МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1988

УДК 532.546

МУЛЬТИКОНТИНУАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА В ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

ШВИДЛЕР М. И.

Неоднородные системы периодической структуры являются удобной моделью для изучения процессов в сильно неоднородных средах. Теория осреднения процессов в периодических структурах в отличие от структур стохастических, получила глубокое обоснование, созданы конструктивные методы анализа многих процессов в периодических средах [1–4]. Реализуемое теорией осреднения описание в терминах средних полей приводит к уравнениям, связывающим эти поля с эффективными характеристиками неоднородной среды. При определенных условиях осредненные уравнения могут трактоваться как законы сохранения, а их система – как моноконтинуальная модель процесса. Очевидно, такое описание не дает достаточной информации о средних полях в отдельных фазах композитной периодической системы и обменных процессах между фазами.

Более детальное описание связано с определением условно осредненных полей либо уравнений, связывающих эти поля. Если удается построить такие уравнения и их можно трактовать как уравнения процесса в фазе композитной системы, подобное описание является мультиконтинуальным, а система моделируется суперпозицией континуумов, по числу фаз композита.

Независимо от способа реализации мультиконтинуального описания необходимо решить центральную проблему замыкания систем уравнений, связанную с наличием в них членов, ответственных за межконтинуальные обмены веществом, импульсом, энергией и т. д. В феноменологических теориях для этого обычно принимаются гипотезы о структуре обменных членов либо, как это делается в термодинамической теории смесей, постулируется вид так называемых определяющих уравнений, параметры которых находятся с помощью диссипативного неравенства. В обоих случаях подобная мультиконтинуальная модель не является полностью замкнутой, поскольку содержит свободные параметры, зависимость которых от свойств среды не определена.

В [5, 6] рассмотрена задача условного осреднения системы уравнений переноса слабосжимаемой жидкости в случайной композитной пористой среде, математически аналогичной уравнениям теплопереноса. Получены уравнения мультиконтинуальной модели и реализован точный способ их замыкания для бинарных систем, основанный на использовании глобально осредненной системы (моноконтинуальной модели), вычислены параметры, регулирующие взаимодействие между континуумами-фазами. Аналогичный подход применен в [7] для условного осреднения уравнений переноса нейтральной примеси в композитной среде, пористость и тензор диффузии которой случайны. Получены уравнения замкнутой мультиконтинуальной модели и вычислены характеристики взаимодействия бинарной системы.

Таким образом показано, что в тех случаях, когда для одного и того же процесса может быть реализовано моноконтинуальное описание и получены законы сохранения мультиконтинуальной модели, замыкающие обменные члены для бинарной системы могут быть выражены через характеристики моноконтинуума, вычисляются и поля в фазовых континуумах. Полученная при этом информация позволяет оценить феноменологические гипотезы замыкания [8—10] и уточнить их.

Далее показано, что метод замкнутого мультиконтинуального описания стохастических систем применим для рассмотрения аналогичных процессов в периодических системах. В качестве примера изучается задача фильтрационного переноса слабосжимаемой жидкости.

1. Рассмотрим неустановившийся перенос однородной слабосжимаемой жидкости в неоднородной деформируемой среде. Пусть в рамках линейной теории в пространственной области Ω с границей $\partial\Omega$ поставлена задача

$$\operatorname{div}\mathbf{v}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=f,\qquad \mathbf{v}=-\sigma\nabla u \tag{1.1}$$

$$u(\mathbf{x}, 0)=u_0(\mathbf{x}), \quad u|_{\partial\Omega}=\varphi(\mathbf{x}, t) \tag{1.2}$$

Здесь $u(\mathbf{x}, t)$ — давление, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости фильтрации, $\sigma(x)$ — положительно определенный и симметричный тензор проводимости, компоненты которого являются периодическими функциями $\mathbf{x}$; $\alpha(\mathbf{x})$ — положительная упругоемкость системы пористая среда — жидкость, также периодическая функция.

Так как в композитной среде $\sigma(\mathbf{x})$ и $\alpha(\mathbf{x})$ разрывны, под решением задачи (1.1) — (1.2) понимается обобщенное решение, удовлетворяющее соответствующим интегральным соотношением.

Итак, пусть $\alpha(\mathbf{y})$ и $\sigma(\mathbf{y})$ — периодические функции. В пространстве R^3 координат y_i выделим элементарную ячейку — параллелепипед Y с ребрами l_i и ячейки, полученные ее сдвигом на векторы (n_1l_1, n_2l_2, n_3l_3), где n_i — целые числа. Функции $\alpha(\mathbf{y})$ и $\sigma(\mathbf{y})$ называются Y-периодическими, если при сдвиге аргумента на тот же вектор они неизменны.

Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon>0$ и определим функции

$$\sigma^\varepsilon(\mathbf{x})=\sigma(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \alpha^\varepsilon(\mathbf{x})=\alpha(\mathbf{x}/\varepsilon)$$

которые при Y-периодических функциях $\sigma(\mathbf{y})$, $\alpha(\mathbf{y})$, по переменной $\mathbf{x}$ являются εY-периодическими. При $\varepsilon\to 0$ ребра периода этих функций стремятся к нулю, и, следовательно, в этом случае $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\alpha^\varepsilon(\mathbf{x})$ моделируют систему с мелкомасштабной периодической неоднородностью.

Следуя [1], приведем способ решения задачи (1.1), (1.2), при котором решение ищется в виде двухмасштабного разложения по быстрой y и медленной x переменным асимптотического по параметру ε

$$u^\varepsilon(\mathbf{x},t)=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i u^i(\mathbf{x},\mathbf{y},t), \qquad \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t)=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i \mathbf{v}^i(\mathbf{x},\mathbf{y},t) \tag{1.3}$$

где функции $u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ — Y-периодичны по быстрой переменной y.

Подставив (1.3) в (1.1) и используя стандартную процедуру [1] разложения операторов по степеням ε, можно получить цепочку уравнений для u^i, $\mathbf{v}^i$, решения которой реализуют разложение (1.3). Действуя на эти уравнения оператором осреднения по объему Y-периода

$$\langle f\rangle=\frac{1}{|Y|}\int_Y f(y)\,dy$$

получим осредненную систему

$$\operatorname{div}\mathbf{V}+\alpha^*\frac{\partial U}{\partial t}+\varepsilon\lambda=f, \qquad \mathbf{V}=-\sigma^*\nabla U+\varepsilon\gamma \tag{1.4}$$

$$U=\langle u^\varepsilon\rangle, \qquad \mathbf{V}=\langle \mathbf{v}^\varepsilon\rangle, \qquad \lambda=\frac{\partial}{\partial t}\langle[\alpha(y)-\alpha^*](u^1+\varepsilon u^2)\rangle$$

$$\gamma=\langle[\sigma^*-\sigma(y)](\nabla_x u^1+\nabla_y u^2+\varepsilon\nabla_x u^2)\rangle$$

Эффективные упругоемкость α^* и тензор проводимости σ^* имеют вид

$$\alpha^*=\langle\alpha(\mathbf{y})\rangle, \qquad \sigma_{ij}^*=\langle\sigma_{ij}(\mathbf{y})\rangle+\left\langle \sigma_{ik}(\mathbf{y})\frac{\partial W^j(\mathbf{y})}{\partial y_k}\right\rangle$$

где $W^l(\mathbf{y})$ — Y-периодическое обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sigma_{ij}(\mathbf{y})\frac{\partial W^l}{\partial y_j}\right]=-\frac{\partial}{\partial y_i}\sigma_{il}(\mathbf{y}), \qquad \langle W^l(\mathbf{y})\rangle=0$$

Разложение (1.3) можно записать в виде

$$u^\varepsilon=U+\varepsilon W^s(\mathbf{y})\frac{\partial U}{\partial x_s}+\varepsilon^2\left[W(y)\frac{\partial U}{\partial t}+W^{rp}(\mathbf{v})\frac{\partial^2 U}{\partial x_r\,\partial x_p}\right] \qquad (1.5)$$

где $W(\mathbf{y})$, $W^{rp}(\mathbf{y})$ — Y-периодические решения задач

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\sigma_{kj}(\mathbf{y})\frac{\partial W}{\partial y_j}\right]=\alpha(\mathbf{y})-\langle\alpha\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\sigma_{kj}(\mathbf{y})\frac{\partial W^{rp}}{\partial y_j}\right]=\sigma_{rp}{}^*-\sigma_{rp}-\frac{\partial}{\partial y_k}(\sigma_{kr}W^p)-\sigma_{rj}\frac{\partial W^p}{\partial y_j}$$

удовлетворяющие условиям $\langle W\rangle=0$, $\langle W^{rp}\rangle=0$.

Осредненная система (1.4) имеет тот же вид, что и глобально осредненная стохастическая система [5, 6]. Отличие состоит в том, что в периодическом случае указана явная процедура вычисления тензора σ^* и параметров осредненных уравнений λ и γ. Как показано в [2], поля U и $\mathbf{V}$ — средние по малому объему в пространстве медленной переменной x, содержащему достаточно много ячеек-периодов, являются макроскопическими полями и в терминах U и $\mathbf{V}$ могут быть записаны обычные интегральные условия сохранения для произвольных макроскопических областей. При этом идентичность осреднения поля скоростей по объему и поверхности [11] обеспечивается выполнением условия $\operatorname{div}_y \mathbf{v}^\circ=0$, вытекающего из уравнений (1.1), (1.3).

2. Для анализа полей в фазах композитной системы введем индикаторную функцию быстрой переменной y

$$z_i(\mathbf{y})=\begin{cases}1, & \mathbf{y}\in Y_i\\ 0, & \mathbf{y}\in Y/Y_i\end{cases}$$

и среднее локальное по медленной переменной x и времени t значение функции в i-й фазе

$$\varphi_i(x,t)=\langle\varphi\rangle_i=\langle\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},t)z_i(\mathbf{y})\rangle\theta_i^{-1},\quad \theta_i=|Y_i|/|Y|$$

где θ_i — объемная доля i-й фазы в ячейке-периоде.

Перейдя теперь к условному осреднению исходной системы (1.1) и учитывая, что операция условного осреднения коммутирует с дифференцированием по времени t и медленной переменной x, получим систему уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_i+\alpha_i\frac{\partial U_i}{\partial t}+\theta_i^{-1}Q_i=f,\qquad \mathbf{V}_i=-\sigma_i(\nabla U_i+\theta_i^{-1}\mathbf{P}_i) \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{V}_i=\langle v^\varepsilon\rangle_i,\quad U_i=\langle u^\varepsilon\rangle_i,\quad Q_i=\theta_i\langle\operatorname{div}_y(\mathbf{v}^1+\varepsilon\mathbf{v}^2)\rangle_i$$
$$\mathbf{P}_i=\theta_i\langle\nabla_y(u^1+\varepsilon u^2)\rangle_i$$

и так как u^i, v^i периодичны

$$\sum_i Q_i=0,\qquad \sum_i \mathbf{P}_i=0$$

Легко убедиться, что условно осредненная система (2.1) полностью идентична условно осредненной системе, соответствующей стохастическому варианту задачи [5, 6]. Однако, если в стохастической задаче трактовка уравнений (2.1) как континуальных законов сохранения опирается на очевидный факт многократного и достаточно произвольного рассечения поверхностью представительного контрольного объема различных подобластей неоднородной случайной системы, в периодической системе для идентичности условных средних по макроскопическим объему и поверхности необходимо выполнение некоторых дополнительных условий.

Можно показать, что для фазовых потоков условием равенства средних по объему и поверхности ячейки-периода является отсутствие источников поля $z_i\mathbf{v}^\circ$, эквивалентное ортогональности $\mathbf{v}^\circ$ и нормали к поверхности фазы. Это равносильно условию $\sigma_i=0$, либо при $\sigma_i\neq0$ система слоиста, а движение реализуется вдоль слоев. Такие условия существенно ограничивают класс рассматриваемых сред, лишний раз подчеркивая, что требование равенства поверхносных и объемных средних по каждой ячейке при мультиконтинуальном описании физически неоправданно. Его следует заменить естественным условием равенства поверхностных и объемных средних в макроскопической области, содержащей много не только целых ячеек, но и их «обрезков», примыкающих к границе контрольного объема, которая, таким образом, не может быть произвольной.

Рассматривая систему (2.1) совместно с системой (1.4), можно, как это сделано в стохастической задаче, через поле U выразить U_i, $\mathbf{V}_i$, Q_i, $\mathbf{P}_i$, $\langle\nabla u\rangle_i$ и поток q_i, определяемый соотношением

$$q_i=Q_i+\theta_i\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}_i$$

Идентичность глобально и условно ссредненных уравнений для периодических и стохастических сред приводит к полному формальному совпадению вычисленных в [5, 6] характеристик. Сохраняет силу результат о конечности перетока Q_i в системах с анизотропией при установившихся процессах.

3. Как уже упоминалось выше, в феноменологических теориях для замыкания используются гипотезы о структуре обменных членов. В частности, в [8—10] предполагается пропорциональность перетока Q_i и перепада фазовых давлений. В случае периодических систем подобная гипотеза может быть проверена непосредственными вычислениями. Воздействуя на (1.5) оператором условного осреднения $\langle\ \rangle_i$, получим квадратичное по параметру ε выражение для фазового давления

$$U_i=U+\varepsilon\beta_i^s\frac{\partial U}{\partial x_s}+\varepsilon^2\left[\beta_i\frac{\partial U}{\partial t}+\beta_i^{rp}\frac{\partial^2 U}{\partial x_r\,\partial x_p}\right] \tag{3.1}$$

$$\beta_i^s=\langle W^s(\mathbf{y})\rangle_i,\quad \beta_i=\langle W(\mathbf{y})\rangle_i,\quad \beta_i^{rp}=\langle W^{rp}(\mathbf{y})\rangle_i$$

Если ячейка-период Y содержит две фазы i и j, то межфазный перепад давления $\Delta_{ij}=U_i-U_j$ имеет вид

$$\Delta_{ij}=\theta_j^{-1}\left\{\varepsilon\beta_i^s\frac{\partial U}{\partial x_s}+\varepsilon^2\left[\beta_i\frac{\partial U}{\partial t}+\beta_i^{rp}\frac{\partial^2 U}{\partial x_r\,\partial x_p}\right]\right\}$$

и в общем случае имеет первый порядок по малому параметру ε.

Как показано в [1], если тензор $\sigma(\mathbf{y})$ в ячейке-периоде Y имеет определенные свойства симметрии, то соответствующей симметрией обладают и функции $W^s(\mathbf{y})$. В частности, если плоскость $y_h=0$ является плоскостью симметрии тензора $\sigma(\mathbf{y})$, то функция $W^h(\mathbf{y})$ нечетная по y_h и, следовательно, $\beta_i^h=0$.

Рассмотрим случай, когда тензор $\sigma(y)$ симметричен относительно всех координатных плоскостей, например в центре пространственной ячейки находится шаровое включение. Если $\sigma(\mathbf{y})$ — изотропный тензор, то такая периодическая система микро- и макроизотропна. В соответствии с симметрией $\beta_i^s=0$, $\beta_i^{rp}=\beta_i^\circ\delta_{rp}$ и для параметра $\eta_{ij}=\Delta_{ij}/\varepsilon^2$ получим

$$\eta_{ij}=\theta_j^{-1}\left(\beta_i\frac{\partial U}{\partial t}+\beta_i^\circ\,\nabla^2 U\right)$$

Сравнив это выражение с глобально осредненной системой (1.4) в мезоравновесном приближении ($\varepsilon=0$) при $f=0$ и исключив $\nabla^2 U$, получим

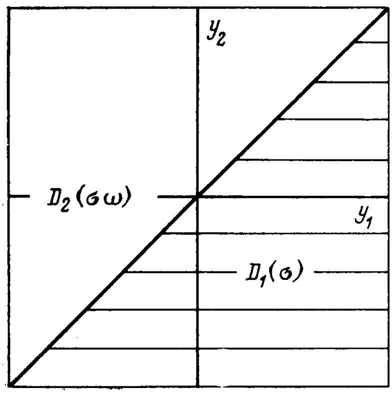
$$\eta_{ij}=\theta_j^{-1}\left(\beta_i+\beta_i^\circ\frac{\alpha^*}{\sigma^*}\right)\frac{\partial U}{\partial t}$$

Легко показать, что в рассматриваемом приближении из (3.5) и (3.7) работы [6] следует для микро- и макроизотропных систем

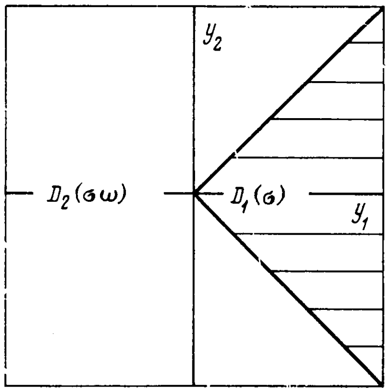
$$Q_i=\theta_i(\sigma^*)^{-1}[\langle\alpha\rangle\sigma_i f_i^*-\alpha_i\sigma^*]\frac{\partial U}{\partial t},\qquad q_i=-\theta_i\alpha_i\frac{\partial U}{\partial t}$$

и, следовательно, для таких систем перепад η_{ij} пропорционален перетоку Q_i и потоку q_i.

Если условия симметрии тензора $\sigma(y)$ не выполнены, для оценки порядка перепада по параметру ε следует решить достаточно сложную задачу на ячейке-периоде.



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве примера рассмотрим модельную задачу на двумерной ячейке, изображенной на фиг. 1, и пусть

$$\sigma(\mathbf{y})=\begin{cases}\sigma\omega, & y_1<y_2\\ \sigma, & y_1>y_2\end{cases}$$

где параметр $\omega\gg1$.

Как показано в [1], в этом случае для функций W^s можно записать асимптотические представления

$$W^s(\mathbf{y})=W_1^s(\mathbf{y})+\omega^{-1}W_2^s(\mathbf{y})$$

и сформулировать соответствующие задачи для определения W_i^s. Решив их, получим

$$\beta_2^1=-I+\frac{1}{6},\qquad \beta_2^2=1-\frac{1}{6},\qquad \beta_1^1=-\beta_2^1,\qquad \beta_1^2=-\beta_2^2$$

где для величины I в данной задаче удается получить точное аналитическое выражение в виде быстро сходящегося ряда

$$I=\frac{4}{\Pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\operatorname{ch}(2n-1)\Pi}{(2n-1)^3\operatorname{sh}(2n-1)\Pi}$$

Сумма ряда с гарантированными семью знаками дает $I=0{,}1473431$, откуда следует $\beta_2^1=0{,}0193235$. Таким образом, линейное по ε приближение для величины межфазного перепада конечно, значимо и имеет вид

$$\Delta_{21}=U_2-U_1=0{,}0386470\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}-\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)$$

Очевидно, величина Δ_{21} положительна, если вектор ∇U направлен из области высокой проводимости D_2 в область D_1, и отрицательна в противном случае. Если вектор ∇U направлен вдоль линии раздела фаз в ячейке ($y_1=y_2$) — перепад нулевой. Заметим, что для стационарных пространственно однородных течений выражение для Δ_{21}, линейное по ε, является точным.

Рассмотрим еще один пример точно решаемой задачи. Пусть ячейка-период имеет вид, изображенный на фиг. 2. Решив соответствующую задачу на ячейке, получим

$$\beta_1{}^1=-\frac{1}{3}+3I_1, \qquad \beta_1{}^2=0$$

$$I_1=\frac{8}{\Pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3\,\mathrm{ch}(n-{}^1/_2)\Pi}$$

и, следовательно, $I_1=0{,}102656$, $\beta_1{}^1=-0{,}025366$. Межфазный перепад, имеющий вид

$$\Delta_{21}=U_2-U_1=0{,}0338216\varepsilon\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

положителен при векторе ∇U, направленнном в правую полуплоскость, и отрицателен в противном случае.

Рассмотрим теперь случай неоднородной слоистой системы, для которой все вычисления удается реализовать и в квадратичном по ε приближении. Пусть в ячейке-периоде ($|y_3|\leqslant{}^1/_2$) параметры таковы

$$\alpha(\mathbf{y})=\begin{cases}\alpha_1 & y_3>y_0\\ \alpha_2, & y_3<y_0\end{cases}, \qquad \sigma(\mathbf{y})=\begin{cases}\sigma_1, & y_3>y_0\\ \sigma_2, & y_3<y_0\end{cases}$$

Пусть, например, $y_0=0$, т. е. $\theta_1=\theta_2=1/2$. Решив задачи для определения W^s, W, $W^{\text{гр}}$, получим $\beta_i{}^s=0$ и выражения для перепада $\eta_{12}=\Delta_{12}/\varepsilon^2$, перетока Q_1 и потока q_1 примут вид

$$\eta_{12}=\frac{1}{12\sigma_{33}{}^*}\left[\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\langle\alpha\rangle}-2\frac{\sigma_2{}^{11}-\sigma_1{}^{11}}{\sigma_1{}^{11}+\sigma_2{}^{11}}\right)\sigma_{11}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_1{}^2}+\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\langle\alpha\rangle}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\frac{\sigma_2{}^{22}-\sigma_1{}^{22}}{\sigma_1{}^{22}+\sigma_2{}^{22}}\right)\sigma_{22}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_2{}^2}+\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\langle\alpha\rangle}+2\frac{\sigma_2{}^{33}-\sigma_1{}^{33}}{\sigma_1{}^{33}+\sigma_2{}^{33}}\right)\sigma_{33}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_3{}^2}\right]$$

$$Q_1=\frac{1}{2\langle\alpha\rangle}\left[(\sigma_1{}^{11}\langle\alpha\rangle-\sigma_{11}{}^*\alpha_1)\frac{\partial^2U}{\partial x_1{}^2}+(\sigma_1{}^{22}\langle\alpha\rangle-\sigma_{22}{}^*\alpha_1)\frac{\partial^2U}{\partial x_2{}^2}+\right.$$
$$\left.+(\langle\alpha\rangle-\alpha_1)\sigma_{33}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_3{}^2}\right] \tag{3.2}$$

$$q_1=-\frac{\alpha_1}{2\langle\alpha\rangle}\left(\sigma_{11}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_1{}^2}+\sigma_{22}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_2{}^2}+\sigma_{33}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_3{}^2}\right)$$

Заметим, что в приведенных выражениях производная по времени исключена с помощью глобально осредненного уравнения

$$\langle\alpha\rangle\frac{\partial U}{\partial t}=\sigma_{11}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_1{}^2}+\sigma_{22}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_2{}^2}+\sigma_{33}{}^*\frac{\partial^2U}{\partial x_3{}^2} \tag{3.3}$$
$$\sigma_{11}{}^*=\langle\sigma^{11}\rangle,\quad \sigma_{22}{}^*=\langle\sigma^{22}\rangle,\quad \sigma_{33}{}^*=\langle(\sigma^{33})^{-1}\rangle^{-1}$$

Легко убедиться, что в общем случае неустановившегося пространственного течения при произвольных α и σ перепад η_{12} не пропорционален перетоку Q_1 или потоку q_1.

Однако при определенных условиях пропорциональность может иметь место. Так если поперечная проводимость слоев одинакова ($\sigma_1{}^{33}=\sigma_2{}^{33}=\sigma^{33}$), то переток и перепад связаны зависимостью

$$Q_1=3\sigma^{33}\eta_{12}$$

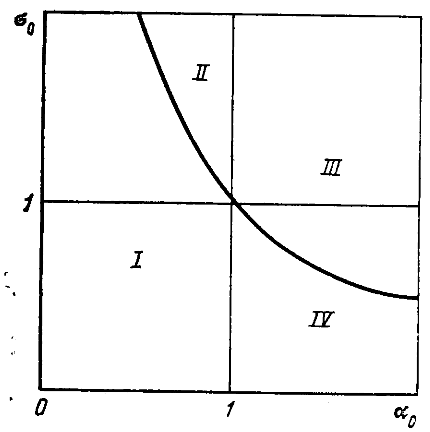
Если слои изотропны, но неоднородны, и глобально осредненное течение имеет поперечную компоненту, переток и перепад не пропорциональны. Если же глобальное течение чисто продольное ($\partial^2U/\partial x_3^2=0$), переток и перепад связаны зависимостью

$$Q_1=\frac{6\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\eta_{12} \tag{3.4}$$

Для чисто поперечного течения ($\partial^2U/\partial x_1^2=\partial^2U/\partial x_2^2=0$) связь между Q_1 и η_{12} иная

$$Q_1=\frac{3\sigma_2(\alpha_0-1)}{\alpha_0\sigma_0-1}\eta_{12},\qquad \alpha_0=\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\qquad \sigma_0=\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{3.5}$$

На фиг. 3 первый квадрант плоскости (α_0, σ_0) разделяется прямой $\alpha_0=1$ и гиперболой $\alpha_0\sigma_0=1$ на четыре области, внутри которых знак коэффициента пропорциональности постоянный. Очевидно, в областях II и IV знаки Q_1 и η_{12} различны, что означает переток из фазы с пониженным фазовым давлением в фазу, давление в которой выше среднего. Отметим, что в феноменологических построениях, использующих гипотезу пропорциональности, обычно принимается идентичность знаков.



Фиг. 3

Если в слоистой системе с изотропными слоями течение стационарно, переток и перепад пропорциональны и имеют одинаковый знак

$$Q_1=\frac{3\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\eta_{12} \tag{3.6}$$

Таким образом, во всех рассмотренных случаях, относящихся к одной и той же слоистой системе, при обращении в нуль какой-либо из производных, входящих в глобально осредненное уравнение (3.2), переток и перепад пропорциональны. Однако коэффициент пропорциональности в соответствии с формулами (3.4)—(3.6) существенно зависит от рассматриваемого процесса, а в случае чисто поперечного течения в зависимости от соотношения проводимостей и упругоемкостей слоев коэффициент может менять знак. Таким образом, коэффициент пропорциональности зависит не только от геометрических и физических параметров слоистой системы, но и от реализуемого процесса, точнее, от макроскопических граничных условий. Насколько эта зависимость чувствительна к процессу, показывает сопоставление следующих примеров. Сравним чисто продольное течение в квазистационарной фазе с чисто стационарным и квазипродольным течением и соответствующие им формулы (3.4) и (3.6). Очевидно, коэффициенты пропорциональности различаются в 2 раза. Аналогичное сравнение течений чисто поперечного в квазистационарной фазе со стационарным и квазипоперечным приводит к сопоставлению формул (3.5) и (3.6). В этом случае можно отметить не только количественное, но и качественное различие коэффициентов. Заметим, что в соответствии с (3.2) коэффициент пропорциональности между перетоком и перепадом есть отношение линейных комбинаций производных, входящих в глобально осредненное уравнение. Очевидно, поведение этого отношения в окрестности нулевых значений всех производных зависит от скорости стремления к нулю каждой из производных и в принципе может быть каким угодно. Иными словами, коэффициент пропорциональности существенно зависит от процесса, реализуемого в неоднородной системе.

Аналогичные выводы следуют из рассмотрения слоистых систем, составленных из анизотропных слоев, и, следовательно, в достаточно общем случае такие параметры мультиконтинуального описания, как перетоки Q_i, перепады η_{ij}, а также потоки q_i, являются попарно-независимыми в том смысле, что, за исключением некоторых частных ситуаций, любой из этих параметров не пропорционален остальным. Таким образом, оценивая гипотезу пропорциональности перетока перепаду, можно, указывая область ее применимости — полностью изотропные системы, в целом считать гипотезу неудовлетворительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 373 с.
3. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Хатьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. Вып. 5(209). С. 65—133.
4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 35. № 1. С. 11—58.
5. Швидлер М. И. Условное осреднение фильтрационных полей в гетерогенных средах // ДАН СССР. 1986. Т. 288. № 5. С. 1074—1078.
6. *Швидлер М. И.* Об условном осреднении неустановившихся фильтрационных полей в случайных композитных пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 69—74.
7. *Швидлер М. И.* Об условном осреднении уравнений фильтрационного переноса в случайных композитных пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 75—81.
8. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1948. Т. 12. № 1. С. 27—45.
9. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однофазных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852—864.
10. *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наук. думка. 1984. 111 с.
11. *Николаевский В. Н.* Пространственное осреднение и теория турбулентности. Механика. Вихри и волны. Сб. статей. М. Мир, 1984. С. 266—335.

Москва

Поступила в редакцию
26.XI.1987