МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1988

УДК 532.529.5:532.135

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ПЕН

ПУТЯТИН Б. В.

Пена представляет собой дисперсную систему, состоящую из пузырьков газа, диспергированных в жидкости [1, 2]. В хозяйственной практике широко распространены концентрированные пены, устойчивость которых обеспечивается наличием поверхностно-активных веществ. Гидродинамика и реология таких пен мало изучена. Благодаря эффектам поверхностного натяжения они проявляют свойства вязкоупругости, что особенно характерно для достаточно «сухих» пен.

В работе на основе общей теории механики деформируемых континуумов [3–5] получена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих пену как сплошную вязкоупругую сжимаемую среду.

Будем использовать следующие основные допущения. Взаимопроникающее движение жидкой и газовой фаз отсутствует (одножидкостное приближение). Слияние пузырьков (коалесценция) и их дробление не происходят. Жидкая и газовая фазы находятся в локальном термодинамическом и механическом равновесии. Жидкая фаза представляет собой несжимаемую вязкую жидкость. Отдельный пузырек (вместе со своей границей) ведет себя как упругое тело. Заметим, что первые три допущения будут справедливы, если характерное время изучаемых механических процессов мало́ по сравнению с временем истечения жидкости из пены под действием сил тяжести и временем ее разрушения. С другой стороны, характерное время должно быть велико по сравнению с временем установления локального термодинамического и механического равновесия в пене.

В связи с тем что микродеформации пузырьков и окружающей их жидкости могут сильно различаться, введем в рассмотрение два различных осредненных тензора скоростей микродеформаций пузырьков и жидкости $\mathbf{e}^b$ и $\mathbf{e}^f$, относящихся к одной и той же частице пены. Эти тензоры должны быть связаны с осредненным тензором скоростей макродеформаций пены $\mathbf{e}$ условием совместного деформирования, которое возьмем в виде

$$\mathbf{e}=(1-\alpha)\mathbf{e}^b+\alpha\mathbf{e}^f \tag{1}$$

где α — объемное влагосодержание пены. Соотношение (1) может быть получено как результат осреднения по объему макрочастицы пены истинных тензоров скоростей микродеформаций.

Аналогично (1) для соответствующих тензоров вихря $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^b$, $\boldsymbol{\omega}^f$ можно записать $\boldsymbol{\omega}=(1-\alpha)\boldsymbol{\omega}^b+\alpha\boldsymbol{\omega}^f$. Будем предполагать, что мгновенные угловые скорости вращения пузырьков и макрочастицы пены, содержащей эти пузырьки, примерно равны, тогда

$$\boldsymbol{\omega}\approx\boldsymbol{\omega}^b\approx\boldsymbol{\omega}^f \tag{2}$$

Напряженное состояние частицы пены в силу допущения о локальном механическом равновесии фаз будем характеризовать единым тензором напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{G}+\boldsymbol{\tau},\quad \boldsymbol{\tau}=2\mu\mathbf{e}^f \tag{3}$$

где $\mathbf{G}$ — метрический тензор, p — давление пены, $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор напряжений, μ — вязкость жидкой фазы. Связь между тензорами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{e}^f$ соответствует реологии вязкой несжимаемой жидкости [3, 5]. Прежде чем установить связь между тензорами $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{e}^b$, рассмотрим подробнее реологию отдельного пузырька.

По предположению, пузырек ведет себя как упругое тело, напряженно-деформированное состояние которого определяется тензорами напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ввиду малости размеров пузырька это напряженно-деформированное состояние можно считать однородным. В очень концентрированных пенах при $\alpha \leqslant 0{,}1-0{,}05$ пузырьки приобретают форму многогранников, разделенных очень тонкими жидкими пленками. При этом напряженно-деформированное состояние пузырька, строго говоря, не является однородным. Поэтому последующие результаты следует с осторожностью распространять на этот случай. Будем рассматривать некоторый осредненный пузырек, который движется вместе с макрочастицей пены, а деформируется в соответствии с осредненными тензорами $\mathbf{e}^b$ и $\boldsymbol{\omega}^b$. Внутри себя он содержит газ со средней по макрочастице плотностью газа ρ^g, температурой T, равной температуре макрочастицы, и давлением p^g, вычисляемым из газового уравнения состояния.

Для свободной энергии пузырька f^b, рассчитанной на единицу его массы, можно записать [2]

$$f^b = f^g + f^*, \qquad f^* = S\Sigma/\rho^g \tag{4}$$

Здесь f^g — свободная энергия газа, заключенного в пузырьке, f^* — свободная энергия границы пузырька, $\Sigma(T)$ — натяжение поверхности раздела газ — жидкость, которое будем считать зависящим от температуры T, S — удельная поверхность пузырька (отношение площади поверхности к объему). Из уравнения притока тепла для пузырька с учетом (3) следует равенство [3]

$$\frac{df^b}{dt} = -s^b\frac{dT}{dt} + \frac{p}{(\rho^g)^2}\frac{d\rho^g}{dt} + \frac{\boldsymbol{\tau}:\mathbf{e}^b}{\rho^g} \tag{5}$$

где s^b — энтропия пузырька на единицу его массы, t — время. С другой стороны, для газа в пузырьке аналогичное равенство имеет вид

$$\frac{df^g}{dt} = -s^g\frac{dT}{dt} + \frac{p^g}{(\rho^g)^2}\frac{d\rho^g}{dt}$$

Здесь s^g — энтропия газа. Вычитая из первого второе, с учетом (4) получим выражение

$$\frac{df^*}{dt} = -s^*\frac{dT}{dt} - \frac{p^*}{(\rho^g)^2}\frac{d\rho^g}{dt} + \frac{\boldsymbol{\tau}:\mathbf{e}^b}{\rho^g} \tag{6}$$

$$s^* = s^b - s^g, \qquad p^* = p^g - p \tag{7}$$

где s^* — энтропия поверхности, а p^* — капиллярное давление. Задание f^* как функции T и инвариантов тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ вместе с требованием тождественного выполнения равенства (6) для всевозможных процессов позволяет установить зависимость $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ [3].

Положим $S = \lambda(\rho^g)^{1/3}$. Из физического смысла удельной поверхности S следует, что величина λ при изотропном деформировании пузырька должна оставаться постоянной. Потребуем поэтому, чтобы изменение свободной энергии f^*, происходящее в результате искажения формы пузырька, обусловливалось работой девиатора напряжений, т. е.

$$\Sigma(\rho^g)^{-2/3}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\boldsymbol{\tau}:\mathbf{e}^b}{\rho^g} \tag{8}$$

Предположим, что связь между тензорами $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ квазилинейна. Необходимым и достаточным условием этого с учетом (8) является зависимость функции λ только от плотности ρ^g и первого инварианта $I = \varepsilon_k^{\ k}$ тензора деформаций ε [3]. При этом искомая связь между τ и ε имеет вид

$$\frac{\tau}{\Sigma(\rho^g)^{1/3}}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial I}-\rho^g\frac{\partial\lambda}{\partial\rho^g}\right)\mathrm{G}-2\frac{\partial\lambda}{\partial I}\varepsilon \tag{9}$$

Из условия равенства нулю первого инварианта тензора τ и зависимости (9) вытекает, что функция $\lambda(\rho^g, I)$ должна удовлетворять уравнению

$$3\left(\frac{\partial\lambda}{\partial I}-\rho^g\frac{\partial\lambda}{\partial\rho^g}\right)-2I\frac{\partial\lambda}{\partial I}=0$$

откуда следует

$$\lambda=\lambda[\sqrt{3-2I}(\rho^g)^{-1/3}] \tag{10}$$

Для малых деформаций элементарного параллелепипеда, ребра которого ориентированы вдоль главных осей тензора ε, отношение площади поверхности к его объему в деформированном состоянии пропорционально $3-I$. Если принять, что это условие соблюдается и для малых деформаций пузырька, т. е. $S\sim3-I$, то получим $\lambda\sim(3-I)(\rho^g)^{-1/3}$. Примем поэтому

$$\lambda=\lambda_1\sqrt{3-2I}(\rho^g)^{-1/3}\quad(\lambda_1=\mathrm{const}) \tag{11}$$

что соответствует (10). При изотропном деформировании пузырька имеем

$$S=4\pi r^2/({}^4/_3\pi r^3)=3/r=\sqrt{3(3-2I)}/r_0$$

где r и r_0 — радиусы пузырька в деформированном и исходном состоянии. Поэтому из (11) для постоянной λ получаем $\lambda_1=\sqrt{3}/r_0$.

Из уравнения (6) с учетом (8) вытекает равенство

$$\lambda\frac{d}{dt}[\Sigma(\rho^g)^{-2/3}]=-s^*\frac{dT}{dt}-\frac{p^*}{(\rho^g)^2}\frac{d\rho^g}{dt}$$

из которого следует

$$p^*={}^2/_3\Sigma\lambda(\rho^g)^{1/3}={}^2/_3\sqrt{3-2I}\Sigma\lambda_1$$

$$s^*=-\lambda(\rho^g)^{-2/3}\frac{d\Sigma}{dT}=-\frac{3p^*}{2\Sigma\rho^g}\frac{d\Sigma}{dT} \tag{12}$$

Соотношение (9) между тензорами τ и ε примет при этом окончательный вид:

$$\tau=\left[\frac{p^*}{2}-\frac{2(\lambda_1\Sigma)^2}{3p^*}\right]\mathrm{G}+\frac{4(\lambda_1\Sigma)^2}{3p^*}\varepsilon \tag{13}$$

$$\varepsilon=\left[\frac{1}{2}-\frac{3(p^*)^2}{8(\lambda_1\Sigma)^2}\right]\mathrm{G}+\frac{3p^*}{4(\lambda_1\Sigma)^2}\tau \tag{14}$$

Между кинематическими тензорами, характеризующими деформацию пузырька, и тензором ε существует связь [3, 5]

$$d\varepsilon/dt+\varepsilon(\mathrm{e}^b+\omega^b)+(\mathrm{e}^b-\omega^b)\varepsilon=\mathrm{e}^b$$

которую, учитывая (1), (2), можно представить в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\varepsilon\left(\frac{\mathrm{e}-\alpha\mathrm{e}^f}{1-\alpha}+\omega\right)+\left(\frac{\mathrm{e}-\alpha\mathrm{e}^f}{1-\alpha}-\omega\right)\varepsilon=\frac{\mathrm{e}-\alpha\mathrm{e}^f}{1-\alpha} \tag{15}$$

Соотношение (15) вместе с (3), (14) представляют собой по терминологии [5] реологические релаксационные уравнения состояния, связывающие компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ непосредственно с кинематическими характеристиками макродвижения пены.

Перейдем теперь к окончательной формулировке уравнений пены, как сплошной среды. Уравнения неразрывности и движения имеют традиционный вид

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0,\qquad \frac{\rho d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{g}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{16}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{g}$ — ускорение сил тяжести. Влагосодержание α и плотность газа ρ^g связаны с плотностью пены формулами

$$\alpha=\frac{\rho}{\rho_*},\qquad \rho^g=\rho\rho_*\frac{1-\beta}{\rho_*-\rho},\qquad \rho_*=\frac{\rho^f}{\beta} \tag{17}$$

где ρ^f — плотность жидкости, а β — массовое влагосодержание в частице пены, которое может быть переменным по частицам.

Из (1) и (3) следует, что величина работы внутренних напряжений имеет вид

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{e}}{\rho}=\frac{(1-\alpha)}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{e}^b+\frac{\alpha}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{e}^f=\frac{(1-\alpha)p}{\rho\rho^g}\frac{d\rho^g}{dt}+\frac{(1-\alpha)}{\rho}\boldsymbol{\tau}:\mathbf{e}^b+\frac{\alpha}{2\mu\rho}\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau}$$

Последний член этого равенства представляет собой скорость необратимой диссипации механической энергии, вызываемой вязкостью, и является неотрицательной величиной. Поэтому для скорости изменения энтропии пены s на единицу массы можем принять

$$T\frac{ds}{dt}=q+\frac{\alpha}{2\mu\rho}\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau} \tag{18}$$

где q — внешний приток тепла. В этом случае из уравнения притока тепла для скорости изменения свободной энергии f единицы массы пены получим

$$\frac{df}{dt}=-s\frac{dT}{dt}+\frac{(1-\alpha)}{\rho}\left(\frac{p}{\rho^g}\frac{d\rho^g}{dt}+\boldsymbol{\tau}:\mathbf{e}^b\right) \tag{19}$$

По аналогии с (4) положим $f=\beta f^f+(1-\beta)f^b$, где f^f и f^b — свободные энергии жидкости и пузырьков на единицу массы жидкости и пузырьков соответственно. Поскольку $(1-\alpha)/\rho=(1-\beta)/\rho^g$, то из (5), (19) следует

$$\frac{df^f}{dt}=\frac{(1-\beta)s^b-s}{\beta}\frac{dT}{dt}$$

Последнее уравнение совпадает с соответствующим термодинамическим тождеством для несжимаемой жидкости, если принять

$$s=\beta s^f+(1-\beta)s^b \tag{20}$$

где s^f — энтропия жидкости, при этом равенство (19) будет тождественно выполнено.

Таким образом, учитывая (7), (12), энтропию пены s можем считать известной функцией температуры T, плотности ρ и, вообще говоря, капиллярного давления p^*, если заданы зависимости $s^f(T)$, $s^g(\rho^g, T)$ и $\Sigma(T)$, фиксирующие свойства фаз и межфазной границы. В практических целях можно ограничиться случаем несжимаемой жидкости и совершенного газа с постоянными теплоемкостями c и c_V соответственно, при этом для энтропий жидкости и газа имеем формулы

$$s^f=c\ln T+\text{const},\qquad s^g=c_V\ln[T(\rho^g)^{1-\gamma}]+\text{const} \tag{21}$$

где γ — коэффициент Пуассона газа, а для давления газа — уравнение состояния $p^g=\rho^g RT$, где R — газовая постоянная. Из (7) следует тогда уравнение состояния пены

$$p=\rho^g RT-p^* \tag{22}$$

Будем предполагать, что внешний приток тепла q в уравнении (18) определяется теплопроводностью

$$q=(1/\rho)\nabla\cdot(k\nabla T),\qquad k={}^2/_3\alpha k^f+(1-\alpha)k^g \tag{23}$$

где для коэффициента теплопроводности использована зависимость Манегольда [1], k^f и k^g — коэффициенты теплопроводности жидкой и газовой фаз соответственно.

В результате замкнутая система уравнений, описывающих течения пены, состоит из уравнений неразрывности и движения (16), реологических уравнений (3), (14), (15), уравнения энергии (18), в котором энтропия пены s определяется с учетом (7), (12), (20), (21), а приток тепла q — по (23). К этим уравнениям следует добавить соотношения (17), определяющие влагосодержание α и плотность газа ρ^g, а также уравнение состояния (22).

В заключение заметим, что сформулированные уравнения допускают следующие две предельные формы. Во-первых, если принять, что пузырьки представляют собой недеформируемые твердые включения и, следовательно, $\mathbf{e}^b=0$, $\rho=\mathrm{const}$, то приходим к модели несжимаемой вязкой жидкости с эффективной вязкостью μ/α. Другой предельный случай имеет место, если в (1) положить $\alpha=0$, что физически соответствует случаю очень «сухих» малоподвижных пен. При этом получаем модель некоторой упругой среды. Из (13) следует, что для малых деформаций такой среды модуль сдвига равен ${}^1/_3\Sigma S_0$, где $S_0=S(I=0)=\sqrt{3}\lambda_1$. В [6, 7] другим путем получено значение модуля сдвига ${}^4/_{15}\Sigma S_0$, которое мало отличается от предыдущего.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихомиров В. К.* Пены. Теория и практика их получения и разрушения. М.: Химия, 1983. 264 с.
2. *Шелудко А.* Коллоидная химия. М.: Мир, 1984. 320 с.
3. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
4. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
6. *Дерягин Б. В.* Упругие свойства пен // Журн. физ. химии. 1931. Т. 2. Вып. 6. С. 745–753.
7. *Дерягин Б., Обухов Е.* Упругие свойства пен и тонких пленок // Журн. физ. химии. 1936. Т. 7. Вып. 3. С. 297–302.

Москва

Поступила в редакцию
8.IX.1986