

УДК 532.516:533.6.011.5

О СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА НАД ВОЛНИСТОЙ  
ПОВЕРХНОСТЬЮ

ДЕМЕХИН Е. А., ШКАДОВ В. Я.

Задача о стационарном обтекании сжимаемым газом волнистой жесткой стенки имеет значение для изучения влияния неоднородностей на отрыв пограничного слоя, аэродинамический нагрев поверхности обтекаемого тела, распределения на ней напряжений со стороны газового потока. Решение этой задачи может быть использовано для исследования гидродинамической неустойчивости защитного жидкого слоя при его инжектировании в качестве охладителя в условиях аэродинамического нагрева. При падении метеоритов на их поверхности образуется жидкий расплав, который может иметь волновую структуру. В формировании этой структуры участвует обтекающий ее поток сжимаемого газа.

Впервые задача об обтекании жесткой слабоволнистой поверхности потоком сжимаемого газа была поставлена в [1, 2], где рассмотрен случай невязкого газа. В [3-7] был проведен асимптотический анализ некоторых предельных случаев течения вязкого газа. Обтекание волн с конечной амплитудой исследовалось только при условии несжимаемости газа [8-10].

В данной работе получены точные численные решения задачи для сжимаемого вязкого теплопроводного газового потока над слабоволнистой поверхностью. Проведено подробное изучение влияния параметров набегающего потока на напряжения, температурные поля и теплотокки на волнистой границе раздела.

1. Рассмотрим обтекание жесткой волнистой поверхности некоторого тела потоком сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Стационарное двумерное течение описывается системой уравнений [11]

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ \rho \frac{DT}{Dt} - (\kappa - 1) M_\infty^2 \frac{Dp}{Dt} &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left\{ \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\kappa - 1) M_\infty^2 \mu \Phi \right\} \\ \text{div}(\rho u) &= 0, \quad \kappa M_\infty^2 p = \rho T, \quad \mu = T^n, \quad \frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \\ \Phi &= 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad \text{Re}_\infty = \frac{U_\infty L}{\nu_\infty} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Величины сделаны безразмерными отнесением к характерным масштабам набегающего потока: плотности  $\rho_\infty$ , скорости  $U_\infty$ , температуре  $T_\infty$ , некоторой пока произвольной длине  $L$ . Вязкость отнесена к  $\mu_\infty$ . Принималась степенная зависимость вязкости от температуры.

На твердой волнистой поверхности раздела  $y=h(x)$  должны выполняться два граничных условия для скоростей и одно для температуры

$$y=h(x): u=v=0, \quad (1-\beta)(T-T_w) + \beta \left( \frac{\partial T}{\partial n} - q_w \right) = 0 \quad (1.2)$$

При  $\beta=0$  на стенке задается температура  $T=T_w$ , при  $\beta=1$  тепловой поток  $\partial T/\partial n=q_w$ .

На бесконечном удалении от тела параметры потока стремятся к соответствующим невозмущенным значениям

$$y=\infty: u=1, v=0, \kappa M_\infty^2 p=1, T=1$$

Рассмотрим обтекание пластины при  $h(x)=0$ . В приближении пограничного слоя при постоянной температуре  $T_w$  на стенке ( $\beta=0$ ) или условии теплоизоляции  $q_w=0$  ( $\beta=1$ ) задача для пластины допускает автомодельное решение и преобразование Лиза — Дородницына приводит после соответствующих алгебраических выкладок к краевой задаче для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [11]

$$\begin{aligned} 2(T^{n-1}\varphi'')'+\varphi\varphi'' &= 0 \\ 2(T^{n-1}T')'+2\text{Pr}(\kappa-1)M_\infty^2T^{n-1}\varphi''^2+\text{Pr}\varphi T' &= 0 \end{aligned}$$

$$\xi=x, \quad \eta = \int_0^y \rho dy, \quad \zeta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi}}, \quad T(x, y)=T(\zeta), \quad U(x, y)=\varphi'(\zeta)$$

$$\zeta=0: \varphi=\varphi'=0, T=T_w \text{ или } T'=0, \quad \zeta=\infty: \varphi'=1, T=1 \quad (1.3)$$

Штрих означает производную по  $\zeta$ . Выберем характерную длину  $L=\sqrt{xv_\infty/U_\infty}$ . Задача для невозмущенного потока на пластине полностью поставлена. В случае невыполнения условия  $\beta=0$  или  $\beta=1$ ,  $q_w=0$  требуется численное интегрирование уравнений пограничного слоя.

Особенно важен для практики случай турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа на пластине. Осредненные по турбулентным пульсациям профиль скоростей и профиль температур в этом случае можно принять изменяющимися по закону [12]

$$\frac{d^2U}{dy^2} = -\frac{k\sqrt{T_w}}{A} \left(\frac{dU}{dy}\right)^2$$

$$\begin{aligned} A &= U_*\sqrt{T_w - (T_w - T_i)U + (1 - T_i)U^2}, \\ T &= 1 + (T_i - 1)(1 - U^2) + (T_w - T_i)(1 - U) \\ T_i &= 1 + 0,5(\kappa - 1)M_\infty^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $k \approx 0,4$  — постоянная Кармана,  $U_*$  — динамическая скорость; в качестве масштабов расстояния, скорости, плотности, температуры для турбулентного течения принимались соответственно динамическая длина,  $U_\infty, \rho_\infty, T_\infty$ .

Можно задавать также  $U(x, y)$ ,  $T(x, y)$  и непосредственно из экспериментов. Для возмущений принимается квазиламинарная модель [7] — не учитывается связь между турбулентными пульсациями и возмущением, идущим от волнистой стенки. Тогда турбулентный поток формирует возмущения напряжений только через профили  $U(x, y)$  и  $T(x, y)$ .

Пусть для невозмущенного течения определены  $U(x, y)$ ,  $T(x, y)$ . Рассмотрим реакцию, вызванную малым возмущением жесткой стенки. Длина возмущения принимается малой по сравнению с характерным продольным размером  $L\sqrt{\text{Re}_\infty}$ , что позволяет считать поток локально плоскопараллельным. В силу малости возмущения без потери общности можно ограничиться рассмотрением элементарных синусоидальных возмущений

$$\begin{aligned} h &\rightarrow \varepsilon E, u \rightarrow U(y) + \varepsilon u E, T \rightarrow T(y) + \varepsilon \theta E, v \rightarrow \varepsilon v E \\ p &\rightarrow \kappa^{-1} M_\infty^{-2} + \varepsilon p E, \mu \rightarrow \mu_0 + \varepsilon \mu E, \rho \rightarrow \rho_0 + \varepsilon \rho E, E = \exp(i\alpha x) \end{aligned} \quad (1.5)$$

После подстановки (1.5) в (1.1) и линеаризации получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0(i\alpha Uu + U'v) + i\alpha p &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left\{ \frac{d}{dy} [\mu_0(u' + i\alpha v) + \mu U'] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_0 \left( -\frac{2}{3} i\alpha v' - \frac{4}{3} \alpha^2 u \right) \right\} \\ i\alpha \rho_0 Uv + p' &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left\{ \frac{d}{dy} \left[ \mu_0 \left( \frac{4}{3} v' - \frac{2}{3} i\alpha u \right) \right] + i\alpha [\mu U' + \mu_0(u' + i\alpha v)] \right\} \\ i\alpha(\rho_0 u + U\rho) + \frac{d}{dy}(\rho_0 v) &= 0 \\ \rho_0(i\alpha U\theta + T'v) - i\alpha(\kappa - 1)M_\infty^2 U\rho &= \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left\{ \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{d}{dy} (\mu_0 \theta' + \mu T') - \alpha^2 \mu_0 \theta \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\kappa - 1)M_\infty^2 U' [2\mu_0(u' + i\alpha v) + U'\mu] \right\} \\ \kappa M_\infty^2 p &= \rho_0 \theta + T\rho, \quad \mu = nT^{n-1}\theta, \quad \rho_0 T = 1, \quad \mu_0 = T^n \\ y=0: v=0, v' &= i\alpha U', \quad \theta + T' = 0, \quad \text{или } \theta' + T'' = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

В силу предположения о локальной параллельности потока  $U=U(y)$ ,  $T=T(y)$ . Система (1.6) состоит из связанных уравнений: четвертого порядка относительно  $v$  и второго относительно  $\theta$  с двумя крайевыми условиями по  $v$  и одним по  $\theta$  при  $y=0$ . Таким образом, на бесконечности крайевая задача должна быть дополнена тремя условиями

$$y \rightarrow +\infty: U \rightarrow 1, T \rightarrow 1, p \rightarrow \kappa^{-1} M_\infty^{-2}$$

Система (1.6) переходит в систему с постоянными коэффициентами, имеющую шесть линейно независимых решений вида  $\exp(\gamma y)$ , из которых три затухают при  $y \rightarrow +\infty$ . Величины  $\gamma_k$  в общем случае определяются численно, но при  $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое приближение

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}^2 &= -\alpha^2 (M_\infty^2 - 1) + i\alpha^3 M_\infty^4 \left( \frac{4}{3} + \frac{\kappa - 1}{\text{Pr}} \right) \text{Re}_\infty^{-1} + \dots \\ \gamma_{3,4}^2 &= i\alpha \text{Re}_\infty + \dots, \quad \gamma_{5,6}^2 = i\alpha \text{Pr} \text{Re}_\infty + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Итак,  $v$  и  $\theta$  представляются линейной комбинацией трех затухающих при  $y \rightarrow +\infty$  решений с неизвестными постоянными коэффициентами. После исключения этих коэффициентов получаем три линейные дифференциальные связи между  $v, v', v'', v''', \theta, \theta'$ :

$$\sum_{j=0}^3 a_{ij} v^{(j)} + a_{i4} \theta + a_{i5} \theta' = 0, \quad i=1, 2, 3 \quad (1.8)$$

Здесь  $v^{(n)}$  означает  $n$ -ю производную, вид постоянных коэффициентов  $a_{ij}$  не приводится из-за их громоздкости. Связи (1.8) справедливы при  $y \rightarrow \infty$ . При численном интегрировании бесконечный интервал необходимо заменять на достаточно большой, но конечный.

Проанализируем (1.7) для сверх-, до- и трансзвукового случаев. В пределе  $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$  для  $M_\infty > 1$  величины  $\gamma_{1,2}$  чисто мнимые,  $\gamma_{1,2} = \pm i\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ . Знак плюс соответствует волнам, распространяющимся из бесконечности к волнистой стенке; знак минус — волнам, идущим от границы раздела в бесконечность. Для больших, но конечных  $\text{Re}_\infty$  из (1.7) следует, что  $\gamma_{1,2}$

приобретают малую действительную добавку

$$\gamma_{1,2} = \pm i \sqrt{M_\infty^2 - 1} \pm 0,5 \alpha^2 \frac{M_\infty^4}{\text{Re}_\infty} \left( \frac{4}{3} + \frac{\kappa - 1}{\text{Pr}} \right) \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \dots$$

Для затухания решения при  $y \rightarrow \infty$  необходимо брать знак минус, т. е. брать волны, идущие от границы раздела в бесконечность.

При  $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$ ,  $M_\infty < 1$  величины  $\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{1 - M_\infty^2}$  и проблемы с выбором затухающего решения не возникает.

При больших, но конечных  $\text{Re}_\infty$  и  $M_\infty = 1$  имеем

$$\gamma_{1,2} = \pm 0,5 \sqrt{2} (1+i) \alpha^{3/2} \left( \frac{4}{3} + \frac{\kappa - 1}{\text{Pr}} \right)^{1/2} \text{Re}_\infty^{-1/2} + \dots$$

Таким образом, введение вязкости снимает особенность, имеющую место при трансзвуковом переходе для невязкого безвихревого основного течения.

Для нахождения конкретных решений требуется выбрать случай ламинарного или турбулентного потока, параметры, характеризующие физические свойства газа  $\kappa$ ,  $\text{Pr}$ , параметры набегающего потока  $M_\infty$ ,  $\text{Re}_\infty$  и условия теплообмена на стенке. После этого можно решать краевую задачу (1.3), определяющую невозмущенное течение, и, определив  $U(y)$ ,  $T(y)$ , решать задачу для возмущений (1.6).

2. Расчеты проводились для обтекания пластины ламинарными и турбулентными потоками газа, принималось  $\kappa = 1,4$ ,  $\text{Pr} = 0,7$ .

Для невозмущенного ламинарного потока система (1.3) сводится к задаче Коши для различных  $M_\infty$  и  $T_w$ . Для турбулентного потока профили скоростей и температур находились из (1.4). Вводилась толщина пограничного слоя  $\delta$ , для определения которой принималось  $1 - U(\delta) = 10^{-3}$ .

Задача для возмущений (1.6) описывается четырьмя параметрами:  $M_\infty$ ,  $\text{Re}_\infty$ ,  $T_w$ ,  $\alpha$ . Ее решение наталкивается на серьезные сложности, так как система имеет малый параметр  $1/\text{Re}_\infty$  при старшей производной.

В [3-6] применялся асимптотический метод решения задачи: внешнее решение сводилось на основе модели невязкого газа к уравнению Лайтхилла, решавшемуся численно. В области вблизи стенки  $y=0$  уравнения с учетом вязкости и теплопроводности сводились к уравнению Эйри, разрешавшемуся аналитически. Полное решение находилось сравнением внешнего и внутреннего решений. Метод имеет ряд принципиальных недостатков. Например, чтобы получить уравнение Эйри, необходимо пренебречь нагревом вследствие вязкой диссипации в основном и в возмущенном течениях и влиянием сжимаемости во всей внутренней области. Кроме того, внешнее решение имеет особенность при  $y=0$  и поэтому появляются трудности при сращивании разложений. В [3-6] это сращивание проводится по-разному, что приводит к различающимся результатам. Поэтому для решения системы (1.6) применялся численный метод. Наиболее удобным оказалось использование метода дифференциальной прогонки [13]. Это позволило проводить расчеты в широком диапазоне параметров течения. При прямой прогонке краевые условия (1.8) перегонялись в точку  $y=0$ . После решения соответствующей алгебраической системы функции возмущений находились обратной прогонкой.

Конечный результат расчетов — амплитуда давления  $p_w$ , касательного напряжения  $\tau_w$  и температуры  $\theta_w$  на стенке

$$p_w = \frac{1}{i \alpha \text{Re}_\infty} (T'u' + Tu'' + U'\theta' + U''\theta)_w, \quad \tau_w = \frac{T_w}{\text{Re}_\infty} (U'' + u')_w$$

Здесь значения функций в правой части берутся при  $y=0$ ,  $\theta_w$  находится непосредственно в ходе решения (1.6), (1.8).

Для тестирования программы рассматривался случай  $M_\infty = 0$ ,  $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$ . В пределе длинных по сравнению с толщиной пограничного слоя волн  $\alpha \delta \rightarrow 0$  получены асимптотические выражения для давления и касательного напряжения [7]

$$\frac{p_w}{\alpha} = -1 + 1,288 \left( \frac{\alpha^4 \text{Re}_\infty}{G^5} \right)^{1/2} e^{i\pi/6}, \quad \frac{\tau_w}{\alpha} = 1,372 \left( \frac{\alpha^2}{\text{Re}_\infty G} \right)^{1/2} e^{i\pi/6} \quad (2.1)$$

Здесь  $G = dU_w/dy$ . Если считать, что в пределе коротких волн  $\alpha \delta \rightarrow \infty$  основную роль в формировании напряжений играет пристеночная линейная часть профиля [14]

$U \approx Gy + \dots$ , то выражения для  $p_w, \tau_w$  примут вид [7]:

$$\frac{p_w}{\alpha} = -0,776 \left( \frac{G^5}{\alpha^4 \text{Re}_\infty} \right)^{1/6} e^{-i\pi/6}, \quad \frac{\tau_w}{\alpha} = 1,065 \left( \frac{G^2}{\alpha \text{Re}_\infty} \right)^{1/3} e^{i\pi/6} \quad (2.2)$$

Тестовые численные значения  $p_w, \tau_w$  были получены для  $M_\infty=0,01, \text{Re}_\infty=1000$ , пластина теплоизолирована; при этом  $G=0,3321$ . Результаты сравнения приведены в таблице.

Верхняя пара значений  $p_w, \tau_w$  получена численно, нижняя — аналитически. Для первых двух значений  $\alpha\delta$  использовались асимптотические выражения (2.1), для следующих трех значений — (2.2). Сравнение показало согласование результатов. Это, с одной стороны, являлось проверкой алгоритма, с другой стороны, расчеты подтвердили вывод [14], что влияние волнистости стенки распространяется на расстояние порядка нескольких длин волн.

$\alpha\delta$	$\alpha$	$p_w/\alpha \cdot 10^3$	$\tau_w/\alpha \cdot 10^3$
0,01	$1,723 \cdot 10^{-3}$	$-986,6+8,287i$ $-985,5+8,353i$	$1,483+2,538i$ $1,424+2,466i$
0,1	0,01723	$-783,4+113,2i$ $-688,3+179,9i$	$6,485+8,233i$ $6,608+11,45i$
3	0,5169	$-27,46+17,03i$ $-25,80+14,89i$	$3,582+1,921i$ $3,293+1,901i$
5	0,8615	$-13,91+9,028i$ $-13,06+7,538i$	$2,637+1,345i$ $2,343+1,353i$
10	1,723	$-5,607+3,933i$ $-5,182+2,992i$	$1,771+0,824i$ $1,476+0,852i$

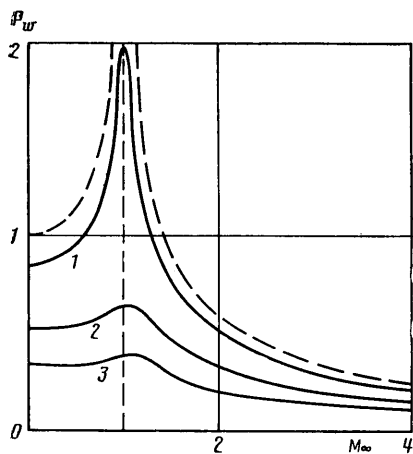
Рассмотрим некоторые результаты расчета на примере теплоизолированной пластины,  $\text{Re}_\infty=400$ . Параметрами задачи будут  $\alpha$  и  $M_\infty$ . Для безвихревого потока идеального газа

$$\frac{p_w}{\alpha} = \frac{i}{\sqrt{M_\infty^2-1}} (M_\infty > 1), \quad \frac{p_w}{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} (M_\infty < 1)$$

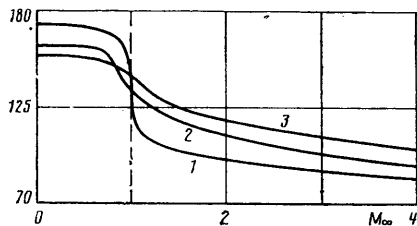
$$\tau_w=0, \quad \theta_w=(\kappa-1)M_\infty^2 T_w p_w \quad (2.3)$$

На фиг. 1 и 2 приведены зависимости  $P_w=|p_w|/\alpha$  и  $\arg p_w$  (в градусах) от  $M_\infty, \alpha\delta=0,1; 0,3; 0,5$  (кривые 1—3). Штриховая кривая — расчет по формулам (2.3). Модуль давления имеет максимум вблизи  $M_\infty=1$ , несколько смещенный в сторону больших чисел Маха.

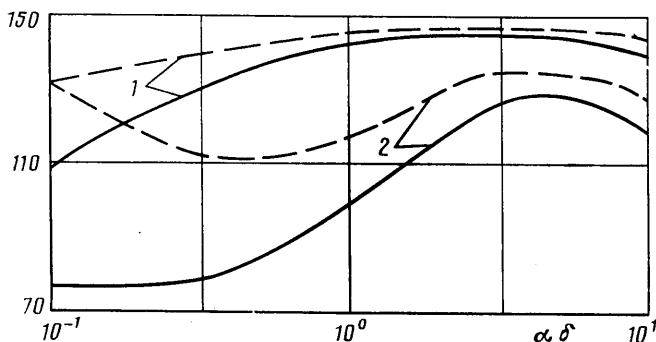
При  $\alpha\delta \rightarrow 0$  модуль давления стремится к значению, определяемому формулами (2.3) для невязкого безвихревого потока. Возмущение давления создается той частью потока, в которую проникает влияние волнистой стенки, т. е. область величиной в несколько длин волн. При увеличении  $\alpha\delta$  возрастает отличие от случая идеального газа. При  $\alpha\delta \rightarrow \infty$  в формировании возмущения давления участвует только малый участок профиля скоростей вблизи  $y=0, U \approx Gy + \dots$ . Влияние остальной зоны потока асимптотически стремится к нулю. При достаточно больших  $\alpha\delta$  указанный участок профиля скоростей является дозвуковым. Поэтому, с одной стороны, возмущение давления стремится к нулю, а с другой — короткие волны качественно дают ту же реакцию газа, что и для дозвукового потока. Сдвиг давления по фазе относительно волновой поверхности равен  $180^\circ$  для идеального газа при  $M_\infty < 1$  и  $90^\circ$  при  $M_\infty > 1$ . Для реального сжимаемого газа  $\arg p_w$  вблизи  $M_\infty=1$  претерпевает изменения, тем более резкие, чем меньше  $\alpha\delta$ . При больших значениях  $\alpha\delta$  разница между дозвуковым внешним потоком и сверхзвуковым сглаживается.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для безвихревого потока идеального газа возмущение температуры связано с возмущением давления соотношением (2.3), сдвиг фазы давления равен сдвигу фазы температуры. На фиг. 3 даны типичные зависимости для реального сжимаемого газа  $\arg p_w$  (сплошная линия) и  $\arg \theta_w$  (штриховая линия) от  $\alpha \delta$  для  $M_\infty = 1,05; 5$  (кривые 1, 2). При больших волновых числах значения  $\arg p_w$  и  $\arg \theta_w$  близки. При  $\alpha \delta = 10$   $\arg \theta_w - \arg p_w < 10^\circ$ .

Несколько неожиданным оказывается то, что при  $\alpha \delta \rightarrow 0$  разница между обоими сдвигами увеличивалась, а не уменьшалась в соответствии с (2.3), приближаясь к идеальному случаю. Объяснение этому факту следует искать в образовании вблизи стенки вязкого подслоя толщиной порядка  $(\alpha \text{Re}_\infty)^{-1/2}$ . При  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\text{Re}_\infty = \text{const}$ , с одной стороны, увеличивается влияние внешнего невязкого потока на формирование  $p_w$  и  $\theta_w$ , с другой стороны, вязкий подслой расширяется пропорционально  $\alpha^{-1/2}$  и увеличивается влияние вязкости, в частности, на сдвиг фаз. Если в расчетах фиксировать  $\alpha \text{Re}_\infty$  и уменьшать волновое число, то  $|\arg p_w - \arg \theta_w|$  уменьшается.

Представляет определенный практический интерес реакция потока газа на локализованное возмущение. Возьмем возмущение вида

$$y = \epsilon h(x) = \epsilon \exp(-a^2 x^2) = \epsilon \exp(-z^2), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

где  $a^{-1}$  играет роль характерной ширины возмущения. Представим возмущение в виде интеграла Фурье

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad A(-\alpha) = A^*(\alpha)$$

тогда распределение давления на слабозмущенной жесткой стенке является суперпозицией реакций на элементарные синусоидальные возмущения с волновым числом  $\alpha$  и амплитудой  $A(\alpha) d\alpha$

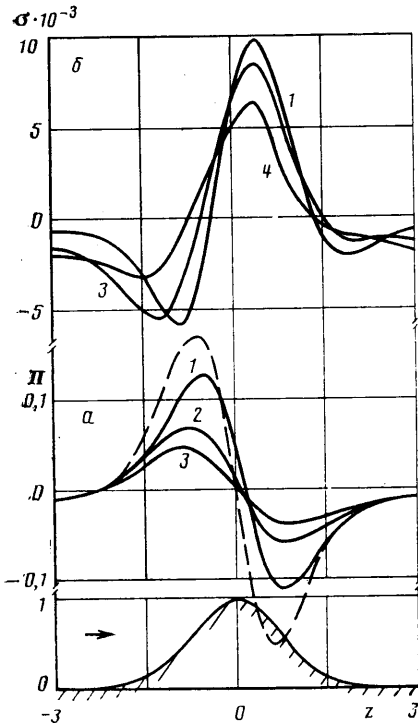
$$\Pi = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} p_w(\alpha) A(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

В качестве независимой переменной вместо  $x$  удобнее брать  $z=ax$ . Аналогичные выражения имеют место для распределения касательных напряжений  $\sigma(z)$  и температур  $\Theta(z)$ . Для однородного потока идеального газа

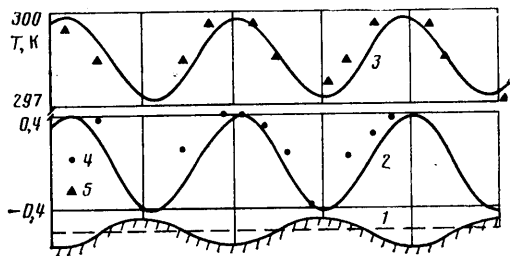
$$\Pi(z) = -\frac{2z}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \exp(-z^2)$$

$$\Theta(z) = -\frac{2(\kappa - 1)M_\infty^2 [1 + 0,5(\kappa - 1)\sqrt{\text{Pr} M_\infty^2}]}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} z \cdot \exp(-z^2)$$

На фиг. 4, а, б показаны распределения  $\Pi(z)$  и  $\sigma(z)$  для  $M_\infty=5$ ,  $\text{Re}_\infty=400$  для  $a=0,1; 0,3; 0,5; 1,0$  (кривые 1-4). Штриховая линия — расчет по формулам (2.4). Давление при малых  $a$ , когда



Фиг. 4



Фиг. 5

длина возмущения больше толщины пограничного слоя, ведет себя, как в случае однородного потока идеального газа. При увеличении  $a$  амплитуда  $\Pi(z)$  резко падает, так как теперь основную часть давления формирует неоднородная часть профиля  $U(y) < 1$ . Так как основная часть потока, формирующего давление, остается сверхзвуковой, то  $\Pi(z)$  меняется примерно как  $\text{const } h'(z)$ . При дальнейшем увеличении  $a$  наступает момент, когда возмущение становится настолько коротковолновым, что влияние неоднородности проникает только в дозвуковую область потока. На фоне общего уменьшения  $\Pi(z)$  происходит относительное увеличение минимума функции, его смещение к точке максимума функции  $h(z)$ . Максимум в распределении давления сглаживается и исчезает. При больших  $a$   $\Pi(z)$  по форме представляет впадину, расположенную на подветренном участке профиля  $h(z)$  (на фиг. 4 не показано, так как амплитуда таких возмущений крайне мала).

На переднем фронте и достаточно далеко от максимума  $h(z)$  на заднем фронте касательные напряжения направлены против потока. В окрестности максимума касательные напряжения положительны и действуют вдоль потока, как и результирующая сила.

Профиль температуры примерно повторяет профиль давления, однако имеется некоторый их сдвиг — профиль температуры опережает давление. Передний фронт  $h(z)$  будет нагреваться, а задний — охлаждаться по сравнению с невозмущенной температурой.

Рассмотрим сравнение вычисленных и экспериментальных значений возмущения давления и температуры на волнистой жесткой стенке. Экспериментальные данные имеются только для турбулентного газового потока [4]: волнистая стенка теплоизолирована; задан экспериментальный профиль скоростей  $U(y)$ , число Рейнольдса, основанное на толщине пограничного слоя  $Re_\delta = \delta U_\infty / \nu_\infty = 0,98 \cdot 10^6$ ;  $\alpha\delta = 4,848$ ;  $M_\infty = 1,39$ ; амплитуда возмущения поверхности, отнесенная к толщине пограничного слоя, равна 0,0388; длина волны равна  $2,54 \cdot 10^{-2}$  м; температура торможения 289,6 К. В данном расчете при интегрировании (1.6), (1.8) профиль скоростей  $U(y)$  задавался по экспериментальным точкам, профиль температур вычислялся по (1.4).

Сравнение теории и эксперимента проведено на фиг. 5: 1 — профиль поверхности, 2 — давление  $p_w/\alpha$  (теория); 3 — размерная температура (теория); 4, 5 — экспериментальные значения давления и температуры. Длина волны составляет 1,3 от толщины пограничного слоя, т. е. значительная часть потока, формирующего реакцию на стенке, — дозвуковая. Хотя теоретический сдвиг фаз давления и температуры несколько меньше экспериментального, а теоретическая амплитуда температуры несколько занижена, в целом соответствие теории и эксперимента можно признать удовлетворительным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Reflection at a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting velocity and heat conduction // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 303–325.
2. Lighthill M. J. On boundary layers and upstream influence II. Supersonic flows without separation // Proc. Roy. Soc. 1953. V. 217. № 1131. P. 478–507.
3. Inger G. R. Compressible boundary layer flow past a swept wavy wall with heat transfer and ablation // Astr. Acta. 1971. V. 16. P. 325–338.
4. Inger G. R., Williams E. P. Subsonic and supersonic boundary-layer flow past a wavy wall // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 5. P. 636–642.
5. Bordner G. L., Nayfeh A. H., Saric W. S. Stability of liquid films adjacent to compressible streams // ZAMP. 1975. V. 26. P. 771–888.
6. Stock H. W. Das Druckstörugsfeld im Überschall längs einer schwach welligen Wand unter Berücksichtigung der Grenzschicht // ZAMM. 1977. V. 57. № 8. S. 471–476.
7. Benjamin T. B. Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 2. P. 161–205.
8. Markatos N. C. G. Heat, mass and momentum transfer across a wavy boundary // Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. 1978. V. 14. P. 323–376.
9. Bordner G. L. Nonlinear analysis of laminar boundary layer flow over a periodic wavy surface // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 9. P. 1471–1474.
10. Bordner G. L. Nonlinear analysis of laminar boundary layer flow over a periodic wavy surface. Pt II. Long waves // Phys. Fluids. 1980. V. 23. № 5. P. 858–863.
11. Шкадов В. Я., Запрынов З. Д. Течения вязкой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1984. 200 с.
12. Лойцянский Л. Г., Лапин Ю. В. Применение метода Кармана к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в газовом потоке // Тр. ЛПИ. 1961. № 217. С. 7–16.
13. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки // Тр. Всесоюз. семинара по числен. методам механики вязкой жидкости (II). Новосибирск: Наука, 1969. С. 212–219.
14. Чан Ван Чан, Шкадов В. Я. Неустойчивость слоя вязкой жидкости под воздействием граничного потока газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 28–36.