

УДК 532.527.2.013.4

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО  
ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА**

**ЖУКОВ М. Ю., КОЛЕСОВ В. В., ЦЫВЕНКОВА О. А.**

Исследуется устойчивость конвективного движения жидкости между двумя вращающимися нагретыми цилиндрами в случае отсутствия внешних сил. Математическая модель для описания конвекции получена из общих уравнений [1, 2] в предположении, что плотность жидкости, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и коэффициент вязкости зависят лишь от температуры, работа сил давления и вязкая диссипация пренебрежимо малы. При этом не предполагается малость коэффициента температурного расширения жидкости, что отличает рассматриваемые модели от классической модели Обербека – Буссинеска [1, 3, 4].

**1. Постановка задачи.** Пусть вязкая однородная теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными концентрическими цилиндрами с радиусами  $R_1'$  и  $R_2'$  ( $R_1' < R_2'$ ). Угловые скорости и температуры внутреннего и внешнего цилиндров соответственно  $\Omega_1', T_1'$  и  $\Omega_2', T_2'$ .

Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют, плотность жидкости и все кинетические коэффициенты зависят лишь от температуры. Тогда общие уравнения конвекции в безразмерных переменных имеют вид

$$\varepsilon_0 \beta \frac{dT}{dt} = \text{div } \mathbf{v}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \Pi + \mu_0 \{ \eta \Delta \mathbf{v} + 2(\nabla \eta \nabla) \mathbf{v} + \nabla \eta \times \text{rot } \mathbf{v} - \nabla \eta (\text{div } \mathbf{v}) \} \quad (1.1)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + m_0 \varepsilon_0 \beta \frac{dp}{dt} = \delta_0 \text{div } (\kappa \nabla T) + \mu_0 m_0 N(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

$$N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\eta \varepsilon : \varepsilon + \left( \xi - \frac{2}{3} \eta \right) (\text{div } \mathbf{v})^2$$

$$\Pi = p - \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{div } \mathbf{v}, \quad \varepsilon_0 \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad c_p = c_{p0} - m_0 T p \frac{\partial^2}{\partial T^2} \frac{1}{\rho} \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla), \quad \nabla = \mathbf{k}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{k}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{k}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}_r v_r + \mathbf{k}_\varphi v_\varphi + \mathbf{k}_z v_z, \quad \frac{\partial \mathbf{k}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{k}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{k}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{k}_r$$

Здесь  $\mathbf{k}_r(\varphi)$ ,  $\mathbf{k}_\varphi(\varphi)$ ,  $\mathbf{k}_z$  – орты цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ ;  $\rho(T)$  – плотность жидкости;  $\mathbf{v}$  – скорость;  $\Pi$  – полное давление;  $p$  – термодинамическое давление;  $\varepsilon$  – тензор скоростей деформаций [1] ( $\varepsilon : \varepsilon$  – свертка тензоров  $\varepsilon$ );  $T$  – температура;  $\beta(T)$  – коэффициент температурного расширения;  $\eta(T)$ ,  $\xi(T)$  – коэффициенты динамической, объемной вязкости;  $\kappa(T)$  – коэффициент теплопроводности;  $c_{p0}(T)$  –

удельная теплоемкость при фиксированном давлении;  $\varepsilon_0, \mu_0, \delta_0, m_0$  — безразмерные параметры, характеризующие коэффициент температурного расширения, кинематическую вязкость, температуропроводность и работу сил давления. Параметры выбраны таким образом, что  $\beta(1)=1, \eta(1)=1, \rho(1)=1, \kappa(1)=1, c_{p0}(1)=1$ . Вязкую диссипацию характеризует величина  $\mu_0 m_0 N(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ .

Отметим, что в уравнениях (1.1) при применении операторов дифференцирования необходимо учитывать зависимость ортов  $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_\varphi$  от угла  $\varphi$ .

На поверхностях цилиндров заданы краевые условия

$$\begin{aligned} v_r=0, v_\varphi=1, v_z=0, T=1 \quad (r=1) \\ v_r=0, v_\varphi=\Omega R, v_z=0, T=\Theta_0 \quad (r=R) \\ \Omega=\Omega'/\Omega_1', R=R_2'/R_1', \Theta_0=T_2'/T_1' \end{aligned} \quad (1.4)$$

Расход жидкости через поперечное сечение цилиндров положен равным нулю

$$\int_0^{2\pi} \int_1^R \rho(T) v_z r dr d\varphi = 0 \quad (1.5)$$

Связь с размерными переменными, отмеченными штрихами, дается соотношениями

$$\begin{aligned} \{r', z'\} &= R_1' \{r, z\}, \{v_r', v_\varphi', v_z'\} = R_1' \Omega_1' \{v_r, v_\varphi, v_z\} \\ t' &= t/\Omega_1', \{\Pi', p'\} = \rho_1' (R_1' \Omega_1')^2 \{\Pi, p\} \\ c_{p0}' &= c_{p1}' c_{p0}, \kappa' = \kappa_1' \kappa, T' = T_1' T, \{\eta', \zeta'\} = \eta_1' \{\eta, \zeta\} \\ \mu_0 &= \frac{\eta_1'}{\rho_1' (R_1')^2 \Omega_1'}, \quad \delta_0 = \frac{\kappa_1'}{\rho_1' c_{p1}' (R_1')^2 \Omega_1'}, \quad \varepsilon' = \Omega_1' \varepsilon \\ m_0 &= \frac{(R_1' \Omega_1')^2}{c_{p1}' T_1'}, \quad \rho' = \rho_1' \rho, \quad \varepsilon_0 = \beta_1' T_1' \end{aligned}$$

где  $\rho_1', \eta_1', c_{p1}', \kappa_1', \beta_1'$  — плотность и кинетические коэффициенты при температуре  $T_1'$ .

Отметим, что зависимость удельной теплоемкости  $c_p$  от давления и температуры нельзя задавать произвольно — эта зависимость определяется видом уравнения состояния и термодинамикой жидкости (см. (1.2)). Произвольно можно выбирать лишь зависимость  $c_p$  от температуры при каком-либо фиксированном давлении, т. е. функцию  $c_{p0}(T)$ , в качестве такого фиксированного давления взято  $p=0$ .

Далее в предположении, что работа сил давления и вязкая диссипация отсутствуют ( $m_0=0$ ), отыскивается основное стационарное течение, удовлетворяющее задаче (1.1)–(1.5), и исследуется его устойчивость в линейном приближении для четырех типов жидкостей, для которых коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и коэффициент удельной теплоемкости  $c_{p0}$  постоянны  $\kappa=1, c_{p0}=1$ , а уравнения состояния и зависимость вязкости от температуры различны.

I. Жидкость с удельным объемом  $1/\rho$ , линейно зависящим от температуры  $T$ , и постоянным коэффициентом динамической вязкости  $\eta$

$$\rho = (1 + \varepsilon_0(T-1))^{-1}, \quad \eta = 1$$

II. Жидкость с плотностью  $\rho$ , линейно зависящей от температуры  $T$ , и постоянным коэффициентом динамической вязкости  $\eta$

$$\rho = 1 - \varepsilon_0(T-1), \quad \eta = 1$$

III. Жидкость с удельным объемом  $1/\rho$ , линейно зависящим от температуры  $T$ , и постоянным коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$

$$\rho = (1 + \varepsilon_0(T-1))^{-1}, \quad \nu = \eta/\rho = 1$$

IV. Жидкость с плотностью  $\rho$ , линейно зависящей от температуры  $T$ , и постоянным коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$

$$\rho = 1 - \varepsilon_0(T-1), \quad \nu = \eta/\rho = 1$$

Рассмотрение различных типов жидкостей по существу приводит к различным моделям конвекции. Для жидкости I происходит максимальное упрощение (1.1)–(1.2), в частности  $c_p = c_{p0}(T)$ . (На этот факт впервые обратил внимание В. И. Юдович.) Сравнение результатов исследований для жидкостей I и II, III и IV позволяет ответить на вопрос об устойчивости неизотермического течения Куэтта в случае различных уравнений состояния жидкости. Сравнение результатов для жидкостей I и III, II и IV позволяет ответить на аналогичный вопрос в случае различных зависимостей коэффициента вязкости от температуры.

Заметим, что по экспериментальным данным [5] для  $\rho(T)$ ,  $\eta(T)$ ,  $c_{p0}(T)$ ,  $\kappa(T)$  жидкость IV по сравнению с жидкостями I–III наиболее близка к воде.

Жидкости, у которых коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и удельная теплоемкость  $c_{p0}$  зависят от температуры, в работе не исследовались. Немаловажную роль здесь сыграл тот факт, что при  $\kappa = \kappa(T)$ ,  $c_{p0} = c_{p0}(T)$  не удается записать в явном виде решение задачи (1.1)–(1.5), отвечающее стационарному течению, что, естественно, создает дополнительные трудности при численных вычислениях.

Наконец, отметим, что сравнение результатов численных исследований моделей для жидкостей I–IV с результатами для классической модели Обербека – Буссинеска позволяет в какой-то мере ответить на вопрос о применимости классической модели для исследования устойчивости неизотермического течения Куэтта. Дело в том, что модель Обербека – Буссинеска для неизотермического течения Куэтта не может быть математически корректно (т. е. путем предельного перехода  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ) получена из общих уравнений конвекции (1.1)–(1.5) в случае произвольного зазора между цилиндрами.

2. Основное стационарное течение и линеаризованная задача устойчивости. Краевая задача (1.1)–(1.5) при  $m_0 = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c_{p0} = 1$  допускает решение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = (0, v_0(r), 0), \quad \Pi = \Pi_0(r), \quad T = T_0(r)$$

$$v_0(r) = r\Omega_0(r), \quad \Omega_0(r) = 1 + (\Omega - 1) \frac{H(r)}{H(R)}, \quad H(r) = \int_1^r \frac{ds}{s^3 \eta(T_0(s))} \quad (2.1)$$

$$\Pi_0(r) = \int_1^r \frac{v_0^2(s) \rho(T_0(s))}{s} ds + \text{const}, \quad T_0(r) = 1 + (\Theta_0 - 1) \frac{\ln r}{\ln R}$$

Здесь  $\Omega_0(r)$  – угловая скорость при основном стационарном течении.

Для жидкостей I, II основное стационарное течение (2.1) совпадает с известным неизотермическим течением Куэтта в модели Обербека – Буссинеска [3, 4].

Далее используются традиционные безразмерные величины, связанные с введенными ранее параметрами соотношениями

$$G = \varepsilon_0 c, \quad c = \frac{\Theta_0 - 1}{\ln R}, \quad P = \frac{\mu_0}{\delta_0}, \quad \lambda = \frac{1}{\mu_0}$$

Здесь  $G, P, \lambda$  — соответственно числа Грасгофа, Прандтля, Рейнольдса,  $c$  — градиент температуры.

Наложим на основное стационарное течение (2.1) бесконечно малые возмущения  $\mathbf{u}(r, \varphi, z), q(r, \varphi, z), \theta(r, \varphi, z)$ , т. е. будем искать решение краевой задачи (1.1) — (1.5) в виде

$$\{\mathbf{v}-\mathbf{v}_0, \Pi-\Pi_0, T-T_0\} = \left\{ \mathbf{u}, \frac{1}{\lambda} q, c\theta \right\} e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.1) — (1.5) и проводя линеаризацию при  $m_0=0, \kappa=1, c_{p0}=1$ , получим спектральную задачу для определения критического значения числа Рейнольдса  $\lambda$  и соответствующего ему значения циклической частоты  $\omega$

$$\begin{aligned} & G\lambda\rho_0\beta_0r\Omega_0^2\theta + \lambda\rho_0 \left\{ \left( i\omega + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) u_r - 2\Omega_0 u_\varphi \right\} = \\ & - \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (2.3) \\ & \lambda\rho_0 \left\{ \left( i\omega + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) u_\varphi + \frac{u_r}{r} \frac{d}{dr} (r^2\Omega_0) \right\} = \\ & = - \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\sigma_{\varphi r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\lambda\rho_0 \left\{ \left( i\omega + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) u_z \right\} = - \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{rr} = 2\eta_0 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi r} = \eta_0 \left( r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial \eta(T_0)}{\partial T} c\theta r \frac{d\Omega_0}{dr} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{zr} = \eta_0 \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\eta_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{z\varphi} = \eta_0 \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial\varphi} \right), \quad \sigma_{zz} = 2\eta_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\rho_0 = \rho(T_0), \quad \beta_0 = \beta(T_0), \quad \eta_0 = \eta(T_0), \quad c \frac{\partial \eta(T_0)}{\partial T} = -\rho_0 G \beta_0 \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \Big|_{T=T_0(r)}$$

При этом  $\partial\eta/\partial\rho=0$  для жидкостей I, II и  $\partial\eta/\partial\rho=1$  для жидкостей III, IV.

Основное отличие линеаризованной задачи устойчивости от соответствующей задачи для модели Обербека — Буссинеска заключается в изменении вида уравнения неразрывности. В приведенных моделях уравнение неразрывности имеет вид  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \beta_0 G \Delta\theta / \lambda\rho_0 P$ , т. е. содержит член, сравнимый по порядку с архимедовой силой, возникающей в результате вращения цилиндров  $\lambda G \beta_0 r \Omega_0^2 \theta$ . В частности, это означает, что для математически корректного вывода уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  необходимо полагать  $G \rightarrow 0$  ( $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ). Однако при этом в уравнениях пропадает и член, связанный с архимедовой силой, это фактически означает невозможность корректного вывода модели Обербека — Буссинеска для неизотермического течения Куэтта в случае произвольного зазора.

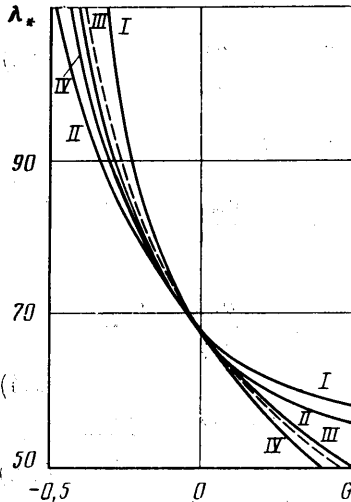
**3. Численные результаты.** Линеаризованная система (2.3) — (2.5) является системой уравнений в напряжениях, редко используемая в гидродинамике несжимаемой жидкости. В рассматриваемом случае это наиболее удобная для линеаризации форма записи, так как уравнения линейны относительно компонент тензора напряжений  $\sigma$ , и фактически необходи-

мо линеаризовать лишь определяющие соотношения (2.5). При этом существенно упрощается система обыкновенных дифференциальных уравнений для решения спектральной задачи, которая возникает после разделения переменных.

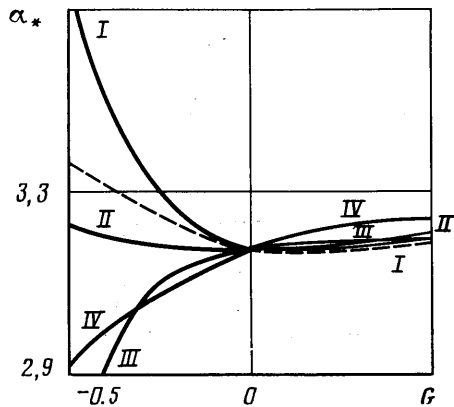
Считая возмущения  $u$ ,  $q$ ,  $\theta$  периодическими в аксиальном и азимутальном направлениях с заданными периодами  $2\pi/m$  и  $2\pi/\alpha$  соответственно ( $m=0, 1, 2, \dots$ ;  $\alpha \geq 0$ ;  $m^2 + \alpha^2 \neq 0$ ), введем обозначения

$$\left\{ u_r, u_\varphi, u_z, G\theta, q - \sigma_{rr}, \sigma_{\varphi r}, \sigma_{\varphi z}, G \frac{\partial \theta}{\partial r} \right\} = \{ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 \} e^{im\varphi + i\alpha z}$$

Исключая из (2.3)–(2.5) величины  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{z\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rr}$ , получаем краевую задачу для восьми обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными комплексными коэффициентами для неизвестных  $z_i(r)$  ( $i=1, \dots, 8$ ). Эта краевая задача реша-



Фиг. 1



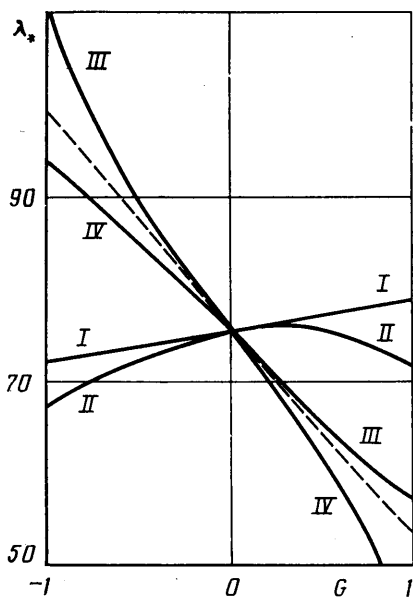
Фиг. 2

ется методом пристрелки. Вычисления проведены для случаев, когда  $P=7,1$ ,  $R=2$  (радиус внешнего цилиндра в 2 раза больше радиуса внутреннего цилиндра),  $\Omega=0$  (внешний цилиндр покоится) и  $\Omega=-0,5$  (цилиндры вращаются в разные стороны).

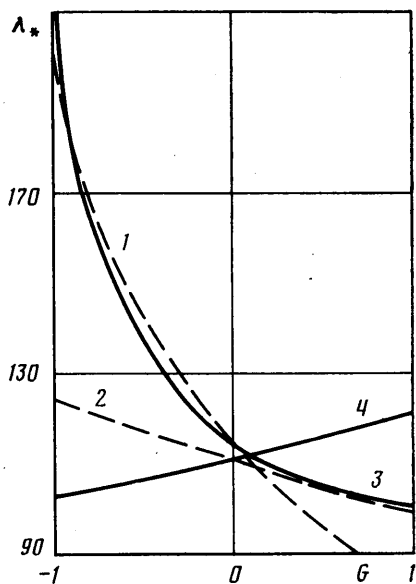
На фиг. 1 представлены результаты расчета зависимости критического значения  $\lambda_*$  числа Рейнольдса  $\lambda$  от числа Грасгофа  $G$  для моделей I–IV (сплошные линии). Штриховой линией изображены данные для модели Обербека – Буссинеска [3, 4]. Эти нейтральные кривые соответствуют потере устойчивости неизотермического течения Куэтта относительно монотонных ( $\omega=0$ ) вращательно-симметричных ( $m=0$ ) возмущений. При вычислениях проводилась минимизация  $\lambda$  по аксиальному волновому числу  $\alpha$ , так как именно минимизированные критические значения числа Рейнольдса представляют наибольший интерес с точки зрения приложений. Значения  $\alpha_*$ , доставляющие минимум функции  $\lambda(\alpha)$ , представлены на фиг. 2.

Нейтральные кривые  $\lambda_*(G)$ , соответствующие потере устойчивости неизотермического течения Куэтта относительно колебательных ( $\omega \neq 0$ ) возмущений, не обладающих вращательной симметрией ( $m=1$ ), изображены на фиг. 3. Соответствующая этому случаю зависимость  $\alpha_*(G)$  представлена на фиг. 4. Величина  $\alpha_*$  при изменении  $G$  от  $-1$  до  $1$  монотонно растет, принимая значения в интервале  $(0,15; 0,5)$ .

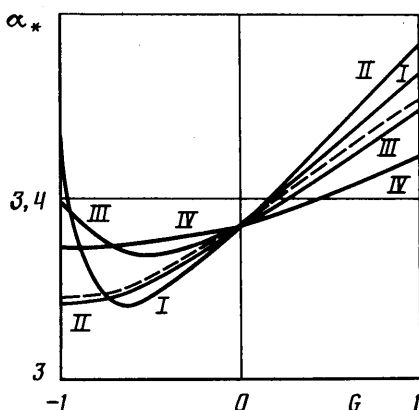
Вычисления показали, что для вращательно-симметричных возмущений ( $m=0$ ) поведение нейтральных кривых  $\lambda_*(G)$  качественно одинаково для всех рассмотренных моделей и совпадает с поведением нейтральной кривой  $\lambda_*(G)$  для модели Обербека – Буссинеска. Аналогичный результат был получен в [6]. Напротив, в случае трехмерных возмущений ( $m=1$ ) поведение нейтральных кривых  $\lambda_*(G)$  существенным образом зависит от того, для какой модели они были рассчитаны. В частности, модель 1 дает стабилизирующее воздействие положительных градиентов температуры ( $G > 0$ ) и дестабилизирующее воздействие отрицательных гра-



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

диентов ( $G < 0$ ). Модель II дает тот же эффект, что и модель I при малых  $G$ , и дестабилизирующее воздействие больших градиентов температуры независимо от направления градиента. Модель Обербека — Буссинеска и модели III, IV дают дестабилизирующее воздействие отрицательных градиентов температуры. Вычисления, проведенные с целью установить причину столь разнообразного характера поведения критических значений чисел Рейнольдса, позволяют предположить, что поведение нейтральных кривых  $\lambda_*(G)$  для трехмерных возмущений определяется главным образом видом зависимости вязкости от температуры.

Для случая, когда внешний цилиндр покоится ( $\Omega=0$ ) при не слишком больших по абсолютной величине значениях числа Грасгофа, монотонные вращательно-симметричные возмущения опаснее колебательных (фиг. 1, 3), поэтому модель Обербека — Буссинеска так же, как и более полные модели, правильно описывает первую потерю устойчивости неизотермического течения Куэтта. Однако когда цилиндры вращаются в разные стороны, трехмерные возмущения при малых по абсолютной величине значениях числа Грасгофа опаснее вращательно-симметричных и модель

Обербека — Буссинеска может неправильно описывать первую потерю устойчивости. Так, например, в случае  $\Omega = -0,5$  (фиг. 5) модель Обербека — Буссинеска и более полная модель I дают различные результаты о первой потере устойчивости неизотермического течения Куэтта (на фиг. 5 кривые 1 и 3 соответствуют случаю  $m=0$ , а кривые 2 и 4 — случаю  $m=1$ ). В вычислениях ограничивались случаем  $|G| \leq 1$ , так как значения  $G = \pm 1$  для жидкостей соответствуют перепаду температур в несколько тысяч градусов.

Авторы благодарят В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Уоловит, Цзяо, Диприма. Устойчивость течения в произвольном зазоре между цилиндрическими концентрическими поверхностями с учетом влияния радиального градиента температур // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Прикладная механика. 1964. Т. 31. № 4. С. 12–21.
4. Колесов В. В. Устойчивость неизотермического течения Куэтта. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 167–170.
5. Беликов В. С., Колесов В. В. Использование приближения Буссинеска при исследовании устойчивости неизотермического течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Сер. Естеств. науки. 1984. № 3. С. 25, 26.
6. Варафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
22.VI.1987