

УДК 532.527.011

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

КОПЧЕНОВ В. И., КРАЙКО А. Н., ЩИПИН С. К.

В развитие исследований, выполненных в [1–8], рассмотрена автомодельная задача нестационарного отрывного обтекания пластины, расширяющейся из точки с постоянной скоростью D , плоскопараллельным потоком идеальной жидкости скорости V_∞ . На бесконечности поток равномерен, стационарен и нормален поверхности пластины. Исследован широкий диапазон значений параметра $\alpha = V_\infty/D$. От величины α зависит, в частности, направление схода вихревых пелен (ВП), которые в соответствии с условием Жуковского – Чаплыгина возникают при отрывном обтекании пластины. Выполнено сравнение с результатами, получающимися при замене пелен вихревыми нитями (ВН). Выбор интенсивности ВН согласно [9] обеспечивает, как и введение ВП, конечность скорости потока у кромок пластины. В рамках нестационарной аналогии и закона плоских сечений к изучаемому нестационарному обтеканию расширяющейся пластины сводится задача обтекания под углом атаки треугольного крыла. Из работ, посвященных этой задаче, наряду с [3, 9] отметим [10–15], причем в [11–15], а также в [3] анализ ведется с использованием ВП, а в [9, 10] – ВН. Ниже особое внимание уделяется топологии течения, в частности структуре так называемых конических линий тока и их точкам стекания и растекания (для специального, отличного от линейного, закона расширения пластины и переменной скорости набегающего потока это сделано в [3]). В широком диапазоне значений α выполнено сравнение результатов, получающихся в моделях с ВП и с ВН, причем не только по интегральным характеристикам, как в [12], но и по картинам течения.

1. Пусть в момент $t=0$ в безграничном равномерном потоке идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости из точки $x=y=0$, где x и y – оси декартовых координат, в плоскости $y=0$ начинает расширяться с постоянной скоростью D бесконечно длинная в направлении третьей оси пластина ab нулевой толщины: $y=0$, $|x| \leq Dt$. Пусть ρ – плотность жидкости, скорость V_∞ потока при $t < 0$ или при $t > 0$ (но $r/(Dt) \rightarrow \infty$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) направлена по оси y – снизу вверх на фиг. 1, а p_∞ – давление в нем при тех же условиях. Возникающее при этом нестационарное плоскопараллельное течение с проекциями u и v скорости \mathbf{V} на оси x и y , потенциалом ϕ и функцией тока ψ , такими, что $\mathbf{V} = \nabla\phi$, $\psi_x = -\rho v$, и $\psi_y = \rho u$, удовлетворяет условиям

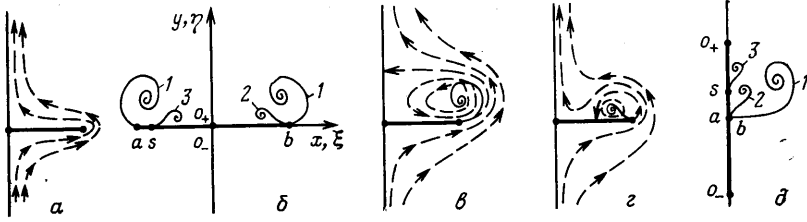
$$u \rightarrow 0, v \rightarrow V_\infty, p \rightarrow p_\infty, r \rightarrow \infty; v=0, |x| < Dt, y = \pm 0 \quad (1.1)$$

Ограничимся течениями, симметричными относительно оси y , и наряду с действительными переменными будем пользоваться комплексными: координатой $z = x + iy$, скоростью $U = u + iv$ и потенциалом $w(z, t) = \phi + i\psi$, причем $\bar{U} = u - iv = \partial w / \partial z$.

Как известно, для безотрывного режима обтекания при любом законе расширения пластины, имеющей в момент t ширину $2l(t)$, комплексный потенциал (КП)

$$w_0(z, t) = -iV_\infty s(z, t) \equiv -iV_\infty \sqrt{z^2 - l^2(t)} \quad (1.2)$$

тождествен КП стационарного обтекания той же пластины нормальным



Фиг. 1

к ней (при $r \rightarrow \infty$) потоком скорости V_∞ . На фиг. 1, а штрихами показаны линии тока половинки этого течения (стрелки дают направление V), симметричного относительно обеих осей координат. Для безотрывного режима при приближении к кромкам $V \equiv |V| \equiv |U| = \sqrt{u^2 + v^2} \rightarrow \infty$, а $p \rightarrow -\infty$. Хотя при этом отрицательные p получаются лишь в малых окрестностях кромок, однако, если иметь в виду применение идеальной модели к описанию течения с малой, но конечной вязкостью, безотрывная схема фиг. 1, а неприемлема из-за вызывающего отрыв пограничного слоя распределения p по верхней стороне пластины. Поэтому представляют интерес другие схемы течения, реализующиеся также в рамках идеальной жидкости, но дающие такие распределения p , что введение малой вязкости не ведет к столь же драматичной перестройке глобальной структуры потока. Три такие схемы, различающиеся способом схода ВП, изображены на фиг. 1, б, где цифры 1-3 метят отвечающие им пелены. Для режима 1 ВП сходят в направлении расширения пластины, а для режимов 2 и 3 — к плоскости симметрии. В первых двух случаях они сходят с кромок, а в третьем — из внутренних точек пластины. На фиг. 1, в и г для режимов 1 и 2 наряду с ВП показаны мгновенные линии тока. При пересечении с ВП, на которых при непрерывных p и нормальной к ВП проекции вектора скорости V_n его касательная компонента V_τ рвется, эти линии тока терпят излом.

Напомним необходимые далее сведения из теории двумерных ВП. Каждая точка свертывающейся в спираль ВП метится циркуляцией Γ , определяющей воздействие ВП на поток. В момент t она вычисляется по замкнутому контуру, который, проходя через данную точку ВП, окружает ее центр и не пересекает других ВП. Обозначим через V_τ° скорость движения вдоль ВП точек с фиксированными Γ , а под $\partial\Gamma/\partial t$ будем понимать производную от Γ в точках исходной и деформированной ВП, получающихся сдвигом за время dt на $V_n dt$ по нормали к ней. Значения V_τ° и $\partial\Gamma/\partial t$ находятся с помощью справедливого в рассматриваемом потенциальном вне ВП течения интеграла Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = F(t) \quad (1.3)$$

в котором $F(t)$ — произвольная функция t . Запишем (1.3) с обеих сторон от ВП, вычтем друг из друга получившиеся равенства и учтем, что на ВП p и V_n непрерывны, $\varphi_+ - \varphi_- = \Gamma$ и $V_{\tau+} - V_{\tau-} = \partial(\varphi_+ - \varphi_-)/\partial\tau = \partial\Gamma/\partial\tau$, где плюс и минус приписаны величинам с разных сторон от ВП, а τ — расстояние, отсчитываемое вдоль нее. В результате придем к уравнению

$$\partial\Gamma/\partial t + [(V_{\tau-} + V_{\tau+})/2] \partial\Gamma/\partial\tau = 0$$

или с учетом приведенного ранее выражения для $\partial\Gamma/\partial\tau$ — к равенствам

$$V_\tau^\circ = (V_{\tau-} + V_{\tau+})/2, \quad \partial\Gamma/\partial t = V_\tau^\circ (V_{\tau-} - V_{\tau+}) \quad (1.4)$$

Введение циркуляции Γ , равной нулю в центре ВП, позволяет записать КП течений, изображенных на фиг. 1, б-г. При этом сначала удобно перейти от z к $s = s_r + is_i$ с s из (1.2). В плоскости s , половина которой дана на фиг. 1, д, скорость набегающего потока по-прежнему равна V_∞ и направлена по оси ординат, где теперь начинаются и ВП. Пластине отвечает отрезок $|s_i| \leq l$, обе пелены симметричны относительно оси s_i , а их циркуляции противоположны по знаку. Вместе с равномерным потоком, который, давая в плоскости s безотрывное обтекание, имеет КП: $w_0(s) = -iV_\infty s$, это автоматически обеспечивает выполнение условий (1.1). Сумми-

руя w_0 и КП симметричных ВП, найдем, что

$$w = w(s, t) = -iV_\infty s - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_v(t)} \{ \ln[s + \bar{s}_v(\Gamma^\circ, t)] - \ln[s - \bar{s}_v(\Gamma^\circ, t)] \} d\Gamma^\circ \quad (1.5)$$

где $s = s_v(\Gamma^\circ, t)$ — уравнение правой ВП, а $\Gamma_v(t)$ — ее интенсивность в точке схода с пластины. Так как $\bar{U}(s, t) = \partial w / \partial z = (\partial w / \partial s) (\partial s / \partial z)$, то из (1.5) имеем

$$\bar{U}(s, t) = - \left\{ iV_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\Gamma_v(t)} \left[\frac{1}{s + \bar{s}_v(\Gamma^\circ, t)} - \frac{1}{s - s_v(\Gamma^\circ, t)} \right] d\Gamma^\circ \right\} \frac{\partial s}{\partial z} \quad (1.6)$$

В силу известных свойств интеграла из (1.6) при приближении к ВП, когда $s \rightarrow s_v(\Gamma, t)$, нормальная к пелене компонента V_n непрерывна, а касательная V_τ рвется. Согласно определению, $\Gamma = \Gamma(\tau, t)$, а $\partial \Gamma / \partial \tau = V_{\tau+} - V_{\tau-}$. Получающееся из (1.6) при $s = s_v(\Gamma, t)$ значение V_τ совпадает с V_τ° из (1.4). Поэтому, приравняв правую часть (1.6) с $s = s_v(\Gamma, t)$ сопряженной скорости ВП в той же точке плоскости z , придем к уравнению

$$\left(\frac{\partial z_v}{\partial s_v} \right)_t \left(\frac{\partial z_v}{\partial t} \right)_\Gamma = -iV_\infty + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\Gamma_v(t)} \frac{s_{rv}^\circ d\Gamma^\circ}{(s_v + \bar{s}_v^\circ)(s_v - s_v^\circ)} \quad (1.7)$$

описывающему эволюцию пелены. В (1.7) $s_v = s_v(\Gamma, t)$, $s_v^\circ = s_v(\Gamma^\circ, t)$ и т. п. Суммарная интенсивность ВП $\Gamma_v(t)$ определяется из условия конечности \bar{U} на кромках ($z = \pm 1$ или $s \rightarrow 0$), где $\partial s / \partial z = l / s \rightarrow \infty$ и, следовательно, в силу (1.6) необходимо, чтобы

$$\pi V_\infty = \int_0^{\Gamma_v(t)} \frac{s_{rv}^\circ d\Gamma^\circ}{|s_v^\circ|^2} \quad (1.8)$$

После перехода к автомодельным переменным $\zeta \equiv \xi + i\eta = z / (Dt)$ и $\sigma \equiv \sigma_r + i\sigma_i = s / (Dt)$, связанным формулой $\zeta = \sqrt{1 + \sigma^2}$, введения G и γ равенствами $G = \Gamma_v / (D^2 t)$ и $\gamma = \Gamma / (GD^2 t)$ с $0 \leq \gamma \leq 1$ и учета того, что $\zeta_v = \zeta_v(\gamma)$, $\sigma_v = \sigma_v(\gamma)$, а $(\partial z_v / \partial t)_\Gamma = D(\zeta_v - \gamma d\zeta_v / d\gamma)$, уравнения (1.7) и (1.8) сводятся к

$$\frac{i\sigma_v}{|1 + \sigma_v^2|} \left(1 + \bar{\sigma}_v^2 - \gamma \bar{\sigma}_v \frac{d\bar{\sigma}_v}{d\gamma} \right) = \alpha + \frac{G}{\pi} \int_0^1 \frac{\sigma_{rv}^\circ d\gamma^\circ}{(\sigma_v + \bar{\sigma}_v^\circ)(\sigma_v - \sigma_v^\circ)},$$

$$\alpha \equiv \frac{V_\infty}{D} = \frac{G}{\pi} \int_0^1 \frac{\sigma_{rv}^\circ d\gamma^\circ}{|\sigma_v^\circ|^2}$$

Решение этой системы определяет зависимость формы ВП и ее безразмерной интенсивности G от единственного определяющего параметра задачи α . После подстановки G из второго уравнения в первое и введения $\varepsilon = 1 - \gamma$ и $\delta = -2 \ln \gamma$ они примут вид (индекс v далее опущен)

$$\frac{i\sigma}{\alpha |1 + \sigma^2|} \left(1 + \bar{\sigma}^2 + \frac{d\bar{\sigma}^2}{d\delta} \right) I_1 = I_2(\sigma), \quad G(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{I_1} \quad (1.9)$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sigma_r^\circ d\varepsilon^\circ}{|\sigma^\circ|^2}, \quad I_2(\sigma) = I_1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sigma + \bar{\sigma}^\circ} - \frac{1}{\sigma - \sigma^\circ} \right) d\varepsilon^\circ$$

2. На режимах 1 (P1) и 2 (P2), когда ВП сходят с кромок, где $I_2(0) = 0$, в окрестностях кромок малы одновременно ε , δ и σ . Поэтому здесь ($I_{2\sigma} = dI_2 / d\sigma$)

$$I_2(\sigma) = I_{2\sigma}(0)\sigma + o(\sigma), \quad I_{2\sigma}(0) = iI_3, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{(\sigma^{02})_t}{|\sigma^0|^4} d\varepsilon^0 > 0 \quad (2.1)$$

Не представляет труда написать разложение $I_2(\sigma)$ с любым числом членов, однако, как будет видно из дальнейшего, для P1 и P2 все производные от I_2 по σ , кроме $I_{2\sigma}$, при $\sigma \rightarrow 0$ обращаются в бесконечность и использование следующих членов ряда не имеет смысла. С учетом (2.1) интегродифференциальное уравнение из (1.9) сводится к

$$d\bar{\sigma}^2/d\delta = C^2 - 1 + o(\sigma), \quad C^2 = C^2(\alpha) = \alpha I_3/I_1 \quad (2.2)$$

Пусть в окрестности кромки $\sigma(\delta) \equiv \sigma_r(\delta) + i\sigma_i(\delta) = \nu\delta^n + f(\delta)$ с заранее неизвестными показателем n , комплексным множителем ν и дифференцируемой функцией $f(\delta) = o(\delta^n)$. Тогда после подстановки $\sigma(\delta)$ в (2.2) приходим к равенству

$$2n\bar{\nu}^2\delta^{2n-1} = C^2 - 1 + o(\delta^n + \delta^{2n-1})$$

из которого следует, что

$$n = 1/2, \quad \nu = \sqrt{C^2 - 1} \quad (2.3)$$

Согласно (2.3), $\nu = \nu_r$ при $C^2 > 1$ и $\nu = i\nu_i$ при $C^2 < 1$, т. е. при $C^2 > 1$ реализуется P1, а при $C^2 < 1$ — P2. Как будет показано ниже, $C^2(\alpha) = \chi\alpha^{3/2} + o(\alpha^{3/2})$. Поэтому, если при некоторых α реализуется P1, то с уменьшением α при $\alpha < \alpha_{*1}$, где α_{*1} — корень уравнения $C^2(\alpha) = 1$, этот режим становится невозможным. Обозначим через α_{*2} корень того же уравнения с I_1 и I_3 для ВП, реализующихся на P2. В общем случае $\alpha_{*2} \neq \alpha_{*1}$. Если $\alpha_{*1} < \alpha_{*2}$, то при $\alpha_{*1} < \alpha < \alpha_{*2}$ автомодельная задача имеет два решения, что для медленно меняющегося α указывает на возможность гистерезиса. При $\alpha_{*2} = \alpha_{*1}$, что в принципе возможно, но маловероятно, гистерезис отсутствует, а при $\alpha_{*2} < \alpha_{*1}$ для $\alpha_{*2} < \alpha < \alpha_{*1}$ либо нет автомодельного решения, либо реализуется режим, отличный от P1 и P2, например P3. В последнем случае попытка воспользоваться при малых $\alpha - \alpha_{*1}$ тем же приемом с $\sigma(\delta) = i\nu_i + i\mu_i\delta^m + o(\delta^m)$ дает $m = 1$ и одно уравнение для определения двух действительных чисел ν_i и μ_i . При этом, однако, в противоположность P1 и P2, когда $n = 1/2$, а I_3 и, как следствие, $I_{2\sigma}(0)$ конечны, на P3 при $\alpha \rightarrow \alpha_{*1}$ интеграл I_3 расходится и переход от (1.9) к (2.2) оказывается незаконным. Кстати, при $n = 1/2$, т. е. на P1 и P2, естественно предположить, что функция $f(\delta)$ в выражении для $\sigma(\delta)$ начинается с первой степени δ с комплексным множителем μ . Тогда, возвращаясь при малых σ в плоскость автомодельной переменной $\xi = \sqrt{1 - \sigma^2} \approx 1 - \sigma^2/2$, найдем, что на P1 и на P2 уравнение ВП вблизи кромки имеет вид $\xi_i = a|\xi_r - 1|^{1/2} + \dots$. Для P1 этот результат, полученный другим путем, известен (см., например, [6, 16]).

Анализ (1.9) для малых и умеренно больших α дает также весьма полезную информацию о зависимости от α характерных размеров ВП и ее общей циркуляции, т. е. функции $G(\alpha)$. Начнем с малых α . Предположим, что на ВП $\sigma_r = \sigma_1(\delta)\alpha^r$ и $\sigma_i = \sigma_2(\delta)\alpha^i$, где σ_1 и σ_2 — действительные функции порядка единицы, а r и i — положительные числа. При подстановке этих выражений в (1.9) и при последующих преобразованиях и оценках рассмотрим три возможности: $i < r$, $i = r$ и $i > r$, хотя первая и представляется более естественной (при $\alpha \rightarrow 0$ ВП все теснее и теснее примыкает к верхней стороне пластины). Если при $i < r$ принять, что $d\sigma_n/d\delta = O(1)$, и подставить выражения для σ_r и σ_i в (1.9), то с точностью до малых более высокого по α порядка приходим к комплексному уравнению

$$1 + \alpha^{2i} + \alpha^{2r} + i\alpha^{i+r} = \alpha^{1-4i}(\alpha^{3i} + i\alpha^{2i+r}) \quad (2.4)$$

Здесь и далее в данном разделе в уравнениях типа (2.4) следует отличать множитель $i = \sqrt{-1}$ от показателя степени, обозначенного той же буквой. У всех слагаемых (кроме единицы) указываются лишь порядки величин (по α), а несущественные для дальнейшего множители, зависящие от δ через σ_1 , σ_2 , их производные и интегралы, не приводятся. Однако и этого достаточно для определения показателей r и i . Прежде всего при $i < r$ уравнение (2.4) нельзя удовлетворить, поскольку для этого показатель i должен принимать два значения: 1 и $1/3$. Выход из такого, казалось бы, неразрешимого (при $i < r$) противоречия удастся найти, если при-

нять, что при $\alpha \rightarrow 0$ все бóльшая часть завихренности ВП сосредоточивается вблизи ее центра. При выполнении этого подкрепляемого расчетами предположения $d\sigma_h/d\delta \neq O(1)$. Учтем к тому же, что при $i < r$ ВП, т. е. спиралевидная кривая $\sigma = \sigma(\delta)$, прилегает к положительному лучу оси σ_i , ее «сопряжение» $\sigma = \bar{\sigma}(\delta)$ — к ее отрицательному лучу, а кривая $\sigma = \bar{\sigma}^2$ — еще теснее к отрицательному лучу оси σ_r . Поэтому большому изменению $\text{Re } \bar{\sigma}^2$ здесь отвечает малое изменение $\text{Im } \bar{\sigma}^2$, и при справедливости сделанного выше предположения о распределении завихренности вдоль ВП $\text{Re}(d\bar{\sigma}^2/d\delta) \sim \alpha^{-h}$ с подлежащим определению показателем $h > 0$ при $\text{Im}(d\bar{\sigma}^2/d\delta) = O(1)$. С учетом этого (2.4) заменится на равенство

$$1 + \alpha^{2i-h} + \alpha^{2r-h} + i\alpha^{i+r} = \alpha^{1-4i}(\alpha^{3i} + i\alpha^{2i+r}) \quad (2.5)$$

из которого найдем: $k=2i$, $i=1/3$ и $r=2/3$. Для таких i и r можно оценить величины интегралов I_1 и I_3 , затем — функции $C^2(\alpha)$ из (2.2) и циркуляции $G(\alpha)$ из (1.9), а после перехода (для малых α) в плоскость автомодельной переменной — ξ и η . В итоге наряду с уже упоминавшейся зависимостью $C^2(\alpha) \sim \alpha^{2/3}$ найдем, что

$$G(\alpha) \sim \alpha, \quad \xi - 1 \sim \alpha^{2/3}, \quad \eta \sim \alpha \quad (2.6)$$

В рамках более простой модели отрывного обтекания с ВН, а не с ВП, такие же зависимости для координат ВН ранее были получены в [14]. Там же даны и следующие из модели с ВН соответствующие коэффициенты пропорциональности.

Анализ второй возможности ($i=r$) выполняется аналогично. При этом, однако, после того как не проходит предположение $d\sigma_h/d\delta = O(1)$, принимается, что $\text{Im}(d\bar{\sigma}^2/d\delta) \sim \text{Re}(d\bar{\sigma}^2/d\delta) \sim \alpha^{-h}$. Отличие здесь связано с тем, что при $i=r$ спираль $\sigma = [\bar{\sigma}(\delta)]^2$ имеет размеры одного порядка по обеим осям σ_r и σ_i . Поэтому (2.5) заменится на уравнение ($r=i$)

$$1 + \alpha^{2i-h} + i\alpha^{2i-h} = \alpha^{1-i} + i\alpha^{1-i}$$

из которого следует, что $k=2i$, $i=r=1$. Если бы это было действительно так, т. е. при $\alpha \ll 1$ реализовывалась бы возможность с $i=r$, то C^2 из (2.2) не зависело бы от α , а все функции из (2.6) были бы пропорциональны α^2 . Как показывают расчеты, последнее не имеет места.

Третья возможность ($r < i$) анализируется так же, как первая. В итоге находим $r=0$, $i=1$ и как следствие: $\sigma_r = O(1)$, $\sigma_i \sim \alpha$, а $C^2(\alpha) \sim \alpha^2$. Но поскольку, с одной стороны, в силу последнего равенства при $\alpha \rightarrow 0$ должен происходить переход к Р2 или Р3, а с другой — этим режимам, как нетрудно видеть, противоречат два предыдущих равенства (ВП на Р2 и Р3 стелется вдоль пластины, а в плоскости σ — вдоль оси σ_i), то данная ситуация ($r < i$) не реализуется.

Пусть теперь α не мало, но таково, что на ВП $\sigma = O(1)$. Тогда при оценке левой части уравнения для σ из (1.9) естественно пренебречь зависимостью $|1 + \sigma^2|$ от α . Кроме того, при таких α уже на первом витке пелены приращения проекций $\bar{\sigma}^2$ — порядка своих значений, причем им отвечает приращение δ , заметно меньшее единицы. Поэтому, пренебрегая в (1.9) единицей по сравнению с $\bar{\sigma}^2 + d\bar{\sigma}^2/d\delta$ и приняв $i \geq r$, придем к уравнению (теперь α не мало!)

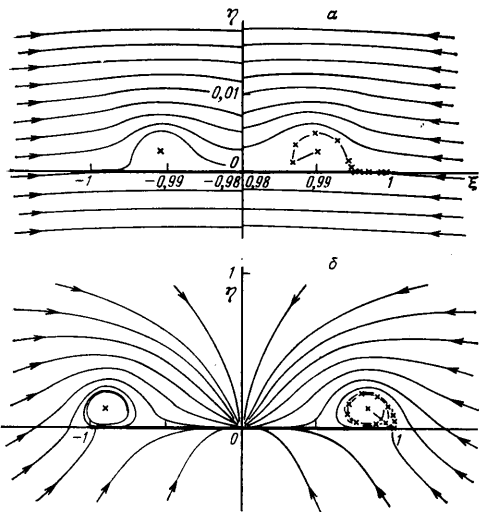
$$\alpha^{2i} + \alpha^{2r} + i\alpha^{i+r} = \alpha^{1-4i}[\alpha^{3i} + \alpha^{i+2r} + i(\alpha^{i+2r} + \alpha^{3r})]$$

из которого следует, что $r=i=1/3$. Те же показатели получаются, если принять $i < r$. Следовательно, для умеренно больших α

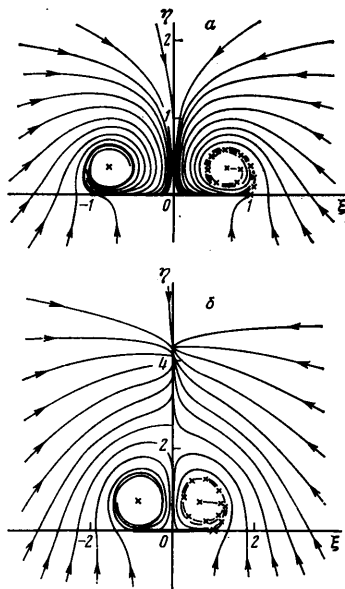
$$\sigma_r \sim \sigma_i \sim \alpha^{1/3}, \quad \xi \sim \eta = O(1), \quad G(\alpha) \sim \alpha^{1/3} \quad (2.7)$$

Интересно, что здесь $C^2 \sim \alpha^{2/3}$, как и при $\alpha \ll 1$.

3. Для решения интегродифференциального уравнения (1.9) был построен численный алгоритм, близкий к описанному в [5, 17]. Хотя в общем случае ВП неустойчивы, указанный алгоритм, который можно рассматривать как развитие широко известного (см. [18]) метода дискретных вихрей, всегда позволял строить ВП, стационарные в автомодельных переменных. Не останавливаясь на деталях, отметим лишь два момента, связанных с этим алгоритмом. Во-первых, для построения пелены в окрестности кромки, привлекалась вытекающая из (2.3) информация о ее



Фиг. 2



Фиг. 3

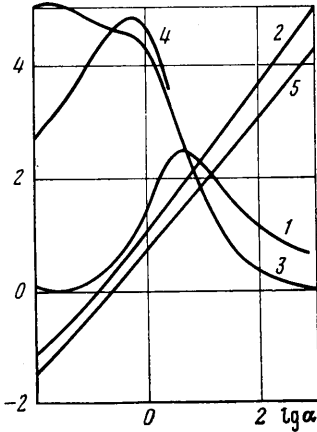
форме. Во-вторых, как это обычно делается, подробно строились только 1–1,5 витка пелены, а прочая ее часть заменялась вихревой нитью. Координаты ВН определялись так. На ВП p непрерывно и потому отсутствует сила, которая в противном случае могла бы действовать на нее со стороны жидкости. При замене ВП на ВН появляются две силы: сила Жуковского F_1 , приложенная к ВН, и сила F_2 , действующая на след не рассчитываемого участка пелены, который соединяет конец рассчитываемого участка ВП с ВН. Появление F_2 вызвано тем, что при «стягивании» завихренности с части ВП на ВН на следе ВП становятся непрерывны обе компоненты V , а не только V_n , как на ВП, но зато в силу (1.3) при $\Gamma = \Gamma(t)$ возникает перепад давления $[p] = -d\Gamma/dt$. В этом смысле модели с ВП и с ВН можно считать «сопряженными», ибо в первой $[p] = 0$ при $[V_\tau] \neq 0$, а во второй $[p] \neq 0$ при $[V_\tau] = 0$. Поскольку $[p]$ зависит только от t , то для вычисления F_2 можно принять, что перепад p реализуется не на неизвестном следе ВП, а на любом соединяющем его концы отрезке, например прямолинейном. С учетом этого и в согласии с [9, 10] условие, определяющее координаты ВН, записывается в виде $F_1 + F_2 = 0$. Оно же используется и при замене всей ВП на ВН. Интенсивность ВН в таком случае находится из условия конечности скорости на кромке пластины (в плоскости σ при $\sigma = 0$), а известное уравнение, определяющее координаты ВН в плоскости σ , в согласии со сказанным принимает вид

$$2\bar{\zeta} = 1 - i\alpha \left(\frac{\zeta}{\sigma} - \frac{\zeta\bar{\sigma}}{4\sigma^2} - \frac{\bar{\sigma}}{4\zeta\sigma\sigma_r} \right), \quad \zeta = \sqrt{1 \pm \sigma^2}$$

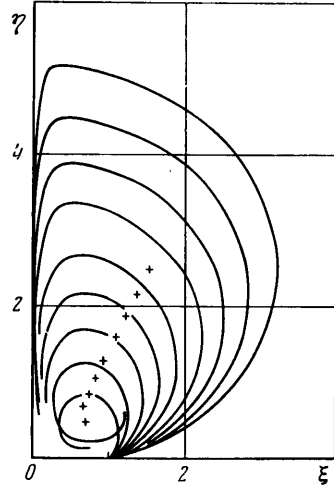
После решения этого уравнения безразмерная интенсивность ВН находится по формуле $G = \alpha\lambda|\sigma|^2/\sigma_r$.

Перейдем к результатам расчетов. Правые половины фиг. 2 и 3 для характерных значений α дают в плоскости автомодельной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ помеченные звездочками ВП, центральные ВН, отрезки, соединяющие концы рассчитываемых участков ВП с ВН, и так называемые конические линии тока. В отличие от мгновенных линий тока, изображенных штрихами на фиг. 1, конические линии тока дают в плоскости автомодельных переменных траектории частиц. В соответствии с этим они определяются интегрированием уравнения $d\eta/d\xi = (v - \eta)/(u - \xi)$, в котором компоненты скорости u и v отнесены к D .

Левые половинки фиг. 2 и 3 дают те же линии тока в рамках более простой модели с ВН, показанной звездочкой. Здесь и далее пластинка выделена жирной прямой, а направление движения частиц указано стрелками. По классификации разд. 2 фиг. 2, *a* отвечает режиму Р2 или Р3, поскольку здесь начало ВП, сходящей с кромки в сторону плоскости симметрии, практически сливается с пластиной (на фиг. 2, *a*, отвечающей $\alpha=0,01$, показаны малые окрестности кромок, где $|\xi|>0,98$). С ростом α при $0,03 \leq \alpha \leq 0,1$ реализуется Р2. При этих и меньших α кромка является точкой растекания (ТР), еще одна ТР расположена на верхней (подветренной) стороне пластины чуть левее от ВП, а в центре пластины с обеих ее сторон располагаются точки стекания (ТС). С дальнейшим увеличением α осуществляется переход к Р1 и



Фиг. 4



Фиг. 5

ТР перемещается с кромки на нижнюю (наветренную) сторону пластины, как видно из фиг. 2, *b* ($\alpha=0,5$). Затем сначала верхняя, а следом за ней и нижняя ТР, смещаясь влево, достигают начала координат, где остаются внизу при всех еще больших α , а вверху — при α из конечного интервала. Фигура 3, *a* типична для этих режимов ($\alpha=1,5$). В рассмотренных случаях отличные от кромки ТР — седла, а ТС — узлы. При $\alpha=\alpha_0$ — верхней границе интервала режимов фиг. 3, *a* над пластиной — в некоторой точке оси симметрии, по-видимому, как и в задачах, рассматривавшихся в [3, 19], появляется точка стекания — растекания типа седло — узел, которая при $\alpha>\alpha_0$ расщепляется на ТР — седло и расположенную над ней ТС — узел. Последняя является аналогом «всплывшей точки Ферри» (ТФ) в задаче стационарного сверхзвукового обтекания треугольной пластины. Описанная ситуация изображена на фиг. 3, *b* ($\alpha=5$).

Используя потенциал (1.2), нетрудно показать, что в отличие от изложенного выше, при безотрывном обтекании для $\alpha>0$ возможны лишь две принципиально различающиеся конфигурации конических линий тока. Для $0<\alpha<1$ две ТС — узлы при $\xi=\eta=0$ под и над пластиной и ТР — седло под ней (при $\xi<1, \eta=0$) принадлежат пластине. При $\alpha=1$ происходит бифуркация: нижние ТС и ТР сливаются в начале координат, образуя здесь при $\alpha>1$ ТР — седло, а верхняя ТС, наоборот, «расщепляется», образуя при $\alpha>1$ ТР — седло при $\xi=\eta=0$ и ТС — узел (всплывшую ТФ) при $\xi=0, \eta=\sqrt{\alpha^2-1}$. Тип особенности на кромке ($\xi=1, \eta=0$), где $V=\infty$, от величины α не зависит.

Важно подчеркнуть, что МН — модель с ВН (левые половинки фиг. 2 и 3) — дает почти такие же картины обтекания, как и более сложная модель с ВП (МП). Хотя в рассматриваемой задаче времена построения ВП и расчета ВН малы (соответственно 1–5 мин и 0,2 с на ЭВМ ЕС-1061), в более сложных случаях (например, в неавтономных задачах и в задачах стационарного отрывного обтекания тел сверхзвуковым потоком) возможность замены ВП на ВН может оказаться существенной. Уже отмечалось, что p с разных сторон от пластины на кромке в МН различаются, а в МП выравниваются. Такое выравнивание, однако, происходит на столь малом расстоянии, что указанное отличие вместе с несколько различающимся распределением p по верхней стороне пластины приводят к небольшому различию в силах Y, Y_n , действующих на нее в МП и МН. Сказанное иллюстрирует кривая 1 на фиг. 4, которая в зависимости от $\lg \alpha$ дает $10 \Delta Y = 10(Y_n - Y)/Y$. Зависимость от $\lg \alpha$ логарифма коэффициента силы $c_y = Y/(\rho V_\infty^2 D t)$ показывает на фиг. 4 кривая 2. По ее наклону можно заключить, что $c_y \sim \alpha^m$ с $m=1,04, 1,22$ и $1,35$ соответственно для $\alpha \ll 1, \alpha = O(1)$ и $\alpha \gg 1$. Кривые 3–5 на фиг. 4 подтверждают результаты анализа разд. 2. Так, кривые 3 и 4 дают $10\eta^+/\alpha$ и $10(1-\xi^-)/\alpha^{3/2}$, которые в согласии с (2.6) при $\alpha \ll 1$ близки к константам (η^+ и ξ^- — ордината и абсцисса верхней и левой точек ВП). Хотя соответствующие

отрезки кривых отличны от горизонталей, следует иметь в виду, что α на них изменяется на порядок и более, а сами η^+ и $(1-\xi^-)$ меняются во много раз. Характер кривой 5, дающей зависимость $\lg G$ от $\lg \alpha$, также согласуется с выводами разд. 2. Именно в силу (2.6) и (2.7) $G \sim \alpha$ и $\alpha^{1/2}$, а, как следует из рассмотрения кривой 5, $G \sim \alpha^k$ с $k=1,06, 1,27$ и $1,18$ при $\alpha \ll 1$, $\alpha=O(1)$ и $\alpha \gg 1$. Результаты наиболее полных из известных расчетов, выполненных для $0,01 < \alpha < 1,5$ в [12, 14], по всем приводимым там данным (форма пелен, G и c_p , а также распределения p по пластине) практически не отличаются от полученных в настоящей работе.

Заканчивая анализ, обратим внимание на одну особенность. Если при $\alpha \leq 10$ кольца ВП сгущаются лишь вблизи ее центра, то при больших α они все плотнее и плотнее заполняют всю ограниченную первым витком ВП область. При $\alpha \rightarrow \infty$ расстояние между витками стремится к нулю, левая часть первого витка практически сливается с осью симметрии, точки которой, кстати, удовлетворяют уравнению (1.9) для любых α , и как результат в зону ВП втекает все меньше и меньше не вовлеченной во вращение жидкости. Это видно из фиг. 5, где изображены (в порядке роста размеров и координат) первые витки и центры (крестики) ВП для $\alpha=2,5; 5; 10; 20; 40; 100; 200; 400$ и 800 . С ростом α из-за отмеченного эффекта на первые витки приходится все меньшая доля суммарной циркуляции ВП (от примерно $0,45G$ для $\alpha=1,5$ до $0,015G$ для $\alpha=800$). Это не только затрудняет получение закона подобия при $\alpha \gg 1$, но и автоматически уменьшает различие результатов МН и МП при счете в МП, как это и делалось, 1–2 витков.

В заключение авторы благодарят А. Н. Ганжело, Г. Г. Судакова и С. К. Бетяева за полезные обсуждения, а В. А. Вострецову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. О «второй» форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование отрывных вихревых потоков) // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 2. С. 193–196.
2. Никольский А. А. О силовом воздействии «второй» формы гидродинамического движения на плоские тела (динамика плоских отрывных потоков) // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 3. С. 365–368.
3. Никольский А. А., Бетяев С. К., Малышев И. П. О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 262–268.
4. Никольский А. А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. 285 с.
5. Pullin D. I. The large-scale structure of unsteady self-similar vortex sheets // J. Fluid Mech. 1978. V. 88. Pt 3. P. 401–430.
6. Бетяев С. К. Эволюция вихревых пелен // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Изд-во Чебоксар. гос. ун-та, 1980. С. 27–38.
7. Бетяев С. К. Отрывные течения: Препринт № 14. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983. 29 с.
8. Бетяев С. К. Топология двумерных автомодельных движений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1081–1095.
9. Edwards R. H. Leading-edge separation from delta wings // J. Aeronautical Sci. 1954. V. 21. № 2. P. 134–135.
10. Brown C. E., Michael W. H., Jr. Effect of leading-edge separation on the lift of a delta wing // J. Aeronautical Sci. 1954. V. 21. № 10. P. 690–694, 706.
11. Legendre R. Ecoulement au voisinage de la pointe avant d'une aile a forte fleche aux incidences moyennes // La Rech. Aeronaut. 1953. № 31. P. 3–6.
12. Smith J. H. B. Improved calculations of leading-edge separation from slender, thin, delta wings // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 306. № 1484. P. 67–90.
13. Никольский А. А. Законы подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газом // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 1. С. 1–7.
14. Barsby J. E. Separated flow past a slender delta wing at incidence // The Aeronaut. Quarterly. 1973. V. 24. Pt 2. P. 120–128.
15. Судаков Г. Г. Расчет отрывного течения около тонкого треугольного крыла малого удлинения // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 10–18.
16. Graham J. M. R. Application of discrete vortex methods to the computation of separated flow // Numerical methods for fluid dynamics. II/Ed. Morton K. W., Baines M. J. Oxford: Clarendon Press, 1986. P. 273–302.
17. Воеводин А. В. Исследование неединственности решения задачи об отрывном обтекании системы крыло – фюзеляж малого удлинения // Уч. зап. ЦАГИ. 1979. Т. 10. № 1. С. 10–18.
18. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью // М.: Наука, 1978. 352 с.
19. Bakker P. G., Bannink W. J., Reyn J. W. Potential flow near conical stagnation points // J. Fluid Mech. 1981. V. 105. P. 239–360.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1987