

УДК 532.546 : 519.63

О ПЕРЕХОДЕ К СТАЦИОНАРНЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ  
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

МИТЛИН В. С.

Для системы уравнений равновесной многокомпонентной двухфазной фильтрации [1, 2] рассмотрен вопрос о динамике прихода к стационарным решениям. Для случая малых флуктуаций уравнения анализируются в линейном приближении. Получено выражение для характерного времени перехода. При существенных отклонениях от стационарного решения проводится численное моделирование. Решается задача о плоском линейном вытеснении десятикомпонентной газоконденсатной смеси обогащенным газом с последующим переходом к режиму отбора. Показано, что изменение составов фаз и давления происходит с характерными временами порядка времени создания пространственно неоднородного распределения свойств смеси при закачке. Однако изменение насыщенностей и суммарного состава протекает за времена приблизительно в 200 раз большие, чем время закачки. Рассмотрен вопрос о наличии разрывных стационарных решений исследуемой системы уравнений: для случая бинарной смеси показано, что такие решения не могут реализоваться.

1. Система уравнений многокомпонентной равновесной изотермической фильтрации в пренебрежении капиллярными и гравитационными силами и молекулярной диффузией записывается в виде

$$\nabla(k\beta_i \nabla P) = \frac{\partial}{\partial t} (mN_i), \quad i=1, \dots, l \quad (1.1)$$

$$\beta_i = \frac{f_g \rho_g y_i}{\mu_g M_g} + \frac{f_w \rho_w x_i}{\mu_w M_w}, \quad N_i = \frac{S \rho_w x_i}{M_w} + \frac{(1-S) \rho_g y_i}{M_g} = Nz_i$$

$$N = \frac{S \rho_w}{M_w} + \frac{(1-S) \rho_g}{M_g}, \quad z_i = Vy_i + (1-V)x_i, \quad \frac{y_i}{x_i} = K_i$$

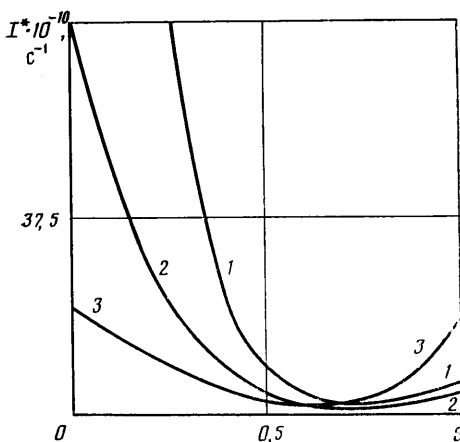
$$S = \frac{(1-V) \rho_g M_w}{(1-V) \rho_g M_w + V \rho_w M_g}, \quad \sum_{i=1}^l \frac{(K_i - 1) z_i}{1 + V(K_i - 1)} = 0$$

Здесь  $P$  — давление;  $\rho_{g,w}$ ,  $\mu_{g,w}$ ,  $f_{g,w}$ ,  $M_{g,w}$  — плотности, вязкости, относительные проницаемости и молекулярные веса газовой и жидкой фаз;  $K_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  — константа равновесия, мольные доли  $i$ -го компонента в жидкости, в газе и в смеси;  $k$ ,  $m$  — абсолютная проницаемость и пористость среды;  $S$  — насыщенность жидкостью;  $V$  — мольная доля газа.

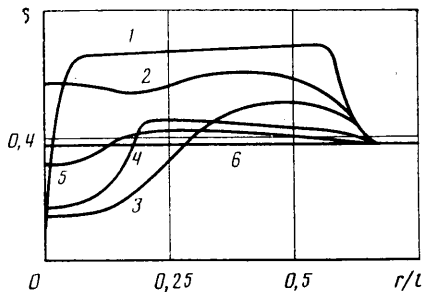
Вопрос о том, как происходит переход решения к стационарному при достаточной близости последнего к пространственно однородному и достаточно малых флуктуациях, решается путем анализа линеаризованной системы (1.1) относительно пространственно однородного решения ( $P = \text{const}$ ,  $z_i = \text{const}$ ). После преобразований получим

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = I \nabla^2 P', \quad \frac{\partial z_i'}{\partial t} = \frac{k}{mN} (\beta_i - z_i \beta) \nabla^2 P', \quad i=1, \dots, l-1 \quad (1.2)$$

$$I = \frac{k}{m} \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right)^{-1} \left[ \beta - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial z_i} (\beta_i - z_i \beta) \right], \quad \beta = \sum_{i=1}^l \beta_i \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $P'$ ,  $z_i'$  — флуктуации относительно пространственно однородного решения. Величина  $I$  — инкремент устойчивости пространственно однородного решения — введена в [3] в связи с проблемой автоколебаний в многокомпонентных фильтрационных потоках. Из (1.2) видно, что именно она определяет (при постоянных  $k, m$ ) эволюцию системы в линейном приближении.

Для бинарной смеси составы, плотности и вязкости фаз зависят только от давления. Принимая за независимые переменные  $P$  и  $S$ , получим вместо (1.3)

$$I = \frac{k}{m} \left[ \beta_1 \left( \frac{\rho_w x_2}{M_w} - \frac{\rho_g y_2}{M_g} \right) - \beta_2 \left( \frac{\rho_w x_1}{M_w} - \frac{\rho_g y_1}{M_g} \right) \right] \times \\ \times \left[ \left( \frac{\rho_w x_2}{M_w} - \frac{\rho_g y_2}{M_g} \right) \left( S \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\rho_w x_1}{M_w} \right) + (1-S) \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\rho_g y_1}{M_g} \right) \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\rho_w x_1}{M_w} - \frac{\rho_g y_1}{M_g} \right) \left( S \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\rho_w x_2}{M_w} \right) + (1-S) \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\rho_g y_2}{M_g} \right) \right) \right]^{-1} \quad (1.4)$$

Несколько более просто выражение (1.4) записывается в массовых переменных, при этом  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — массовые доли, а комбинации  $\rho_w/M_w, \rho_g/M_g$  следует заменить на  $\rho_w, \rho_g$ .

На фиг. 1 показаны зависимости  $I^* = mk^{-1}I(S)$ , рассчитанные по формуле (1.4) для различных значений  $P$ . Рассматривалась смесь метана (75 мол. %) и  $n$ -гексана (25 мол. %) при температуре 335 К. Свойства двухфазной смеси рассчитывались по уравнению состояния Пенга — Робинсона. Фазовые проницаемости выбирались в виде

$$f_w = \begin{cases} \left( \frac{S - 0,36}{0,64} \right)^3, & S > 0,36 \\ 0, & S \leq 0,36 \end{cases}, \quad f_g = \begin{cases} \left( \frac{0,88 - S}{0,88} \right)^3, & S < 0,88 \\ 0, & S \geq 0,88 \end{cases}$$

Кривые 1–3 соответствуют 8, 12, 17 МПа. Видно, что кривые выпуклы вниз, причем минимум достигается при  $S \sim 0,6-0,8$ . Величина скорости перехода для чистого газа, на несколько порядков превышающая эту величину для чистой жидкости, с ростом давления уменьшается, а скорость перехода для жидкости растет. Выравнивание скоростей перехода для жидкости и для газа связано со сближением свойств фаз при приближении к верхней границе области двухфазности по давлению и соответственно к критической точке. Из фиг. 1 также следует, что минимум скорости перехода с ростом давления сдвигается влево. Отметим, что  $I^*$  соответствует обратному времени перехода на масштабах

порядка поровых каналов. Эволюция на масштабах  $L$  определяется в линейном приближении характерными временами порядка  $L^2/I$ .

2. Если отклонения от стационарного решения велики, то для описания перехода следует решать нелинейную систему (1.1). Ниже приводятся результаты расчета отбора газоконденсатной смеси из одного конца плоского линейного пласта после закачки через тот же конец обогащенного газа. Конечно-разностный алгоритм решения задачи описан в [4].

Начальные и граничные условия таковы

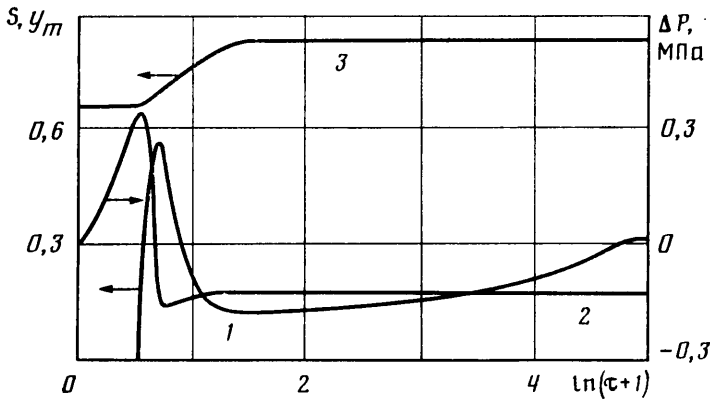
$$P(r, 0) = P^0, \quad z_i(r, 0) = z_i^0, \quad i = 1, \dots, l, \quad 0 < r < L$$

$$t < t^*: \quad z_i(0, t) = \delta_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad -\frac{k\beta}{N} \frac{\partial P}{\partial r} = v, \quad r = 0$$

$$t \geq t^*: \quad \frac{k\beta}{N} \frac{\partial P}{\partial r} = v, \quad N = N(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{l-1}, P), \quad \Gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta}, \quad r = 0$$

$$z_i(L, t) = z_i^0, \quad P(L, t) = P^0, \quad r = L$$

Величина  $t^*$  соответствует безразмерному моменту времени  $\tau =$



Фиг. 3

$= (vt)/(mL) = 0,75$ ,  $(mL)/v = 0,96 \cdot 10^6$  с, и выбиралась так, чтобы к началу отбора возмущения состава при  $r=L$  практически отсутствовали. Состав закачиваемого газа: 66% метана, 10% этана, 10% пропана, 14% бутана. Прочие исходные данные полностью соответствуют [5].

На фиг. 2 показаны профили насыщенности  $S$  в различные моменты времени. Кривая 1 соответствует окончанию закачки газа, 2–6 –  $\tau = 1, 2, 30, 110, 170$ . Видно, что процесс рассасывания флуктуаций происходит в две стадии. Первая протекает за время  $\tau = 1-3$ , при этом тыловая область образовавшегося вала жидкой фазы притекает ко входу в пласт. Затем насыщенность в точке  $r=0$  резко падает, и при  $\tau \approx 10$  формируется профиль насыщенности с резким изломом (кривая 4). Вторая стадия характеризуется существенным замедлением процесса. Выход на стационарный режим происходит за время  $\tau = 160-170$ .

На фиг. 3 показаны зависимости показателей процесса от  $\ln(\tau+1)$ . Кривая 1 –  $S(0, t)$ , 2 –  $\Delta P(t) = P(0, t) - P(L, t)$ . Видно, что эволюция давления в отличие от  $S$  происходит в течение первой стадии. Составы фаз также выходят на стационарные значения в течение нескольких единиц  $\tau$ . Расчеты проводились для десятикомпонентной смеси, в качестве примера приведена зависимость доли метана в газовой фазе (кривая 3). Таким образом, медленная эволюция  $S$  происходит при практически стационарных распределениях давления и составов фаз. Суммарный состав  $z_i$  меняется при этом постольку, поскольку меняется  $S$ .

Время возникновения флуктуаций  $S$  отличается от времени их расщепления на два порядка. Столь различное поведение решения для режимов закачки и последующего отбора связано с необратимостью разрывных течений [6]. Специфика выхода на стационарный режим определяется и конечностью области решения, поскольку в бесконечной области стационарное решение рассматриваемой задачи отсутствует. Отметим, что наличие у системы чередующихся стадий эволюции с сильно различающимися временами наблюдалось ранее в нелинейной теории спиноподобного распада [7, 8].

Рассмотренная в разд. 1 система подбиралась так, чтобы служить условной бинарной для описанной выше многокомпонентной системы. Характерное время перехода определяется из линейной теории по следующим данным:  $I^* = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ,  $k = 10^{-14} \text{ м}^2$ ,  $L = 5 \text{ м}$ ,  $m = 0,222$ , и по порядку величины составляет всего  $10^3 \text{ с}$ . Это говорит о неприменимости линейного описания при больших отклонениях от стационарного решения.

Расчеты проводились при различных шагах по пространству и по времени, и во всех случаях после быстрых измерений давления и составов фаз наблюдалась медленная эволюция  $S$  за времена прокачки порядка 160 поровых объемов. Это говорит о том, что при наличии в пласте каким-то образом сформировавшегося сильно неоднородного по пространству начального распределения  $S$  и  $z_i$  исследование состава продукции газоконденсатных скважин за обычные времена может не дать правильных результатов, так как на существенно больших временах состав может медленно измениться, например появится конденсат.

Следует отметить, что квазистационарные решения типа вышеописанного постулировались ранее в [1]. Именно при неподвижности одной из фаз (например, жидкой) и при  $f_w = 0$ ,  $f_g = 1$  система (1.1) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, если считать составы фаз и давление не зависящими от времени. Численные расчеты, проведенные при  $S(L, t)$ , равной остаточной насыщенности жидкости, подтверждают правомочность подхода [1]. Эффект замедления перехода по насыщенности наблюдался также в расчетах с  $S(L, t) = 0,42$ .

3. Задача, сходная с рассмотренной выше, решалась для плоскорадиального случая в [9], однако весь процесс перехода не был прослежен из-за очень большого времени счета. Формирование профиля  $S$  с резким изломом, отличающегося от известного стационарного распределения и чрезвычайно медленно трансформирующегося, при ограничениях счетного характера наводило на мысль о наличии у системы еще и разрывного стационарного решения. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

В рамках подхода [10] при нахождении стационарных решений пластовые составы и насыщенности фаз определяются давлением и неизменным вдоль линий тока суммарным составом в фильтрационном потоке из соотношений

$$\Gamma_i^\circ = \Gamma_i(z_1, \dots, z_{l-1}, P), \quad i = 1, \dots, l-1 \quad (3.1)$$

где  $\Gamma_i^\circ$  — состав в потоке на границе области фильтрации. В случае разрешимости системы (3.1) относительно  $z_i$  все пластовые характеристики оказываются функциями давления и стационарное течение определяется из уравнения Лапласа для функции Христиановича. Вопрос состоит в следующем: всегда ли система (3.1) разрешима относительно  $z_i$  и соответственно могут ли образовываться неоднозначности стационарного решения, приводящие к необходимости введения сильных разрывов [11]?

Следует отметить, что вопрос о разрешимости системы (3.1) является принципиальным, поскольку запасы нефтегазоконденсатных месторождений оцениваются путем анализа состава продукции, т. е. величин  $\Gamma_i^\circ$ . Отсутствие однозначной зависимости между составами в потоке и в пласте делает задачу оценки запасов некорректно определенной и требует

привлечения дополнительных данных. Поставленный вопрос является частью более общего вопроса о числе возможных решений системы (3.1). Для смесей с  $l > 2$  он остается нерешенным, в частности неизвестно, всегда ли существуют решения системы (3.1). Однако для бинарных смесей можно доказать однозначную разрешимость (3.1).

Условие разрешимости записывается в виде

$$\det \left\{ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial z_j} \right\} \neq 0 \quad (3.2)$$

Для бинарной смеси, описываемой независимыми переменными  $P$  и  $S$ , условие (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial S} \neq 0, \quad \Gamma_1 = \left( \frac{f_g}{f_w} \frac{\rho_g y_1}{\mu_g M_g} + \frac{\rho_w x_1}{\mu_w M_w} \right) \left( \frac{f_g}{f_w} \frac{\rho_g}{\mu_g M_g} + \frac{\rho_w}{\mu_w M_w} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

причем все функции в (3.3), кроме  $f_{g,w}$ , зависят только от  $P$ . Дифференцируя, получим вместо (3.3)

$$\text{sign} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial S} = \text{sign} \left[ \left( \frac{f_g}{f_w} \right)'_s (y_1 - x_1) \frac{\rho_g \rho_w}{M_g M_w \mu_g \mu_w} \right] \neq 0 \quad (3.4)$$

Из геометрических соображений ясно, что для бинарной смеси на плоскости давление — доля 1-го компонента ветви, соответствующие газовой и жидкой фазам, смыкаются только в критической точке, ограниченная область двухфазности [12]. Таким образом, величина  $y_1 - x_1$  в двухфазной области сохраняет знак.

Производная  $(f_g/f_w)_s'$  выражается в виде

$$\left( \frac{f_g}{f_w} \right)'_s = \frac{(f_g)_s' f_w - (f_w)_s' f_g}{f_w^2} \quad (3.5)$$

При насыщенностях, соответствующих неподвижности какой-либо фазы, стационарных решений нет [1]. Если обе фазы подвижны, то обращение в нуль (3.5) эквивалентно равенству

$$\frac{(f_g)_s'}{(f_w)_s'} = \frac{f_g}{f_w} \quad (3.6)$$

Но левая часть (3.6) меньше, а правая больше нуля, что и доказывает (3.4).

Автор благодарен В. Н. Николаевскому за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
2. Розенберг М. Д., Кундин С. А., Курбанов А. К. и др. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. М.: Недра, 1969. 453 с.
3. Митлин В. С. Автоколебательные режимы фильтрации многокомпонентных смесей // Аннотации докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. С. 458.
4. Митлин В. С. Безытерационный метод численного решения одно- и двумерных задач многокомпонентной фильтрации // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. Вып. 4. С. 110—129.
5. Гужов Н. А., Митлин В. С. Об эффекте межфазной поверхности в задачах смешивающегося вытеснения многокомпонентных систем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 83—91.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

7. Митлин В. С., Маневич Л. И., Ерухимович И. Я. Образование кинетически стабильной доменной структуры в процессе спиnodального распада бинарных полимерных смесей // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 2. С. 495—506.
8. Митлин В. С., Маневич Л. И. Переход к термодинамическому равновесию через последовательность перестроек метастабильных структур в процессе спиnodального распада бинарных полимерных смесей // Высокомолекуляр. соединения. Сер. А. 1988. Т. 30. № 1. С. 9—15.
9. Митлин В. С. Новые методы расчета воздействия обогащенного газа на газоконденсатный пласт: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М.: ВНИИГАЗ, 1987. 24 с.
10. Христианович С. А. О движении газированной жидкости в пористых породах // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 277—282.
11. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
12. Амикс Дж., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. М.: Гостоптехиздат, 1962. 572 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.VIII.1987