

УДК 532.529.5

**О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ
ЧАСТИЦ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ**

**ЗОРИНА И. С., КУРШАКОВ М. Ю., МИХАТУЛИН Д. С.,
ПОЛЕЖАЕВ Ю. В., ЧИРКОВ И. В.**

Рассматривается в одномерной постановке задача о построении контура оптимального сопла для разгона частиц. В [1] численным методом решается подобная задача в общей постановке. В настоящей работе в отличие от [1] решение проводится в аналитическом виде для частного случая малой концентрации твердых частиц, в таком же виде решается задача о движении частицы в однородном потоке.

При решении задачи о нахождении оптимального профиля сопла или, что равносильно, оптимального распределения по длине сопла газодинамических параметров (скорости газа или его давления) обратимся к одномерному уравнению движения неразрушающейся частицы в газовом потоке, записанному в виде

$$m_p \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{2} C_d S_p \rho (V - V_p) |V - V_p| \quad (1)$$

где V — скорость газа, ρ — плотность газа, S_p — площадь миделевого сечения частицы, C_d — коэффициент аэродинамического сопротивления частицы, m_p , V_p — масса и скорость частицы.

Принимая во внимание, что течение газа по соплу изэнтропическое и частица всюду разгоняется, уравнение ее движения можно преобразовать к виду

$$\frac{dV_p}{dx} = \frac{3}{4} C_d \frac{\rho}{\rho_p d_p} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{1/(\kappa - 1)} \frac{(\lambda - V_p')^2}{V_p'} \quad (2)$$

$$V_p' = \frac{V_p}{V^*}, \quad \lambda = \frac{V}{V^*}, \quad V^* = \sqrt[3]{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}}$$

Здесь ρ_0 , p_0 — плотность и давление газа в форкамере, κ — показатель изэнтропы, ρ_p , d_p — плотность материала и размер частицы. Скорость газа λ взаимосвязана с геометрией сопла, что дает возможность рассматривать ее в дальнейшем в качестве переменного параметра, варьируемого с целью получения высоких характеристик сопла.

Исходную задачу отыскания оптимального профиля сопла сформулируем как отыскание такого распределения скорости газа при изэнтропическом течении, которое на наименьшем участке $(x - x_0)$ обеспечит разгон частицы от скорости V_{p0}' до V_p' . Это вариационная задача, заключающаяся в отыскании экстремума функционала

$$x - x_0 = \Theta[\lambda(V_p')] = \int_{V_{p0}'}^{V_p'} F[V_p', \lambda(V_p')] dV_p' \quad (3)$$

Уравнение Эйлера, определяющее экстремаль $\lambda = \lambda(V_p')$, имеет в этом

случае вид

$$\frac{d}{d\lambda} F[V_p', \lambda(V_p')] = 0$$

При известной зависимости $\lambda(V_p')$ нахождение скорости газа по длине сопла сводится к взятию интеграла (3). Если $C_d = \text{const}$, то зависимость $\lambda(x)$, определяющая оптимальный профиль контура сопла, может быть получена в аналитическом виде. Введем новую переменную $x' = C_d(\rho_0/\rho_p)(x/d_p)$ и будем искать решение уравнения (2) в виде

$$x' - x_0' = \frac{4}{3} \int_{V_{p0}'}^{V_{p2}} \left[\frac{V_p'}{(\lambda - V_p')^2} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{-1/(\kappa - 1)} \right] dV_p' \quad (4)$$

Уравнение Эйлера для экстремали в этом случае имеет вид

$$\frac{2V_p'}{(\lambda - V_p')^3} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{-1/(\kappa - 1)} \left[1 - \frac{\lambda(\lambda - V_p')}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{-1} \right] = 0 \quad (5)$$

Это равенство выполняется только в том случае, когда обращается в нуль выражение в квадратных скобках, откуда

$$V_p' = \kappa\lambda - (\kappa + 1)/\lambda \quad (6)$$

После несложных преобразований и введения $z = (\kappa - 1)\lambda^2/(\kappa + 1)$ интеграл (4) приводится к виду, удобному для интегрирования

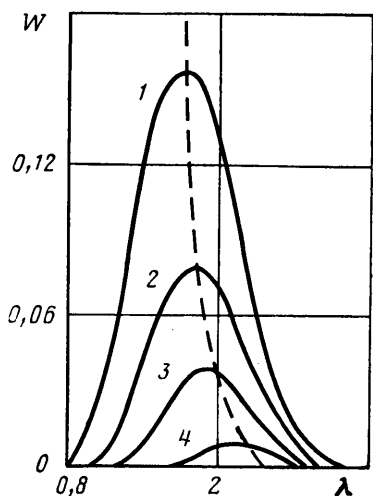
$$x' - x_0' = \frac{1}{(\kappa - 1)^2} \int_{z_0}^z \frac{\kappa^2 z^2 - (\kappa - 1)^2}{z(1 - z)^{(2\kappa - 1)/(\kappa - 1)}} dz$$

Для $\kappa = (n - 1)/(n - 2)$, где $n = 3, 4, 5 \dots$, решение можно получить в аналитическом виде

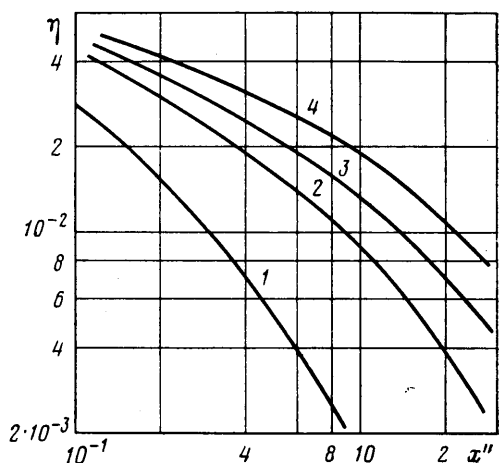
$$x' - x_0' = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{(n - 1)(1 - z)^{n - 1}} - \frac{1}{(n - 2)(1 - z)^{n - 2}} \right) + \ln \frac{1 - z}{z} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n - 1)(n - 2) \dots (n - i)^{i-1}}{i! i(1 - z)^i} \right]_{z_0} \quad (7)$$

Здесь z_0 определяется из (5) и (6) и при $V_{p0}' = 0$ будет равно $(\kappa - 1)/\kappa$.

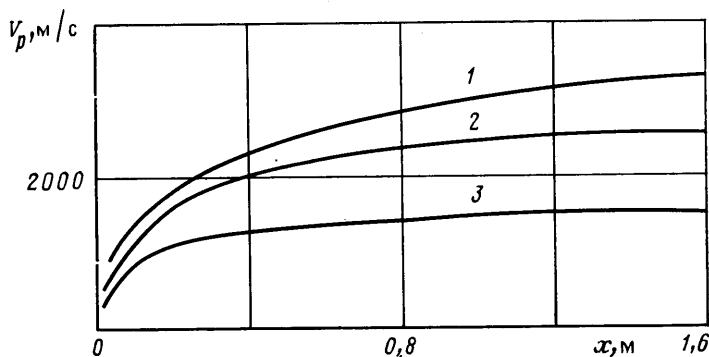
Для более полного представления полученных результатов рассмотрим физическую сторону оптимизации параметров потока. Для того чтобы разогнать частицу до требуемой скорости на минимальной длине пути, очевидно, должны быть реализованы условия максимальной величины аэродинамической силы со стороны потока на частицу. Эта единственная в принятой модели сила определена соотношением (2) и при $C_d = \text{const}$ для частицы известных размеров и формы зависит только от скорости и плотности газа. Но поскольку рассматривается изэнтропическое течение, при котором плотность газа целиком определяется его скоростью, аэродинамическая сила оказывается зависимой только от скорости газа, что и нашло свое отражение в уравнении движения (2). Графически это уравнение представлено на фиг. 1, где $W = (1/C_d)(dV_p'/dx)$. Цифрами 1-4 показаны кривые для значений скоростей частиц 0,8; 1,0; 1,2; 1,6. Нетрудно усмотреть два случая, когда частица, обладающая скоростью V_p' , вообще не будет взаимодействовать с потоком газа. Первый имеет место при равновесном течении частиц и газа $\lambda = V_p'$, а второй при максимальной скорости газа $\lambda = \sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)}$, когда его плотность убывает до нуля. В интервале $V_p' < \lambda < \sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)}$ существует некоторое, зависящее от



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

V_p' (см. фиг. 1) значение λ^* , при котором величина ускорения частицы dV_p'/dx максимальна. В оптимальном сопле оно должно быть максимальным всюду по траектории движения частицы, т. е. с изменением ее скорости должна изменяться и скорость газа в соответствии с (5), а вместе с ней и профиль сопла. Из этих условий и получено решение (7).

На фиг. 2 приведены графики изменения скорости частиц Al_2O_3 диаметром 100 мкм, имеющих начальную скорость $V_{p0}'=0$, при разгоне в потоках водорода (кривая 1), гелия (2) и воздуха (3) с давлением торможения 10 МПа и температурой торможения 2000 К.

Рассмотрим теперь случаи работы такого сопла в нерасчетных режимах. Все факторы, которые могут привести к нерасчетным режимам, за исключением показателя изоэнтропы, заключены в одном обобщающем комплексе $m=C_d(\rho/\rho_0)/d_p$. Этот комплекс имеет размерность, обратную длине, и входит масштабным коэффициентом в безразмерную координату решения (7). Оптимизация достигается только для данного, вполне конкретного значения m . Назовем это значение расчетным и обозначим через m^* . Только в этом случае частица будет иметь в каждом сечении сопла скорость, для которой параметры потока обеспечивают ей максимальное ускорение. Обозначим эту скорость через $(V_p')^*$. Если равенство $m=m^*$ не реализуется, например за счет отклонения размера частиц или плотности ρ_0 газа в форкамере от расчетных значений, то такое сопло уже не будет оптимальным. При $m>m^*$ скорости частиц лежат выше $(V_p')^*$ и находятся в коридоре $(V_p')^*<V_p'<\lambda$. Ширина этого коридора

уменьшается по мере набора скорости крупными частицами. При $m < m^*$ частица начнет отставать $V_p' < (V_p')^*$, причем, не добрав скорость на начальном участке траектории, она все более будет удаляться от условий экстремальных параметров разгона. Полидисперсный поток в этом случае будет характеризоваться размытым спектром скорости частиц.

Отметим одну особенность полученного решения. Из условия (5), связывающего текущие безразмерные скорости газа и частиц, которое обеспечивает наибольшую скорость частиц, следует, что любым $V_p' \geq 0$ отвечают $\lambda \geq \sqrt{(\kappa+1)/\kappa} > 1$. Другими словами, оптимальное сопло всюду сверхзвуковое. В реальном сопле имеется дозвуковая часть и отрезок сверхзвуковой $\lambda < \sqrt{(\kappa+1)/\kappa}$. Теоретически этот участок можно сделать сколь угодно малым путем формирования крутых стенок сопла и переходом на многосопловую конструкцию (сопловую решетку). Практически такая целесообразность может возникнуть, например, при необходимости избежать перегрева частиц газовым потоком, поскольку основная доля роста их температуры приходится именно на дозвуковую часть. Дозвуковая часть оказывает сильное влияние на траектории движения частиц [3] и поэтому выбор ее длины и формы может быть подчинен задаче формирования широкой струи с необходимым распределением плотности потока частиц по сечению.

Профилирование сопла с оптимальным распределением скорости потока тесно связано с выравниванием скорости частиц при разгоне полидисперсного потока. Если по условиям испытаний требуются относительно небольшие скорости, соответствующие начальному участку сопла, то следует учитывать, что из-за достаточно большой ширины коридора параметров на этом участке, а также высоких градиентов изменения параметров спектр скорости частиц в полидисперсном потоке будет сильно размыт. Для выравнивания скорости частиц в этом случае необходим участок с постоянной величиной скорости газа по длине, в котором коридор значений скорости частиц разных размеров будет сужаться, а значение скорости приближаться к скорости газа. Числа Рейнольдса для частиц ввиду малости их отставания от газа по скорости уже не будут большими и поэтому для вычисления коэффициента сопротивления необходимо пользоваться зависимостью, описывающей стандартную кривую сопротивления [2]

$$C_d = \frac{1}{4\eta} (\eta + b\sqrt{\eta} + c) \quad (8)$$

$$\eta = \frac{V - V_p}{V}, \quad b = \frac{23,2}{\sqrt{\text{Re}_p}}, \quad c = \frac{84,48}{\text{Re}_p}, \quad \text{Re}_p = \frac{\rho V d_p}{\mu}, \quad x'' = \frac{\rho x}{\rho_p d_p}$$

Уравнение движения частицы запишется в виде

$$\frac{dV_p}{dx''} = \frac{3}{4} C_d \frac{(V - V_p)^2}{V_p} \quad (9)$$

С учетом (8) преобразуем (9) к виду, удобному для интегрирования

$$dx'' = \frac{16}{3} \frac{\eta - 1}{\eta(\eta + b\sqrt{\eta} + c)} d\eta$$

Решением полученного уравнения является

$$x'' = \frac{32}{3} \left[\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(\alpha - \beta)} \ln(z - \alpha) - \frac{\beta^2 - 1}{\beta(\alpha - \beta)} \ln(z - \beta) - \frac{1}{\alpha\beta} \ln z \right]_z$$

$$\alpha = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = -\frac{3,981}{\sqrt{\text{Re}_p}}; \quad \beta = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = -\frac{21,219}{\sqrt{\text{Re}_p}},$$

$$z = \sqrt{\eta}$$

Это решение позволяет определить длину участка с постоянными параметрами течения газа, на которой частица разгоняется от скорости η_0 до η (см. фиг. 3). Цифрами 1—4 показаны значения Re_p , 10^2 ; $6 \cdot 10^2$; $2 \cdot 10^3$; 10^4 . На этом участке происходит дополнительный разгон крупных фракций частиц и тем самым уменьшение разброса скоростей частиц в полидисперсном потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганжело А. Н. О решении некоторых вариационных задач двухфазной газодинамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 52—58.
2. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: Справочник. Т. 1. М.: ВИНТИ АН СССР, 1971. 266 с.
3. Игнатов С. Ф., Михатулин Д. С., Чирков И. В. Результаты исследования движения частиц в сопле Лавала // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 4. С. 163—168.

Москва

Поступила в редакцию
21.VII.1987