

УДК 532.546

ОПИСАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИСПЕРСИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ

ГИРГИДОВ А. Д.

Рассматривается механизм рассеяния растворенных в жидкости веществ при ее движении сквозь пористую среду (фильтрационной дисперсии) и отмечается, что рассеяние в основном обусловлено многократным делением и слиянием струек жидкости в порах среды. Учитывая определенную аналогию пространственно-временной неоднородности поля скорости жидкости при ее ламинарном движении в пористой среде и при турбулентном движении в каналах, а также принимая во внимание эффективность модели диффузии с конечной скоростью для расчета турбулентной диффузии, рекомендуется описывать на основе указанной модели фильтрационную дисперсию. Получена система уравнений, описывающая рассеяние веществ в пористой среде, образующейся при гексагональной и кубической плотнейших упаковках шаров одинакового диаметра. Приводятся результаты численного решения для двух- и трехмерных стационарных задач. Предлагаются упрощенные системы уравнений, обеспечивающие многократное уменьшение затрат времени для выполнения расчетов.

Рассеяние в геометрическом пространстве растворенного в жидкости вещества (индикатора) при ее движении в пористой среде, которое будем называть фильтрационной дисперсией, обуславливают четыре фактора: 1) молекулярная диффузия; 2) микрогидродинамическая дисперсия, являющаяся следствием неоднородности поля скорости жидкости в порах (скорость на твердой границе потока жидкости равна нулю); 3) собственно фильтрационная дисперсия, порождаемая многократным делением и слиянием струек жидкости в пористой среде; 4) макрогидродинамическая дисперсия, обусловленная неоднородностью поля скорости фильтрации (например, вследствие неоднородности пористой среды).

Обмен веществом между жидкой и твердой фазами из рассмотрения исключаем.

Математическое описание этого процесса обычно основывается на статистических моделях, наиболее простая из которых заключается в использовании предположения о том, что координата частицы диффундирующего индикатора X является марковской случайной функцией времени. Более широко используется равносильное предположение о пропорциональности плотности потока диффундирующего вещества, который обусловлен случайными причинами, градиенту осредненной концентрации индикатора. Соответствующее этим предположениям диффузионное уравнение имеет вид [1–3]

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial X_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} K_{\alpha\beta} \frac{\partial \vartheta}{\partial X_{\beta}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (1)$$

где $\vartheta(X, t)$ — объемная концентрация индикатора, $u(X, t) = (u_1, u_2, u_3)$ — скорость фильтрации, $K_{\alpha\beta}(X, t)$ — тензор коэффициентов дисперсии, $X = (X_1, X_2, X_3)$ — декартовы координаты, t — время. Как обычно, по дважды повторяющимся целочисленным индексам производится суммирование. В этом уравнении макрогидродинамическая дисперсия учитывается вторым слагаемым в левой части, а воздействие трех факторов интеграль-

но описывается правой частью. Хотя рассеяние индикатора в пространстве, занятом пористой средой, происходит главным образом под воздействием разделения и слияния струек жидкости в порах (т. е. собственно фильтрационной дисперсии), коэффициенты дисперсии $K_{\alpha\beta}$ учитывают и первые два фактора, которые обеспечивают выравнивание концентраций внутри струек жидкости.

Если пористая среда однородна и изотропна, то тензор $K_{\alpha\beta}$ является диагональным [3], и в случае, когда исследуется одномерная дисперсия вдоль направления движения жидкости, уравнение (1) представляется в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial X_1} = K_{11} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X_1^2}, \quad v = \frac{1}{S} \int_{(S)} u_1 dS \quad (2)$$

где v — средняя скорость по поперечному сечению S фильтрационного потока; K_{11} — продольный коэффициент дисперсии, учитывающий все четыре фактора, включая и неоднородность поля скорости. Уравнение (2) наиболее распространено в практических приложениях.

Уравнение (1) совпадает с обычным полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии, если принять, что u и ϑ — осредненные по времени скорость жидкости и концентрация индикатора в турбулентном потоке. В пористой среде и в турбулентном потоке рассеяние индикатора в результате транспортирования его беспорядочно пересекающимися струйками описывается как диффузионный процесс, поэтому неудивительно, что недостатки математической модели (1) в обоих случаях общие [2–4]. Во-первых, это бесконечно большие мгновенные значения скорости движения частиц индикатора, связанные с использованием при выводе уравнения (1) линейной зависимости между плотностью потока индикатора и градиентом его осредненной концентрации, аналогичной закону Фика. Во-вторых, это принципиальные трудности определения численных значений составляющих тензора $K_{\alpha\beta}$ — основного параметра, характеризующего рассеяние индикатора. Недостатки этого параметра, хорошо известные в случае турбулентной диффузии [4–6], обуславливают крайне скудные и ненадежные данные о нем даже в случае простейших задач фильтрационной дисперсии, описываемых с помощью уравнения (2).

Имея в виду, что для описания турбулентной диффузии определенные преимущества имеет модель диффузии с конечной скоростью [7–11], целесообразно использовать эту модель и для описания некоторых случаев фильтрационной дисперсии.

Согласно модификации этой модели, которая представляется эффективной для описания фильтрационной дисперсии [12], предполагается, что в каждой точке пространства, занятого фильтрационным потоком, существует набор из конечного числа n скоростей $u^{(i)}(X, t)$, $i=1, \dots, n$, с которыми могут двигаться частицы индикатора. Эти скорости называются возможными, так как движение частиц с другими скоростями не допускается. Рассеяние индикатора в пространстве происходит вследствие того, что его частицы, перемещаясь с одной какой-либо возможной скоростью, например $u^{(i)}$ (фиг. 1), через случайный интервал времени, дискретно изменяют свою скорость на другую возможную скорость $u^{(k)}$. Для вывода соответствующего этой модели диффузионного уравнения Колмогорова [1, 9] следует принять гипотезу о том, что совокупность трех декартовых координат частицы индикатора $X(t)$ и номер $v(t)$ возможной скорости, которую частица имеет в точке с этими координатами, т. е. величина $[X(t), v(t)]$, образует непрерывно дискретный марковский процесс.

Введем распределение вероятности

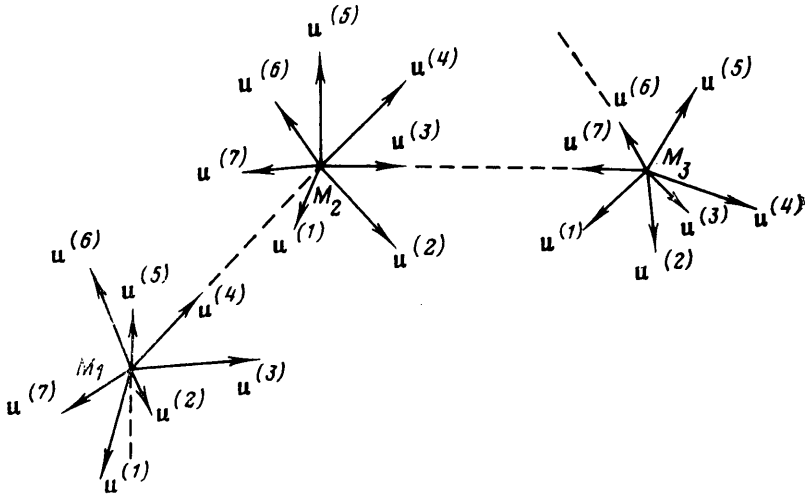
$$P[X_\alpha(t) < y_\alpha, v(t) = k | X(s) = x, v(s) = i] =$$

$$= \int_{-\infty}^y f_{ik}(x, s; y, t) dy; \quad \alpha=1, 2, 3; \quad i, k=1, \dots, n$$

где $y=(y_1, y_2, y_3)$ — декартовы координаты, s — время.

Сделаем общие для теории диффузионных уравнений Колмогорова предположения о функции f_{ik} (см. [1, 9]), из основного уравнения марковских случайных процессов, представленного в виде

$$f_{ik}(x, s; y, t+\Delta t) = \int f_{ij}(x, s; z, t) \cdot f_{jk}(z, t; y, t+\Delta t) dz$$



Фиг. 1

с помощью стандартной процедуры получим

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial t} = f_{ij}\omega_{jk} - \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (f_{ij}a_{jk}^{(\alpha)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} (f_{ij}b_{jk}^{(\alpha\beta)}) \quad (3)$$

$$\omega_{jk}(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int f_{jk}(y, t; z, t+\Delta t) dz - \delta_{jk} \right] \quad (4)$$

$$a_{jk}(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (z_\alpha - y_\alpha) f_{jk}(y, t; z, t+\Delta t) dz \quad (5)$$

$$b_{jk}^{(\alpha\beta)}(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (z_\alpha - y_\alpha)(z_\beta - y_\beta) f_{jk}(y, t; z, t+\Delta t) dz \quad (6)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. В (4)–(6) интегралы имеют пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ по всем составляющим $z=(z_1, z_2, z_3)$.

Можно показать [11], что ω_{jk} при $j \neq k$ представляет собой величину, обратную математическому ожиданию времени, в течение которого частица индикатора сохраняла возможную скорость $u^{(j)}$, прежде чем изменить ее на $u^{(k)}$, а при $j=k$ значение $-\omega_{jj}$ представляет собой величину, обратную математическому ожиданию случайного времени, в течение которого частица имела скорость $u^{(j)}$, прежде чем изменила ее на любую другую скорость. При этом очевидно, что

$$\sum_{k=1}^n \omega_{jk} = 0 \quad (7)$$

Кроме того, можно показать [9], что $a_{jk}^{(\alpha)}$ и $b_{jk}^{(\alpha\beta)}$ отличны от нуля лишь при $j=k$. Из выражения (5) следует, что $a_{kk}^{(\alpha)}$ представляет собой проекцию на ось y_α k -й возможной скорости движения частицы, т. е. $a_{kk}^{(\alpha)} = u_\alpha^{(k)}$. Выражение (6) показывает, что величины $b_{kk}^{(\alpha\beta)}$ представляют собой дисперсию в геометрическом пространстве частиц индикатора, движущихся со скоростью $\mathbf{u}^{(k)}$.

Будем предполагать, что рассеяние индикатора обусловлено лишь собственно фильтрационной дисперсией, т. е. слиянием и разделением струек, а вклад молекулярной диффузии и микрогидродинамической дисперсии, за счет которых происходит рассеяние внутри струйки, из рассмотрения исключаем. Тогда можно считать, что $b_{kk}^{(\alpha\beta)} = 0$ при всех α, β и k . Уравнение (3) при этом можно представить в виде

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (f_{ik} u_\alpha^{(k)}) = f_{ij} \omega_{jk} \quad (8)$$

Концентрацию той части частиц индикатора, которые в точке с координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t имеют возможную скорость $\mathbf{u}^{(i)}$, обозначим через $\vartheta_i(\mathbf{x}, t)$ и назовем парциальной концентрацией. Очевидно, что

$$\vartheta = \sum_{i=1}^n \vartheta_i$$

$$\vartheta_k(\mathbf{y}, t) = \int \vartheta_i(\mathbf{x}, s) f_{ik}(\mathbf{x}, s; \mathbf{y}, t) d\mathbf{x} \quad (9)$$

Если умножить (8) на $\vartheta_i(\mathbf{x}, s)$, проинтегрировать все слагаемые по \mathbf{x} и просуммировать их по i , то, используя (9), получим искомую систему уравнений, описывающих диффузию с конечной скоростью

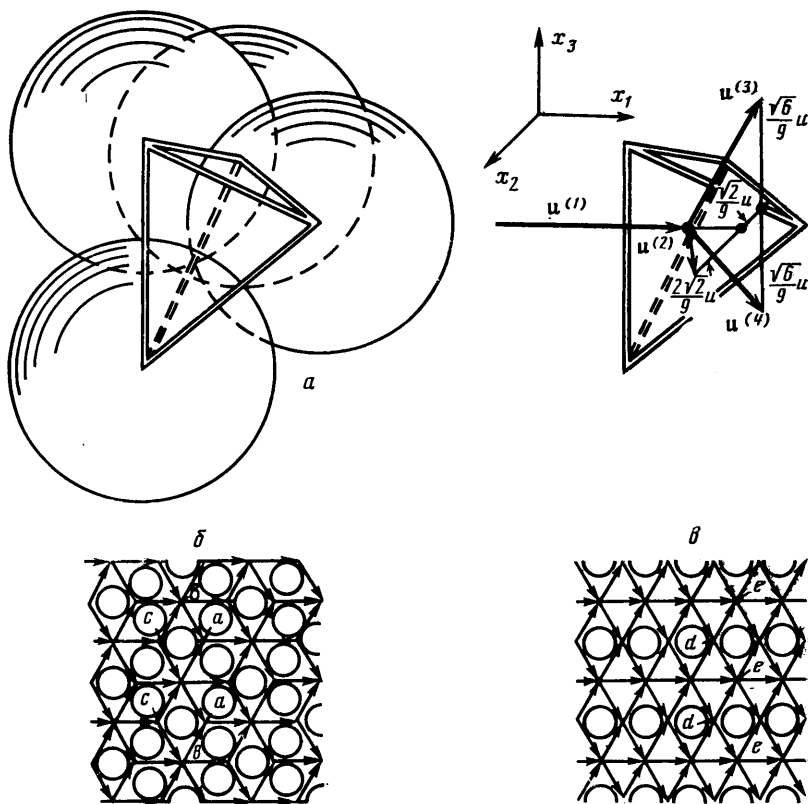
$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_\alpha} (u_\alpha^{(k)} \vartheta_k) = \vartheta_j \omega_{jk} \quad (10)$$

Здесь для удобства пространственные координаты, как и в [4], обозначены через $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Система уравнений (10) описывает рассеяние частиц индикатора в геометрическом пространстве в результате их движения в фазовом пространстве с непрерывными геометрическими координатами и дискретными значениями скоростей.

В качестве примера использования уравнения (10) рассмотрим ламинарное движение несжимаемой жидкости, транспортирующей пассивный консервативный индикатор, сквозь пористую среду, которая образуется при плотнейшей упаковке шаров одинакового диаметра. Основным этапом реализации описанной модели диффузии с конечной скоростью является задание конечного числа возможных скоростей. Примем, что направление каждой возможной скорости частиц перпендикулярно плоскости, проходящей через центры трех соприкасающихся шаров (фиг. 2), между которыми эти частицы транспортируются жидкостью. Величина скорости индикаторных частиц равна среднему по объему значению скорости жидкости, вычисленному как отношение расхода жидкости между тремя шарами к площади просвета между ними. Кроме того, будем предполагать, что в центрах пустот между шарами (октаэдрических и тетраэдрических) частицы индикатора могут либо дискретно изменить свою возможную скорость на другую, либо сохранить ее.

На фиг. 2, а представлен в аксонометрии набор четырех возможных скоростей движения частиц индикатора $\mathbf{u}^{(k)}$ ($k=1-4$), который, как показало рассмотрение пространственной ориентации пор, одинаков для



Фиг. 2

случаев плотнейших кубической и гексагональной упаковок. На этой же фигуре показаны плоские аналоги возможных направлений движения частиц индикатора для двух указанных типов пористой среды.

Характерные значения составляющих матрицы ω_{jk} оценим, исходя из следующих соображений. При выводе уравнений (10) предполагается, что частицы индикатора, имеющие, например, скорость $\mathbf{u}^{(j)}$, дискретно изменяют ее на какую-либо другую возможную скорость через случайные промежутки времени. Диагональные элементы этой матрицы $(-\omega_{jj})$, как отмечалось выше, интерпретируются как величины, обратные математическому ожиданию случайного значения времени, в течение которого индикаторная частица сохраняет свою возможную скорость $\mathbf{u}^{(j)}$; при этом, согласно статистической модели, изменение парциальных концентраций ϕ_j происходит непрерывно в процессе перемещения частиц индикатора в пространстве. Вместе с тем, согласно описанной выше схеме движения частиц индикатора в пористой среде, изменение одной возможной скорости на другую происходит не непрерывно в процессе движения частиц, а только в фиксированных точках пространства — в центрах пустот пористой среды, расстояние между которыми имеет порядок диаметра D шаров, образующих рассматриваемую пористую среду. Имея это в виду, примем, что значение $-\omega_{jj}$, т. е. среднее время постоянства скорости частиц в модели диффузии с конечной скоростью, пропорционально времени движения индикаторной частицы между центрами тяжести соседних пор

$$-\omega_{jj} = \kappa \frac{|\mathbf{u}^{(j)}|}{D} \quad (14)$$

Значение κ следует определять, сравнивая результаты расчетов, основанных на уравнениях (10), с эмпирическими данными, учитывая не

только отклонения форм элементов, образующих пористую среду, от шарообразной, но и отличие пористости экспериментально исследуемой среды от пористости, отвечающей наиболее плотной упаковке шаров.

Как показывает анализ системы уравнений (10), для того чтобы существовало такое физически оправданное решение этой системы, в котором при $t \rightarrow \infty$ концентрации частиц, движущихся с каждой из возможных скоростей, будут одинаковы (струи перемешиваются хаотически и нет оснований ожидать, что индикатор будет накапливаться в какой-либо определенной струйке), необходимо, чтобы матрица ω_{jk} была симметричной.

Рассмотрим случай плотнейшей кубической упаковки. Поле возможных скоростей, соответствующее структуре пор, представлено на фиг. 2, б. Из условия баланса расхода транспортирующей индикатор жидкости в узлах (пустотах) типа a и c и симметрии порового пространства найдем

$$|\mathbf{u}^{(2)}| = |\mathbf{u}^{(3)}| = |\mathbf{u}^{(4)}| = \frac{1}{3} u, \quad \mathbf{u} = |\mathbf{u}^{(1)}| \quad (12)$$

Из геометрических соображений легко найти проекции возможных скоростей на координатные оси

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= u, & u_2^{(1)} &= 0, & u_3^{(1)} &= 0 \\ u_1^{(2)} &= \frac{1}{9} u, & u_2^{(2)} &= \frac{2\sqrt{2}}{9} u, & u_3^{(2)} &= 0 \\ u_1^{(3)} &= \frac{1}{9} u, & u_2^{(3)} &= -\frac{\sqrt{2}}{9} u, & u_3^{(3)} &= \frac{\sqrt{6}}{9} u \\ u_1^{(4)} &= \frac{1}{9} u, & u_2^{(4)} &= -\frac{\sqrt{2}}{9} u, & u_3^{(4)} &= -\frac{\sqrt{6}}{9} u \end{aligned} \quad (13)$$

Связь величины u со скоростью фильтрации u_f можно получить, рассмотрев расход жидкости через плоское сечение, перпендикулярное оси X_1 , в виде $u_f = tu$, где t — коэффициент пористости среды. В случае плотнейших упаковок шарами одинакового диаметра $t = 0,26$.

Составим матрицу ω_{jk} частот изменения частицами индикатора возможной скорости $\mathbf{u}^{(j)}$ на скорость $\mathbf{u}^{(k)}$. В случае кубической упаковки имеются три типа узлов. В узле a частицы, прибывшие со скоростями $\mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{u}^{(3)}$ и $\mathbf{u}^{(4)}$, могут приобрести только одну возможную скорость $\mathbf{u}^{(1)}$, а в узле c , куда прибывают только частицы со скоростью $\mathbf{u}^{(1)}$, они могут с равной вероятностью приобрести любую из возможных скоростей $\mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{u}^{(3)}$ или $\mathbf{u}^{(4)}$. При этом, согласно (11), имеем

$$\omega_{jk}^{(a)} = \frac{\kappa u}{3D} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \omega_{jk}^{(c)} = \frac{\kappa u}{3D} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Исходя из необходимости получить в конечном итоге симметричную матрицу, задаем, что в узле b лишь $1/4$ часть частиц индикатора, имеющих скорость $\mathbf{u}^{(1)}$, изменяет на другие возможные скорости, а $3/4$ этих частиц сохраняет после прохождения узла свою скорость $\mathbf{u}^{(1)}$. Имея это в виду, получаем

$$\omega_{jk}^{(b)} = \frac{\kappa u}{12D} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Для получения искомой матрицы обратим внимание, что все три типа узлов встречаются индикаторным частицам с равной вероятностью, так что

$$\omega_{jk} = \frac{1}{3} (\omega_{jk}^{(a)} + \omega_{jk}^{(b)} + \omega_{jk}^{(c)}) = \frac{\kappa u}{36D} \begin{pmatrix} -15 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -7 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad (16)$$

В случае плотнейшей гексагональной упаковки шаров направления четырех возможных скоростей $\mathbf{u}^{(k)}$ ($k=1-4$) такие же, как в случае кубической упаковки, а связь между модулями этих скоростей устанавливается, исходя из геометрической симметрии порового пространства и равенства потерь механической энергии для всех струек вдоль принятого нами основного направления движения жидкости. При этом получаем, как и для случая плотнейшей кубической упаковки, равенства (13).

При гексагональной упаковке имеется лишь два типа узлов, в которых частицы индикатора могут изменять возможные скорости. В узле типа d , частица, пришедшая со скоростью $\mathbf{u}^{(2)}$, с вероятностью $1/3$ сохранит свою скорость и с этой же вероятностью приобретет либо скорость $\mathbf{u}^{(3)}$, либо $\mathbf{u}^{(4)}$. Поэтому в этом узле

$$\omega_{jk}^{(d)} = \frac{\kappa u}{9D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Узел типа e аналогичен узлу типа b , так что $\omega_{jk}^{(e)} = \omega_{jk}^{(b)}$. Считая, что индикаторные частицы с равной вероятностью попадают в узлы типа d и e , получим

$$\omega_{jk} = \frac{1}{2} (\omega_{jk}^{(d)} + \omega_{jk}^{(e)}) = \frac{\kappa u}{72D} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -17 & 7 & 7 \\ 3 & 7 & -17 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Решение системы (10) со значениями параметров, представленными в виде (13) и (16) или (13) и (18), позволяет найти величины парциальных концентраций ϑ_k в каждой точке пространства, занятого пористой средой, а по ним определить действительную концентрацию ϑ

$$\vartheta = \sum_{k=1}^4 \vartheta_k$$

Система (10) относится к гиперболическому типу и для нее можно, в частности, сформулировать задачу Коши о рассеянии в полупространстве $X_1 > 0$ индикатора от стационарного источника, расположенного в плоскости $X_1 = 0$ и имеющего плотность распределения интенсивности

$$\vartheta|_{x_1=0} = \vartheta_0(X_2, X_3)$$

Граничные условия при $X_1 = 0$ (если нет дополнительных данных о свойствах источника) можно представить в виде

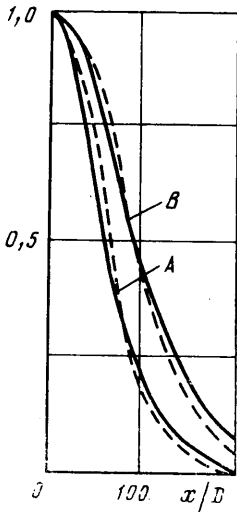
$$\vartheta_k(0, X_2, X_3) = \frac{1}{4} \vartheta_0(X_2, X_3)$$

Методы численного решения подобных систем рассмотрены, например, в [13].

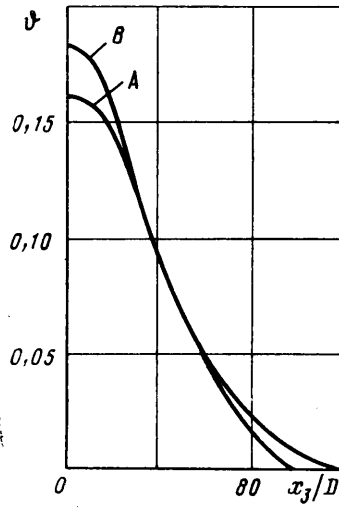
Для определения численного значения χ сопоставлялись решения стационарной задачи о распространении в полуплоскости ($X_1 > 0, X_2 = 0$) индикатора от источника, расположенного в начале координат, полученные с помощью системы уравнений (10) и параболического уравнения фильтрационной дисперсии (1). Коэффициенты дисперсии в (1) были определены на основе экспериментальных данных о рассеянии примеси в однородном песчаном грунте со средним диаметром зерен $D = 1$ мм и пористостью $m = 0,4$. Сравнивая распределения концентрации на различных расстояниях от источника и считая, что расстояния между центрами пор пропорциональны $\sqrt[3]{m}$, было найдено значение $\chi = 1,2$.

В качестве примера на фиг. 3 представлены распределения нормированных по максимальному значению концентраций примеси в поперечных сечениях потока на расстояниях $1000D$ (A) и $2000D$ (B). Сплошной линией показаны результаты расчета с помощью уравнения (1), штриховой — с помощью системы уравнений (10).

Сопоставление решений стационарной задачи о рассеянии индикатора от точечного источника, расположенного в начале координат, в однородном полупространстве



Фиг. 3



Фиг. 4

($X_1 > 0$) на расстоянии $500D$ от источника, полученных с помощью системы (10) для случаев кубической (A) и гексагональной (B) упаковок, показало, что разница расчетных значений максимальных концентраций не превышает 10% (фиг. 4).

Для увеличения шага конечно-разностной сетки по X_1 , который ограничен условием Куранта — Фридрихса — Леви, можно принять упрощенную схему, состоящую из набора трех возможных скоростей (фиг. 5) $u_a^{(k)}$

$$u_{a1}^{(k)} = \frac{10}{9} u, \quad u_{a2}^{(k)} = u_2^{(k+1)}, \quad u_{a3}^{(k)} = u_3^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3$$

Сопоставление результатов решения пространственной задачи на основе упрощенной схемы с точностью до 5% согласуется с решением уравнения для случаев гексагональной и кубической упаковок при следующей матрице ω_{jk} :

$$\omega_{jk} = \frac{\chi u}{36D} \begin{pmatrix} -1,2 & 0,6 & 0,6 \\ 0,6 & -1,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & -1,2 \end{pmatrix}$$

Время расчетов при этом сокращается более чем в 20 раз.

Для решения плоской задачи можно рекомендовать систему из двух уравнений (10). Расчетные значения двух возможных скоростей $u^{(k)}$ и составляющих матрицы ω_{jk} получены из сопоставления решений плоской задачи о рассеянии индикатора от линейного источника, расположенного вдоль одной из координатных осей.

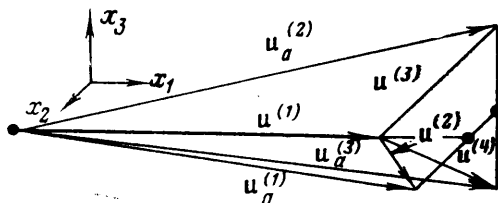
При этом значения указанных параметров оказались следующими:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = \frac{10}{9} u, \quad u_2^{(1)} = -u_2^{(2)} = \frac{\sqrt{6}}{9} u$$

$$\omega_{21} = \omega_{12} = -\omega_{11} = -\omega_{22} = \omega = \frac{3u}{2D} \quad (19)$$

Установлено, что результаты расчета мало чувствительны к изменениям значений ω на 20—30%.

Как показал опыт решения системы уравнений (10), относящихся к гиперболическому типу, использование прямоугольных сеток и явной схемы конечно-разностной аппроксимации, рекомендованных в [13], обеспечили достаточно хорошую сходимость и устойчивость численного решения как плоской, так и пространственной стационарных задач. Затраты времени при решении плоской задачи соизмеримы



Фиг. 5

с затратами времени при использовании неявной схемы для аппроксимации обычного параболического уравнения диффузии (время счета пропорционально N — числу узлов сетки в плоскости $X_3=0$). При решении пространственной задачи использование неявной схемы для параболического уравнения приводит к затратам времени, пропорциональным N^3 , в то время как возможность использования явной схемы для системы (10) обеспечивает затраты времени, пропорциональные N .

С помощью предлагаемой модели можно определить значение коэффициента поперечной дисперсии K_{22} в случае плоской задачи. Для этого воспользуемся оценкой K_{22} , получаемой из предельного перехода (см., например, [10]), при котором система двух уравнений (10) с параметрами (19) превращается в параболическое уравнение дисперсии (эта оценка достаточно точна в области малых градиентов концентрации):

$$K_{22} = \frac{[u_2^{(1)}]^2}{2\omega} \approx 0,02u_1 D$$

Это значение достаточно хорошо совпадает со значением $K_{22} = 0,7K + 0,025 u_1 D$, где K — коэффициент молекулярной диффузии жидкости, рекомендованным в [14] для крупнозернистых грунтов, где вклад молекулярной диффузии пренебрежимо мал (как и было принято в предлагаемой модели).

В случае анизотропных и неоднородных сред составляющие матрицы ω_{jk} рассчитываются так же, как и в рассматриваемой модели. Если матрица ω_{jk} оказывается несимметричной, то необходимо ввести дополнительные предположения о свойствах среды для получения физически оправданного решения. Обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Наиболее существенным преимуществом модели диффузии с конечной скоростью и соответствующего ей уравнения (10) для описания фильтрационной дисперсии по сравнению с обычной полуэмпирической моделью и уравнением (1), а также по сравнению с другими статистическими моделями фильтрационной дисперсии (см., например, [15, 16]) является то, что параметры, входящие в уравнения (10), определяются через геометрические характеристики пористой среды с помощью простых зависимостей типа (11), при этом они описывают и продольную и поперечную дисперсию, в то время как в уравнение (1) входят коэффициенты дисперсии, определение которых представляет собой непростую задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 511 с.
2. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.

3. Баренблатт Г. И., Ентоу В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
5. Corrsin S. Limitations of Gradient Transport Models in Random Walks and in Turbulence // Adv. Geophys. 1974. V. 18a. P. 25—60.
6. Яглом А. М. Об уравнениях с зависящими от времени коэффициентами, описывающих диффузию в стационарном приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11. № 11. С. 1120—1128.
7. Фок В. А. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света // Тр. Гос. оптич. ин-та. 1926. Т. 4. № 34. С. 1—32.
8. Ляпин Е. С. О турбулентном перемешивании воздуха в атмосфере // Метеорология и гидрология. 1948. № 5. С. 13—23.
9. Монин А. С. О диффузии с конечной скоростью // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1955. № 3. С. 234—248.
10. Гиргидов А. Д. Уравнение диффузии с конечной скоростью в двух- и трехмерном пространствах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 1. С. 91—93.
11. Гиргидов А. Д. Модель и уравнение турбулентной диффузии с конечной скоростью // Тр. ЛПИ. 1984. № 401. С. 3—9.
12. Гиргидов А. Д. Модификация модели диффузии с конечной скоростью для расчета фильтрационной дисперсии // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 5. С. 1062—1067.
13. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
14. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. М.: Недра, 1981. 304 с.
15. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1042—1050.
16. Казанский А. Б. Теория фильтрационной диффузии и приложения ее к задачам гидрологии и гидрогеологии. М.: Наука, 1973. 136 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.V.1987