближения для слабоионизованных газов [6–9] в сильной степени зависит от характера сечений рассеяния электронов на нейтральных частицах. Число приближений резко возрастает при сильной зависимости этих сечений от энергии электрона, так как сходимость рядов по полиномам Сонина ухудшается. Для условий частично ионизованного воздуха, возникающих при обтекании различных тел в случае полетов с гиперзвуковыми скоростями, при вычислении коэффициентов переноса необходимо учитывать как минимум, третье приближение для электронов и второе — для тяжелых частиц. Это тем более важно, чем меньше числа Рейнольдса Re полета в сочетании с большими числами Маха M_∞ , т. е. в случаях когда условия задачи приближаются к границе применимости гипотезы сплошности среды.

В связи с этим сделана попытка учета указанных выше физико-химических процессов при определении параметров течения низкотемпературной плазмы на примере дальнего, гиперзвукового, чисто воздушного, термодинамически и химически неравновесного осесимметричного следа. При этом особое внимание уделяется изучению влияния переносных свойств потока, вычисляемых в высших приближениях теории Чепмена — Энскога.

Физико-математическая модель рассматриваемого течения базируется на предположении о том, что дальний гиперзвуковой след представляет собой смесь компонентов частично ионизованного воздуха O , O_2 , N , N_2 , NO , Ar , NO^+ , e^- , между которыми идут химические реакции, описываю-

щаются следующими уравнениями:



где M — третья частица.

Справедливость подобного описания химических процессов доказывается для не слишком удаленных от тела «горячих» областей следа в [1, 4]. Делается предположение о том, что поступательно-вращательные степени свободы всех тяжелых компонентов, а также их колебательные степени, за исключением молекул O_2 , N_2 , возбуждены равновесно и характеризуются температурой T . Колебательные же степени свободы молекул O_2 , N_2 возбуждены неравновесно с поступательно-вращательными и имеют температуры $T_{ко}$, $T_{кн}$ соответственно, а их процесс релаксации описывается уравнениями Ландау — Теллера. Считается также, что возможно отсутствие термодинамического равновесия между системами «электроны» — «тяжелые частицы» и температура T_e может отличаться от T . Предполагается, что след является локально-нейтральным, начальный объемный заряд равен нулю, электрический ток отсутствует. Исходное сечение, с которого начинается рассмотрение следа, выбирается в области сверхзвукового течения.

На основании сделанных предположений для описания низкотемпературной плазмы дальнего гиперзвукового осесимметричного следа используется система упрощенных уравнений Навье — Стокса для многокомпонентной химически реагирующей смеси газов параболического типа, справедливость применения которой для данной области течения доказывается в [1, 5]. Она дополняется релаксационными уравнениями Ландау — Теллера для энергии колебательных степеней свободы молекул O_2 , N_2 , а также уравнением энергии для электронов [13—15, 22]. В цилиндрической системе координат x , y , φ , где ось x — совпадает с осью симметрии, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_x y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y y)}{\partial y} &= 0 \\ \rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V_y}{y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{V_y}{y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \left[V_x \frac{\partial(C_e h_e)}{\partial x} + V_y \frac{\partial(C_e h_e)}{\partial y} \right] &= V_x \frac{\partial P_e}{\partial x} + V_y \frac{\partial P_e}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial(y J_{ey})}{\partial y} + Q \\ \rho \sum_{i=1}^n \left[V_x \frac{\partial(C_i h_i)}{\partial x} + V_y \frac{\partial(C_i h_i)}{\partial y} \right] &= V_x \frac{\partial P_h}{\partial x} + V_y \frac{\partial P_h}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{1}{y} \frac{\partial(y J_{hy})}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 - Q^r \\ \rho V_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial C_i}{\partial y} &= - \frac{\partial(y I_{iy})}{\partial y} + W_i \\ V_x \frac{\partial E_i}{\partial x} + V_y \frac{\partial E_i}{\partial y} &= \frac{E_{ip} - E_i}{\tau_{ii}} + \frac{1}{\tau_{ij}} \frac{m_j}{C_j} \frac{1}{k \Theta_j} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[E_j \left(E_i + C_i \frac{k\Theta_i}{m_i} \right) \exp \left[\frac{1}{T} (\Theta_j - \Theta_i) \right] - E_i \left(E_j + C_j \frac{k\Theta_j}{m_j} \right) \right] + \\ + (E_i^* - E_i) \left(V_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + V_y \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) - Q_i^K \quad (i=O_2, j=N_2; i=N_2, j=O_2)$$

$$I_i = \rho_i V_i, \quad \sum_{i=1}^N C_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N Z_i C_i M_i^{-1} = 0$$

$$J_h = J_h^0 - \sum_{i=1}^H (\lambda_B^i \nabla T + \lambda_K^i \nabla T_{Ki} + C_i \rho h_i I_i)$$

$$\lambda_B^i = \rho C_i b_i D_{ii} C_{Vi}^B, \quad \lambda_K^i = \rho C_i b_i D_{ii} C_{Vi}^K \\ P = nkT, \quad P_e = n_e kT_e, \quad P_h = n_h kT, \quad P = P_e + P_h$$

$$\Theta_i = \frac{h\nu_i}{k}, \quad x_i = \frac{n_i}{n}, \quad C_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad n_h = \sum_{i=1}^H n_i$$

$$m = \left(\sum_{i=1}^N \frac{C_i}{m_i} \right)^{-1}, \quad M = \left(\sum_{i=1}^N \frac{C_i}{M_i} \right)^{-1}, \quad b_i = \frac{1}{m} \left(\sum_j \frac{C_j D_{ij}}{m_j D_{ij}} \right)^{-1}$$

$$E_i = \frac{k\Theta_i}{\exp(\Theta_i/T_{Ki}) - 1}, \quad E_{i,p} = \frac{k\Theta_i}{\exp(\Theta_i/T) - 1}$$

$$Q = Q^T + Q_{O_2}^K + Q_{N_2}^K, \quad Q^T = 3m_e n_e k (T_e - T) \sum_{j=1}^H \frac{\nu_{ej}}{m_j}$$

$$Q_i^K = n_e n_i \Theta_i P_{10}^i k \left\{ \frac{\exp(-\Theta_i/T_e)}{[1 - \exp(-\Theta_i/T_e)]^2} - \frac{\exp(-\Theta_i/T_{Ki})}{[1 - \exp(-\Theta_i/T_{Ki})]^2} \right\} \quad (i=O_2, N_2)$$

Здесь $V_x, V_y, I_x, J_{hy}, J_{ey}$ — составляющие вектора скорости, диффузионного потока i -го компонента, тепловых потоков «тяжелых» частиц (индекс h) и электронов (индекс e); ρ, M, P, P_h, P_e — плотность, молекулярный вес, давления смеси, тяжелых частиц и электронов; T, T_{Ko}, T_{Kn}, T_e — температуры поступательно-вращательных степеней свободы тяжелых частиц, колебательных степеней свободы молекул O_2, N_2 , электронов; $\rho_i, C_i, h_i, W_i, Z_i, \Theta_i, E_i, m_i, M_i$ — плотность, относительная массовая концентрация, энтальпия, массовая скорость образования, заряд, характеристическая колебательная температура, колебательная энергия, масса и молекулярный вес i -го компонента; $Q^T, Q_{O_2}^K, Q_{N_2}^K$ — энергии обмена между электронами и поступательно-вращательными степенями свободы «тяжелых» молекул, электронами и колебательными степенями свободы молекул O_2, N_2 ; n_i, n_e, n — число частиц i -го компонента, электронов, общее число частиц в единице объема; $\lambda_B^i, \lambda_K^i, C_{Vi}^B, C_{Vi}^K$ — коэффициенты теплопроводности, определенные как модифицированные поправки Эйнена [22], теплоемкости вращательных и колебательных степеней свободы соответственно; J_h^0 — тепловой поток, обусловленный поступательными степенями свободы тяжелых частиц; V_i — диффузионная скорость i -го компонента; D_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии в первом приближении; ν_{ei}, P_{10}^i — частоты соударений электронов с молекулами i -го компонента, ве-

роятность перехода с первого колебательного уровня на нулевой для i -го компонента; τ_{ij} — характерные времена колебательной релаксации; $H=N-1$, N — количество «тяжелых» компонентов и их общее число.

В качестве дополнительных неизвестных в систему уравнений входят коэффициент вязкости μ и величины потоков $\mathbf{I}_i, \mathbf{J}_h^0, \mathbf{J}_e$.

При определении диффузионных и тепловых потоков будем следовать [6, 9], ограничиваясь третьим приближением для электронов и вторым для тяжелых частиц. Такой подход, когда «силы» выражаются через «потоки», выгодно отличается от традиционных способов определения переносных свойств [10, 13, 14], приводящих к трудоемким вычислениям. Действительно, к настоящему времени коэффициенты переноса вычислены только для простейших смесей, как правило, чистых газов, а также для термодинамически равновесного воздуха. Традиционные способы определения коэффициентов переноса в высших приближениях практически не использовались для реальных многокомпонентных течений, в которых возможна как химическая, так и термодинамическая неравновесность. Методика [6, 9] приводит к более простой и удобной для решения гидродинамических задач форме уравнений переноса. Она позволяет избежать двойного обращения матриц, а потоки находят, минуя непосредственное вычисление коэффициентов переноса. При этом одновременно учитываются не только основные причины, вызывающие тот или иной поток (законы Фурье, Фика, Ньютона, Ома и др.), но и различные перекрестные эффекты, такие как термо- и бародиффузия, диффузионный термоэффект, термоэлектрические явления. Это в сочетании с пренебрежением членами порядка $\epsilon = (m_e/m_h)^{0,5} \ll 1$ значительно уменьшает объем вычислений.

Соответствующая система уравнений будет выглядеть следующим образом [9]. Для тяжелых частиц имеем

$$\begin{aligned} \frac{\nabla x_i}{x_i} = & \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ij}} \left(\frac{\mathbf{I}_j}{\rho_j} - \frac{\mathbf{I}_i}{\rho_i} \right) + \frac{x_e \mathbf{I}_e}{D_{ei} \rho_e} - \sum_{j=1}^H \frac{x_j m_{ij}}{D_{ij} m} a_{ij}^{01} (\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i) - \\ & - \frac{x_e}{D_{ei}} a_{ei}^{01} \mathbf{g}_e + \frac{x_e}{D_{ei}} a_{ei}^{02} \mathbf{f}_e - \left(1 - \frac{m_i}{m} \right) \frac{P}{nkT} \nabla \ln P - x_e \left(1 - \frac{T_e}{T} \right) \nabla \ln P_e - \\ & - x_e \nabla \ln \frac{T}{T_e} + Z_i e \frac{\mathbf{E}}{kT} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^H \left[\frac{C_i^2}{D_{ii}} a_{ii}^{11} (1 - C_i) \delta_{ij} - \frac{C_j^2}{D_{jj}} C_j a_{jj}^{11} (1 - \delta_{ij}) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^H \frac{x_j x_k}{D_{jk}} \left(\frac{m_{kj}}{m} \right)^2 A_{jk} \right] \mathbf{g}_j = \sum_{j=1}^H \frac{x_i x_j}{D_{ij}} \frac{m_{ij}}{m} a_{ij}^{10} \left(\frac{\mathbf{I}_i}{\rho_i} - \frac{\mathbf{I}_j}{\rho_j} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Вместо одного из последних уравнений можно использовать

$$\nabla \ln T = - \sum_{j=1}^H \left[\frac{C_j^2}{D_{jj}} a_{jj}^{11} + \sum_{k=1}^H \frac{x_j x_k}{D_{jk}} \left(\frac{m_{kj}}{m} \right)^2 A_{jk} \right] \mathbf{g}_j \quad (3)$$

Для электронов получаем

$$\begin{aligned} \frac{\nabla x_e}{x_e} = & - \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} \frac{\mathbf{I}_e}{\rho_e} + \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{01} \mathbf{g}_e - \\ & - \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{02} \mathbf{f}_e - \frac{P}{nkT} \nabla \ln P + (1 - x_e) \left(1 - \frac{T_e}{T} \right) \nabla \ln P_e + \end{aligned}$$

$$+(1-x_e) \nabla \ln \frac{T}{T_e} - e \frac{\mathbf{E}}{kT} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \ln T_e = & \frac{T}{T_e} \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{10} \frac{\mathbf{I}_e}{\rho_e} - \left(\frac{T}{T_e} \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{11} + \frac{x_e}{D_{ee}} a_{ee}^{11} \right) \mathbf{g}_e + \\ & + \left(\frac{T}{T_e} \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{12} + \frac{x_e}{D_{ee}} a_{ee}^{12} \right) \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{T_e} \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{22} + \frac{x_e}{D_{ee}} a_{ee}^{22} \right) \mathbf{f}_e = & - \frac{T}{T_e} \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{20} \frac{\mathbf{I}_e}{\rho_e} + \\ & + \left(\frac{T}{T_e} \sum_{j=1}^H \frac{x_j}{D_{ej}} a_{ej}^{21} + \frac{x_e}{D_{ee}} a_{ee}^{21} \right) \mathbf{g}_e \end{aligned} \quad (6)$$

Напряженность внутреннего индуцированного электрического поля \mathbf{E} исключается с помощью соотношения, вытекающего из условия квазинейтральности

$$\sum_{i=1}^N \frac{Z_i \mathbf{I}_i}{m_i} = 0 \quad (7)$$

В этих формулах введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i = \frac{m}{kT} \frac{\mathbf{J}_i}{\rho_i}, \quad \mathbf{g}_e = \frac{m_e}{kT_e} \frac{\mathbf{J}_e}{\rho_e}, \quad m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad \mathbf{J}_h^\circ = \sum_{i=1}^H \mathbf{J}_i \\ D_{ij} = \frac{3}{16nm_{ij}} \frac{kT}{\Omega_{ij}^{11}}, \quad D_{ee} = \frac{3}{8nm_e} \frac{kT_e}{\Omega_{ee}^{11}} \end{aligned}$$

где e — заряд электрона, Ω_{ij}^{mn} — интегралы столкновений.

Коэффициенты a_{ij}^{mn} , A_{ij}° , A_{jk}^i представляют собой линейные функции интегралов столкновений:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{mn} = F_1(\omega_{ij}^{ks}), \quad A_{jk}^\circ = F_2\left(\frac{m_j}{m_k}, a_{jk}^{22}\right) \\ A_{jk}^i = F_3\left(\frac{m_j}{m_k}, a_{jk}^{11}, a_{jk}^{22}, C_i\right), \quad \omega_{ij}^{ks} = \frac{\Omega_{ij}^{ks}}{\Omega_{ij}^{11}} \end{aligned}$$

Выражения для них можно найти в [9]. Задавшись потенциалами взаимодействия между частицами разных сортов i и j , можно заранее рассчитать коэффициенты a_{ij}^{mn} , представив их некоторыми функциями температур. Для таких весьма распространенных потенциалов, как потенциал твердых сфер или типа $\varphi = c/r^n$, эти коэффициенты являются постоянными, заранее вычисляемыми величинами $a_{ij}^{mn} = \text{const}$. Все это также приводит к резкому сокращению объема вычислений.

Приведенные уравнения переноса представляют собой линейную систему уравнений относительно диффузионных и тепловых потоков \mathbf{I}_i , \mathbf{J}_i вспомогательного потока \mathbf{f}_e и напряженности \mathbf{E} .

Поскольку коэффициент динамической вязкости определяется в основном тяжелыми компонентами и наименее чувствителен к числу прибли-

жений, будем использовать для его расчета формулу Уилке [17], исключая при этом из рассмотрения электроны.

Для выбора потенциалов взаимодействия между частицами, расчета интегралов столкновений, коэффициентов a_{ij}^{mn} используются данные [10–15], а для определения констант химических реакций и времен колебательной релаксации — [1, 16]. При этом константы скорости химических реакций с участием электронов считаются зависящими от температуры T_e , а не от T [21].

На основании данной модели течения оценим степень возможной термодинамической неравновесности, влияние ее, а также учета переносных свойств воздушной газовой смеси дальнего следа в третьем приближении теории Чепмена — Энскога на основные параметры потока. Исследование проведем на примере модельной задачи о развитии в пространстве некоторого возмущения, заданного в виде определенных профилей начальных данных в сечении $x=x_n$ за телом и расположенного на высоте H (характеризующейся плотностью ρ_∞ , температурой T_∞ , составом воздушной смеси $C_{i\infty}$).

Предполагается полное термодинамическое равновесие в исходном сечении. Считается, что вид указанных профилей (концентраций $C_i=C_i(y)$, температур $T/T_\infty=T_{KO}/T_\infty=T_{KN}/T_\infty=T_e/T_\infty=F(y)$, скоростей V_x/V_∞ , V_y/V_∞ ; давлений P/P_∞) одинаков для всех высот и $\partial P/\partial y=0$. Рассматриваются два варианта: $H=80$ и 60 км. Для высоты $H=60$ км в качестве начальных данных берутся результаты расчетов течения около затупленного тонкого конуса с углом полураствора $\beta=10^\circ$, диаметром основания $d=2R=0,6$ м, длиной $l=1,5$ м и радиусом затупления $r=4 \cdot 10^{-2}$ м, летящего в воздухе с параметрами невозмущенного потока, соответствующими данной высоте, со скоростью $V_\infty=7400$ м/с. Рассматривается сечение на расстоянии $x_n \approx (6-10)d$ от тела в области полностью сверхзвукового течения. Для нахождения указанных значений на левой и верхней (при $y \rightarrow \infty$) границах следа и распределения давления $\partial P/\partial x$ используются приближенные формулы, достаточно хорошо разработанные для этой области потока (особенно в случае тонких, заостренных тел) [4] и результаты [3]. Необходимо отметить, что поскольку рассматривается дальний след за тонким телом, то «горячее» высокоэнтропийное его ядро, формирующееся в основном газом пограничного слоя на теле, окружено холодным вязким потоком. Параметры такого вязкого течения быстро приобретают значения, близкие к параметрам набегающего потока, а давление падает до давления невозмущенной среды P_∞ [3, 4]. Например, для варианта с $H=60$ км условия на верхней границе дальнего следа мало отличаются от параметров невозмущенного потока, а $P \approx P_\infty$ уже при $x > 60d$.

В качестве граничного условия на оси x используются условия симметрии.

Анализ характерных времен различных процессов показывает, что в начальном сечении дальнего следа (в районе горла) в реальном полете могут реализовываться самые разные соотношения между всеми температурами T , T_e , T_{KO} , T_{KN} . Это зависит от условий полета (V_∞ , ρ_∞ , T_∞ и т. д.), формы тела («тонкое» заостренное или «толстое» затупленное), а в случае «тонкого» тела — от отношения его длины l к характерному поперечному размеру d . Поэтому предположение о полном термодинамическом равновесии в начальном сечении не меняет общности поставленной модельной задачи.

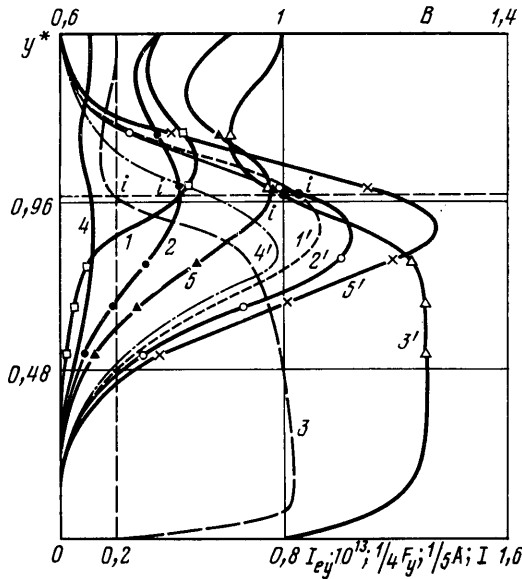
Для численного решения задачи используется модифицированный метод Зейберга — Блейха [5]. При этом явная схема [5] дополняется расщеплением по различным физико-химическим процессам. Выбор основного шага интегрирования Δx_0 производится согласно требованиям точности задачи и условиям устойчивости для основных уравнений сохранения. Определяются шаги Δx_i для каждого физико-химического процесса, пропорциональные характерным временам этих процессов и отражающие их релаксационные и кинетические свойства. В случае $\Delta x_i < \Delta x_0$ для интегрирования дифференциального уравнения, учитывающего i -й релаксационный

процесс, выбирается шаг $\Delta x = \Delta x_i$ (или $\Delta x = \min(\Delta x_i)$, если таких процессов несколько). В противном случае, когда $\Delta x_i \geq \Delta x_0$ (медленные, близкие к замороженным процессы, характерные для разреженной среды больших высот $H \geq 70$ км), уравнение интегрируется с $\Delta x = \Delta x_0$. Переносные свойства газовой смеси считаются неизменными на всем протяжении Δx_0 .

Для плохо обусловленной системы уравнений переноса $AX=B$ (1)–(7) используется итерационный метод решения, при котором вначале вычисляется пробное решение X_p методом Гаусса с выбором главного элемента. Затем оно уточняется в итерационном процессе $X_{p+1} = X_p + d_p$, где d_p – решение системы уравнений $Ad_p = B - AX_p$. Количество итераций выбирается исходя из заданной точности получаемого результата ($\delta \leq 1\%$) и не превышает трех ($p \leq 3$).

Исследование проводилось с использованием следующих моделей течения:

а) общий случай термохимически неравновесного течения, четырех-температурного приближения с температурами T , $T_{ко}$, $T_{кн}$, T_e с определе-



Фиг. 1

нием переносных свойств в третьем приближении теории Чепмена – Энского и учетом различных перекрестных эффектов;

б) модель а, но для случая равенства всех четырех температур при $T_e = T_{ко} = T_{кн} = T$;

в) модель б, но без учета эффектов Соре и Дюфура;

г) модель а, но переносные свойства воздушной газовой смеси определяются по обычным формулам Ньютона, Фурье, Фика с коэффициентами вязкости, теплопроводности, эффективным коэффициентом диффузии, вычисляемыми по формулам Уилке, Мейсона – Саксена с модифицированной поправкой Эйкена, Бундерберга – Уилке [17–19];

д) модель г, но для случая равенства всех четырех температур при $T_e = T_{ко} = T_{кн} = T$ и определения диффузионных потоков с помощью соотношений Стефана – Максвелла в первом приближении [13–15].

Для иллюстрации влияния отдельных процессов (отличия T_e от T , термодиффузии) на переносные свойства низкотемпературной плазмы воздуха в условиях, характерных для течений дальних гиперзвуковых следов, на фиг. 1 приведены профили диффузионных потоков электронного компонента I_{ey} ($\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$) в проекции на ось Y ($y^* = y/R$), вычисленные для исходного сечения следа при $x = x_n$ в случае $H = 80$ км. Эти графики представляют собой и профили диффузионных потоков ионов NO^+ , так как

$I_{uy} = (m_u/m_e)I_{ey}$. Здесь же представлены профили аналогичной проекции напряженности внутреннего индуцированного электрического поля E_y (в вольтах), действующего внутри сферы радиуса Дебая и обеспечивающего амбиполярный характер течения. Используются следующие обозначения: 1 — E_y^* , рассчитанная по модели б; 2 — E_y , рассчитанная по модели в; 3 — $A = E_y/E_y^*$; 4, 5 — E_y , рассчитанная по модели в с использованием искусственно заданной температуры электронов T_e , отличной от остальных температур, т. е. $T_e \neq T = T_{ки}$. Температура T_e при расчетах для кривых 4, 5 задавалась в виде

$$\frac{T_e}{T} = B^* \exp \left[-A^* \left(\frac{y}{R} \right) \right]$$

где A^* , B^* , $R(d=2R)$ — константы. Кривая 4 соответствует случаю

$$A^* = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{T}{T_e} \right) = 0, \quad B^* = \left(\frac{T_e}{T} \right) \Big|_{y=0} = 0, 1$$

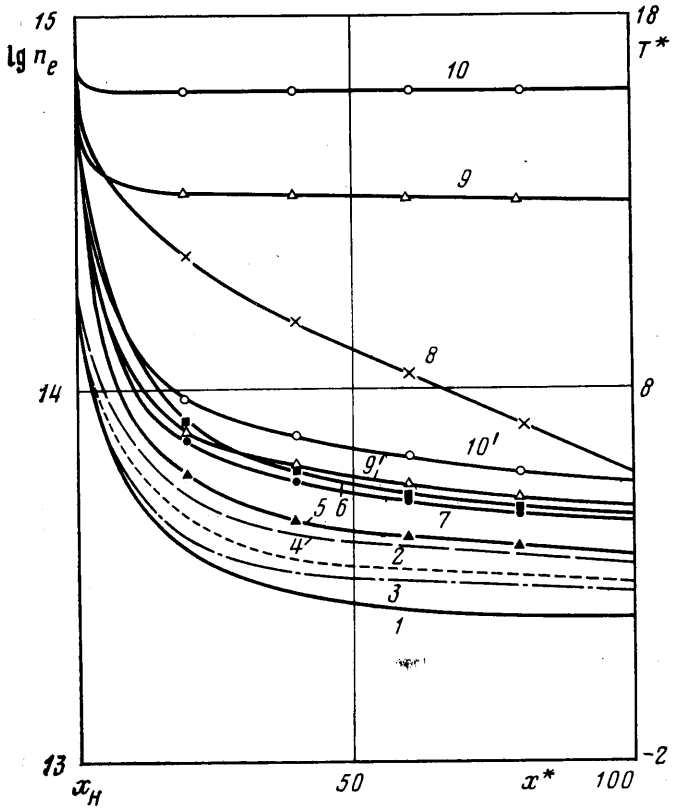
т. е. $T_e < T$, кривая 5 — $A^* = 0,3$, $B^* = 1,9$, т. е. $T_e > T$. Кривые 1'—5' — соответствующие графики для I_{ey} , причем для кривой 3' — $B = I_{ey}/I_{ey}^*$ используется шкала B .

Сравнение кривых 1'—3' (1—3) показывает, что вклад эффекта Соре в переносные свойства заряженных компонентов может быть ощутимым. Массовый поток электронов формируется в результате сложного взаимодействия основной концентрационной диффузии, различных перекрестных эффектов (таких, как термо- и бародиффузия) и внутреннего электрического поля, обеспечивающего амбиполярный характер процесса. Основные концентрационные потоки электронов I_{ey}^K и ионов I_{uy}^K направлены в холодную область течения к границе следа. Термодиффузионный поток $e^- I_{ey}^T$, который в силу малости массы m_e имеет для них достаточно большое значение, направлен по градиенту температуры в горячую приосевую область и тем самым уменьшает I_{ey}^K . Аналогичный поток для $NO^+ - I_{uy}^T$ направлен в приосевой области против, а в холодной приграничной области — по градиенту температуры и имеет точку инверсии. Он соответственно увеличивает или уменьшает основной концентрационный поток I_{uy}^K .

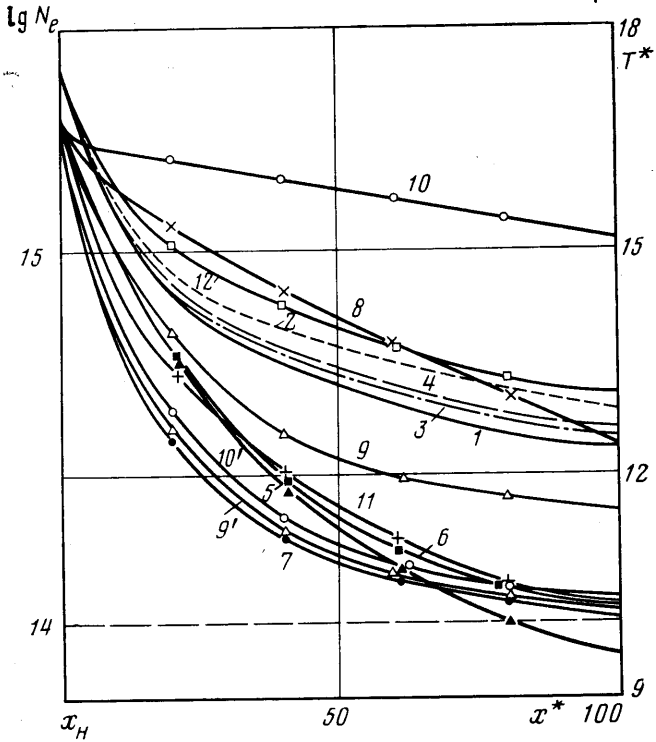
Предположение об амбиполярном характере диффузии приводит к появлению внутреннего электрического поля напряженностью E , обеспечивающего совместную диффузию NO^+ , e^- . Различный характер термодиффузии электронов и ионов NO^+ приводит к изменению E_y . В горячей приосевой области уменьшение I_{ey} и увеличение I_{uy} ведут к некоторому ослаблению индуцированного электрического поля. Суммарное воздействие этих эффектов сказывается на величине I_{ey} в пределах 30% (кривые 1'—3' на фиг. 1). Величина E_y изменяется в 3—4 раза (кривые 1—3 на фиг. 1). Совместное влияние указанных процессов приводит также к появлению точки инверсии для электронов, совпадающей с аналогичной точкой для NO^+ (точка i на фиг. 1), положение которой по мере увеличения влияния термодиффузии смещается в приосевую область. Точка инверсии имеет координату $y(i) \approx 0,98R$. Для сравнения укажем координату точки инверсии для молекул NO : $y(i) \approx 1,35R$.

Влияние эффекта Соре на диффузионные потоки тяжелых компонентов сказывается в пределах 4—6%, а эффекта Дюфура на тепловой поток тяжелых частиц — в пределах 1—2%.

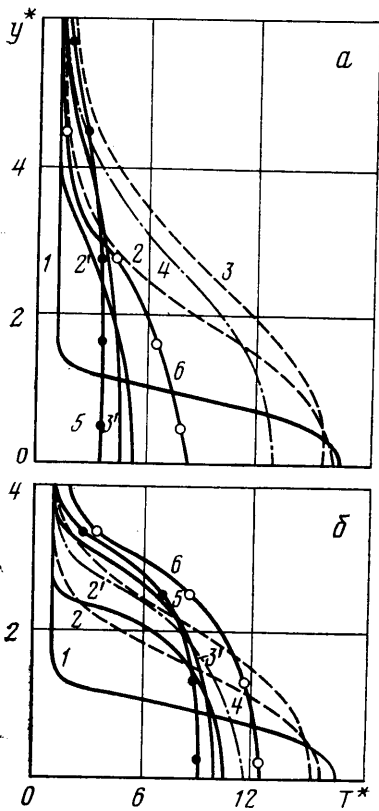
Анализ кривых 2', 4', 5' (2, 4, 5) показывает сильную зависимость диффузионных потоков электронов (а значит, и ионов NO^+) от температуры T_e . Чем меньше T_e (при неизменных остальных температурах), тем меньше потоки массы e^- и NO^+ к границе следа. Зависимость эта объясняется в основном явлениями, которые условно можно назвать двухтемпературной баро- и термодиффузией. Они описываются следующими чле-



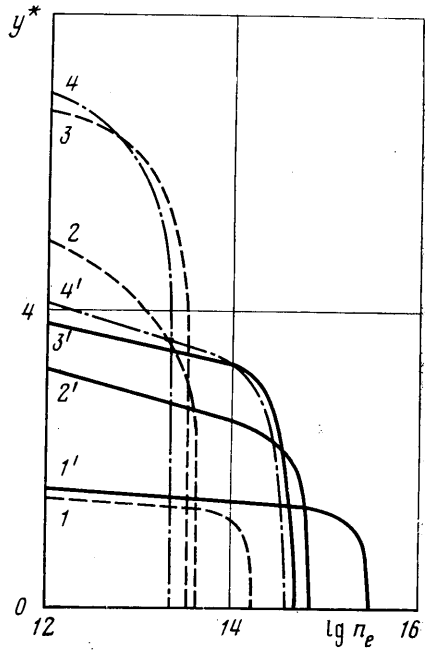
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

нами уравнений переноса:

$$S_p \sim \left(1 - \frac{T_e}{T}\right) \nabla \ln P_e, \quad S_T \sim \nabla \ln \left(\frac{T}{T_e}\right)$$

Для характерных условий дальнего следа, когда $\partial x_e / \partial y < 0$ и $\partial P_e / \partial y < 0$, диффузионный поток электронов к границе следа I_{ey} при условии $T_e > T$ увеличивается за счет S_{py} , а при условии $\partial(T_e T^{-1}) / \partial y < 0$ и за счет S_{Ty} . Иначе, поток I_{ey} увеличивается за счет концентрационной диффузии по закону Фика в $m = T_e / T$ раз и при $\partial(T_e T^{-1}) / \partial y < 0$ за счет двухтемпературной термодиффузии.

Окончательные величины диффузионных потоков заряженных частиц (e^- , NO^+), а также напряженность внутреннего электрического поля формируются в результате сложного взаимодействия всех видов диффузии (в том числе двухтемпературной) в сочетании с амбиполярной диффузией.

Отличие T_e от T влияет и на переносные свойства тяжелых частиц. Однако ввиду малой концентрации электронов в следе $C_e \ll 1$ влияние это ничтожно мало и составляет доли процента.

Результаты численных экспериментов приведены на фиг. 2–5. На фиг. 2 ($H = 80$ км) и фиг. 3 ($H = 60$ км) представлены осевые распределения температур T/T_∞ , T_e/T_∞ , T_{KO}/T_∞ , T_{KN}/T_∞ (шкала T^*), а также осевые распределения электронной концентрации n_e (част./м³) на участке в $100d$, начиная с x_H ($x^* = x/d$). Здесь кривые 1–4 – распределения n_e , вычисленные с использованием моделей течения *a–г*. Кривые 5–7 – температура T , определенная по моделям *a, б и г* соответственно; 8–10 – температуры T_e , T_{KO} , T_{KN} для модели *a*. Кроме того, на фиг. 2, 3 представлены распределения осевых значений температур T_{KO} , T_{KN} для модели *a* (кривые 9', 10'), вычисленные с учетом влияния вязкостных эффектов на протекание колебательной релаксации. При этом правые части уравнений для энергии колебательных степе-

ней свободы E_{ki} дополнялись потоковыми членами вида

$$A_i = -\frac{1}{\rho} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{ki} \frac{\partial T_{ki}}{\partial y} \right) + \frac{\lambda_{ki}}{y} \frac{\partial T_{ki}}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_i I_{iy}}{C_i} \right) + \frac{1}{y} \frac{E_i I_{iy}}{C_i} \right] \right\} \quad (i=O_2, N_2)$$

Для сравнения на фиг. 3 приведены результаты расчетов [3], выполненных для случая полета на высоте $H=60$ км: распределения T и n_e (кривые 11, 12).

На фиг. 4, а для $H=80$ км и фиг. 4, б для $H=60$ км представлены профили температур T/T_∞ , T_e/T_∞ , T_{ko}/T_∞ , T_{kn}/T_∞ (шкала T^*) в различных сечениях следа, вычисленные с использованием модели течения a (за исключением оговоренных особо). Здесь 1 — исходный профиль всех температур в сечении $x=x_H$; 2, 3 — T_{kn} в сечениях, отстоящих от x_H на расстояниях $50d$ и $100d$ соответственно; 4–6 — T_{ko} , T , T_e для $x=100d$; 2', 3' — T в сечениях $x=50d$ и $100d$, рассчитанные по модели z (приведенные профили T_{ko} , T_{kn} рассчитаны без учета влияния вязкости на протекание колебательной релаксации).

На фиг. 5 представлены профили концентраций электронов n_e (част./м³): кривые 1–4 и 1'–4' — расчеты для вариантов $H=80$ и 60 км соответственно. Здесь кривые 1, 1' — исходные профили n_e в сечении $x=x_H$; 2, 2' и 3, 3' — n_e в сечениях $x=50d$ и $100d$ от x_H соответственно, определенные по модели z ; 4, 4' — n_e для сечения $x=100d$ от x_H , рассчитанные по модели a .

Сильная разреженность невозмущенного потока при $H=80$ км приводит к тому, что течение, характеризующееся малыми числами Дамкелера и Рейнольдса, является химически замороженным, а основные его параметры, в том числе температура T и электронная концентрация n_e , определяются конвективными и вязкостными процессами. Поэтому след на $H=80$ км наиболее наглядно иллюстрирует особенности той или иной модели переносных свойств.

Оба рассмотренных случая ($H=60$ и 80 км) характеризуются сильной неравномерностью не только в химическом, но и в термодинамическом отношениях. Оценки [16, 20] показывают, что при $T \leq 2000 \div 3000$ К и $n_e/n_h \leq 10^{-5}$ VV-обмен для молекул азота N_2 протекает быстрее, например, VT- и EV-процессов и слабо зависит при этом от температуры. Однако скорость протекания VT-обмена сильно зависит от T и становится соизмеримой со скоростью VV-обмена только при $T \geq 4000$ К. Аналогичные оценки можно привести для молекул O_2 . Поэтому быстрое уменьшение температуры T приводит к существенному увеличению времен колебательной релаксации молекул O_2 , N_2 и резкому снижению скорости падения температур T_{kn} , T_{ko} , наглядно проявляющегося для варианта с $H=80$ км. Однако как видно из фиг. 2, 3, сильное влияние вязкостных эффектов (тепловых потоков колебательной энергии) ведет к существенному сближению температур T_{kn} и T_{ko} с T . Малая масса электрона $m_e \ll m_h$ в сочетании с разреженностью среды приводят к затруднению энергообмена между системами «электроны» и «тяжелые частицы». Следствием этого является отличие температуры T_e от T , менее заметное из-за сильного влияния вязкостных свойств течения (потоков тепла) в случае варианта с $H=80$ км.

Большая плотность течения при $H=60$ км ведет к существенному влиянию химической кинетики и, как следствие этого, к более быстрому падению концентрации электронов n_e по сравнению с замороженным потоком в варианте $H=80$ км.

Анализ данных фиг. 2–5 показывает, что модель a (учет переносных свойств воздушной газовой смеси в третьем приближении теории Чепмена — Энскога) приводит к изменению величины T и n_e примерно на 50% в случае $H=80$ км и на 15% при $H=60$ км по сравнению с их значениями при использовании модели z , которая предусматривает упрощенный расчет соответствующих потоков.

Модель термодинамического равновесия b вносит отличия от основной модели a , не превышающие 40% для T , 30% для n_e в случае $H=80$ км и 10% для T , 30% для n_e при $H=60$ км. Оценивая эти результаты, необходимо иметь в виду, что отличие температуры T_e от остальных сказывается

на величине электронной концентрации двумя путями. С одной стороны, оно влияет на переносные свойства низкотемпературной плазмы следа, что наиболее существенно для варианта с $H=80$ км, характеризующегося малыми числами Re , с другой — температура T_e влияет на протекание химических реакций с участием электронов, константы скорости которых считаются зависящими не от T , а, как показано в [21], от T_e . Это наиболее существенно для условий более плотной среды ($H=60$ км).

Сравнение результатов, полученных при использовании моделей b и v , показывает, что влияние эффекта *Соре* приводит к некоторому (не более чем на 20%) уменьшению электронной концентрации. Влияние эффекта Дюфура на параметры дальнего следа незначительно.

Необходимо отметить, что результаты численных экспериментов для моделей v и d практически (с точностью 3—5%) совпадают друг с другом.

Полученные результаты дают возможность оценить влияние выбора той или иной модели переносных свойств воздушной газовой смеси, термодинамической неравновесности, эффектов *Соре*, Дюфура и др. на параметры плазмы дальнего гиперзвукового следа. При этом можно сделать следующие выводы.

В дальнем следе возможна не только химическая, но и термодинамическая неравновесность течения, наиболее существенно проявляющаяся при гиперзвуковых полетах в условиях разреженной среды при $H > 60$ км. Важная сама по себе для целого ряда прикладных задач, она к тому же влияет и на некоторые параметры потока.

При полетах, характеризующихся малыми числами $Re_{\infty} = (\rho_{\infty} V_{\infty} r) / \mu_{\infty} < 500$ (вплоть до границы применимости гипотезы сплошности среды), существенным становится вычисление переносных свойств воздушной газовой смеси в этой области течения по точным зависимостям молекулярно-кинетической теории газов с учетом многотемпературности и некоторых перекрестных эффектов, особенно — в случае определения потоков заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неравновесная ионизация при движении гиперзвуковых аппаратов // Обзор ЦАГИ. 1977. № 527. 112 с.
2. Пилюгин Н. Н., Тихомиров С. Г., Черняевский С. Ю. Химическая кинетика в дальнем следе за телом, движущимся в воздухе с гиперзвуковой скоростью // Гиперзвуковые течения при обтекании тел и в следах. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 5—19.
3. Бикарт Э. М., Ладнова Л. А., Полянский А. Ф., Скурин Л. И., Юрков А. В. Влияние радиуса затупления конуса, движущегося в воздухе с гиперзвуковой скоростью, на ионизацию возмущенной им области. ПМТФ. 1981. № 4. С. 12—16.
4. Безменова А. Е., Алексашенко В. А. Радиофизические и газодинамические проблемы прохождения атмосферы. М.: Машиностроение, 1982. 192 с.
5. Зейберг С. Л., Блейх Г. Д. Расчет гиперзвукового следа методом конечных разностей // Ракетн. техника и космонавтика. 1964. № 8. С. 46—55.
6. Колесников А. Ф., Турский Г. А. Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях // Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982. С. 20—44.
7. Devoto R. S. Transport properties of ionized monatomic gases // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 6. P. 1230—1240.
8. Li C. P., Devoto R. S. Fifth and sixth approximation to the electron transport coefficients // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 2. P. 448—450.
9. Колесников А. Ф. Уравнения переноса для высокотемпературных ионизованных смесей газов в электромагнитных полях // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1975. № 39. С. 39—51.
10. Соколова И. А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонент // Аэрофизические исследования. Физическая кинетика. Сб. науч. тр. Новосибирск: Наука, 1974. Вып. 4. С. 39—104.
11. Друкарев Г. Ф. Столкновения электронов с атомами и молекулами. М.: Наука, 1978. 255 с.
12. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969. 396 с.

13. *Гиришфельдер Дж., Кергис Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
14. *Ферцигер Дж., Канер Г.* Математическая теория процесса переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
15. *Арефьев К. М.* Явления переноса в газе и плазме. Л.: Энергоатомиздат, 1983. 411 с.
16. *Millikan R. S., White D. R.* Systematics of vibrational relaxation // J. Chem. Phys. 1963. V. 39. № 12. P. 3209–3213.
17. *Wilke C. R.* A viscosity equation for gas mixtures // J. Chem. Phys. 1950. V. 18. № 4. P. 517–519.
18. *Mason E. A., Saxena S. C.* Approximation formula for the thermal conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids. 1958. V. 1. № 5. P. 364–369.
19. *Buddenberg I. W., Wilke C. R.* Calculation of Gas Mixtures Viscosities // Ind. Eng. Chem. 1949. V. 41. № 7. P. 1345–1351.
20. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
21. *Дан М., Лорди Д.* Измерение температуры и концентрации электронов в ударной трубе. Ч. 2 // Ракетн. техника и космонавтика. 1969. № 11. С. 65–72.
22. *Кинетические процессы в газах и плазме/Под ред. Хохшпита А. М.*: Атомиздат, 1972. 368 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
5.VIII.1986