

УДК 532.526:536.24

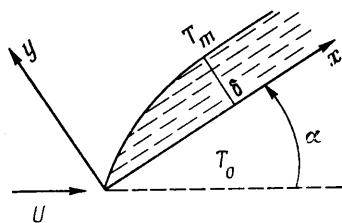
ДВИЖЕНИЕ ГОРЯЧЕГО КЛИНА В ПЛАВЯЩЕЙСЯ СРЕДЕ

СКВОРЦОВА А. В.

В [1-3] рассмотрен ряд задач о движении тепловых источников, температура которых выше температуры плавления окружающей среды. Источником тепла может служить лазерный луч или горячее твердое тело. В данной работе исследовано движение тонкого твердого клина, нагретого выше температуры плавления окружающей среды, с постоянной скоростью. Последняя достаточно велика, так что образующийся слой расплава является тонким. Задача решена методом интегральных соотношений. Определены формы проплавленной области, сопротивление клина и другие характеристики течения расплава.

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело, имеющее форму тонкого клина, нагретое до высокой температуры, движется с постоянной скоростью, проплавляя себе путь в холодной среде. Будем считать слой расплава, образующийся на поверхности клина, достаточно тонким. Тогда условия течения в нем удовлетворяют обычным предположениям теории вязкого пограничного слоя. Скорость движения клина U также считается достаточно большой. Для простоты плотность среды и ее расплава принимаются постоянными и неизменными при переходе из твердого состояния в жидкое.

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть жидкий слой только на одной грани клина, при этом толщина слоя расплава принимается равной нулю на острой кромке (фиг. 1). В сделанных предположениях система уравнений, описывающая течение расплава, имеет вид



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

Здесь u, v — составляющие скорости жидкости вдоль осей x и y ; p и T — давление и температура; ρ — плотность; k — температуропроводность; c — удельная теплоемкость; ν — кинематическая вязкость расплава. Среда, через которую движется клин, считается нетеплопроводной. При этом все тепло, выделяющееся в слое вследствие диссипации механической энергии, идет на нагревание и плавление материала среды. Температура клина T_0 постоянна и значительно превышает температуру плавления среды T_m .

Решение системы (1.1) должно удовлетворять следующим граничным условиям на поверхности клина $y=0$, на поверхности фазового перехода $y=\delta(x)$ и условию баланса тепла на границе между жидкостью и твердой средой:

$$u=0, v=0, T=T_0 \quad (1.2)$$

$$u=U \cos \alpha, v=-U \sin \alpha, T=T_m \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{LU}{kc} \cos \alpha (\delta'(x) + \operatorname{tg} \alpha) \quad (1.4)$$

$$L = L' + c(T_m - T')$$

Здесь α — угол полураствора клина, L — эффективная скрытая теплота плавления, равная сумме скрытой теплоты плавления L' и тепла, необходимого для нагревания материала среды от его температуры T' до температуры плавления, скорость U направлена перпендикулярно острой кромке. Граница $y = \delta(x)$ — искомая функция задачи наряду с распределениями температуры, скорости и градиента давления. Давление в данном случае в отличие от обычных задач пограничного слоя нельзя считать заданным. Оно не известно и подлежит определению.

2. Интегральные соотношения и асимптотика искомых функций вблизи острого клина. Задача (1.1) — (1.4) не является автомодельной. Для ее решения используем метод интегральных соотношений [4]. Переходя к безразмерным переменным $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, где l — масштаб длины, проинтегрируем систему (1.1) по η от нуля до единицы с учетом граничных условий. Полученные интегральные соотношения можно представить в виде

$$\delta^* \int_0^1 \frac{\partial u^*}{\partial \xi} d\eta = \sin \alpha$$

$$\delta^* \int_0^1 \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 d\eta = \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\delta^*}{2} \frac{dp^*}{d\xi} + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{Ste} \delta^*} \left[\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right]_0^1 \quad (2.1)$$

$$\delta^* \int_0^1 \frac{\partial (u^* T^*)}{\partial \xi} d\eta = \sin \alpha \left(1 - \frac{T_0}{\Delta T} \right) + (\operatorname{Ste} \delta^*)^{-1} \left[\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right]_0^1 +$$

$$+ \frac{\operatorname{Pr} \operatorname{Ec}}{\operatorname{Ste} \delta^*} \int_0^1 \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)^2 d\eta$$

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad T^* = \frac{T}{\Delta T}, \quad \delta^* = \frac{\delta}{l}, \quad p^* = \frac{2p}{\rho U^2}, \quad l = \frac{kc \Delta T}{LU}$$

$$\operatorname{Pr} = \frac{\nu}{k}, \quad \operatorname{Ste} = \frac{c \Delta T}{L}, \quad \operatorname{Ec} = \frac{U^2}{c \Delta T}, \quad \Delta T = T_0 - T_m$$

где Pr , Ste и Ec — числа Прандтля, Стефана и Эккерта. Квадратные скобки $[]_0^1$ обозначают разность значений функции, стоящей в скобках, на границе слоя $\eta = 1$ и на поверхности клина $\eta = 0$. Поскольку для функций u^* , T^* , $dp^*/d\xi$ и δ^* имеется три интегральных соотношения (2.1) и пять граничных условий (1.2) — (1.4), распределения u^* и T^* по η можно искать в виде квадратичных многочленов по η с коэффициентами, зависящими от ξ [5]

$$u = a + b\eta + c\eta^2, \quad T = A + B\eta + C\eta^2 \quad (2.2)$$

Здесь и далее знак звездочка в обозначениях безразмерных функций опущен.

Используя интегральные соотношения и краевые условия, находим коэффициенты a , b , c , A , B , C . При этом распределения безразмерной составляющей скорости u и температуры T будут иметь вид

$$u = 2\eta(3\xi\delta^{-1} \sin \alpha + 2 \cos \alpha) - 3\eta^2(2\xi\delta^{-1} \sin \alpha + \cos \alpha) \quad (2.3)$$

$$T = T_0/\Delta T + \delta\eta \cos \alpha [\eta + (1-\eta)(\operatorname{tg} \alpha + \delta') - 2] \quad (2.4)$$

Из интегральных соотношений (2.1) с учетом (2.3), (2.4) для толщины слоя $\delta(\xi)$ и градиента давления $dp/d\xi$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & 1/\xi_0 \left[18 \operatorname{tg} \alpha + 12\delta \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \delta') + 14\delta' + 22\delta\delta' \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \delta') + \right. \\ & \left. + 12\xi \sin \alpha \frac{d}{d\xi} (\delta \operatorname{tg} \alpha + \delta\delta') + 11\delta^2\delta'' \cos \alpha \right] = \frac{2}{\delta \operatorname{Ste} \cos \alpha} - \frac{2}{\operatorname{Ste}} (\operatorname{tg} \alpha + \delta') + \\ & \quad + \frac{\operatorname{Pr} \operatorname{Fc}}{\operatorname{Ste} \delta} \left[1 + \frac{3}{\delta^2} (\delta + 2\xi \operatorname{tg} \alpha)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\xi} = & \frac{2 \cos^2 \alpha}{\delta} \left[\operatorname{tg} \alpha + \frac{2}{3} \delta' - \frac{6 \operatorname{Pr}}{\operatorname{Ste} \cos \alpha} \left(\frac{\delta + 2\xi \operatorname{tg} \alpha}{\delta^2} \right) - \right. \\ & \left. - 1/\delta' \delta^{-2} (\delta + 2\xi \operatorname{tg} \alpha) (4\delta + 3\xi \operatorname{tg} \alpha) - 1/\delta^{-1} \operatorname{tg} \alpha (11 + 12\xi\delta^{-1} \operatorname{tg} \alpha) (\delta - \delta'\xi) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решая уравнение (2.5), найдем толщину слоя расплава. При известной функции $\delta = \delta(\xi)$ уравнение (2.6) определяет градиент давления.

Найдем асимптотическое поведение функции $\delta(\xi)$ в окрестности острого клина. Соответствующее разложение можно искать в виде

$$\delta = A\xi^\beta [1 + o(\xi^\beta)], \quad \beta > 0 \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), находим $\beta = 1/2$ и

$$A^2 = - \frac{2[7 \operatorname{Ste} + 60 - \sqrt{(60 + 7 \operatorname{Ste})^2 + 1320 \operatorname{Ste} (1 + 2 \operatorname{Pr} \operatorname{Ec} \cos \alpha)}]}{11 \operatorname{Ste} \cos \alpha} \quad (2.8)$$

Интегрируя уравнение (2.6) с учетом (2.8) при малых ξ , получаем асимптотику поведения давления вблизи острого клина

$$p(\xi) = -4 \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{5} + \frac{3 \operatorname{Pr}}{A^2 \operatorname{Ste} \cos \alpha} \right) \ln \xi + \dots \quad (2.9)$$

Таким образом, давление имеет интегрируемую особенность вблизи острой кромки.

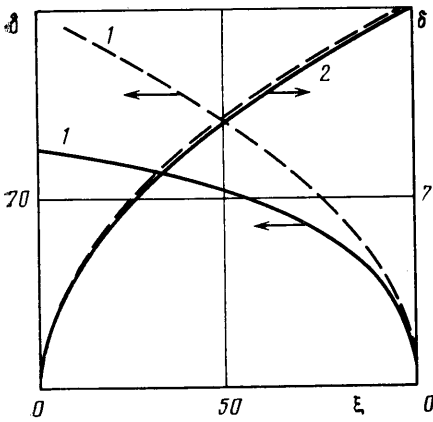
Значение функции $\delta(\xi)$ на всем интервале изменения ξ можно получить численным интегрированием уравнения (2.5) с выходом из критической точки по найденной асимптотике.

Если рассмотреть клин конечного размера $x_0 = l\xi_0$ по оси x и принять $p(\xi_0) = 0$, то давление на поверхности клина определится формулой

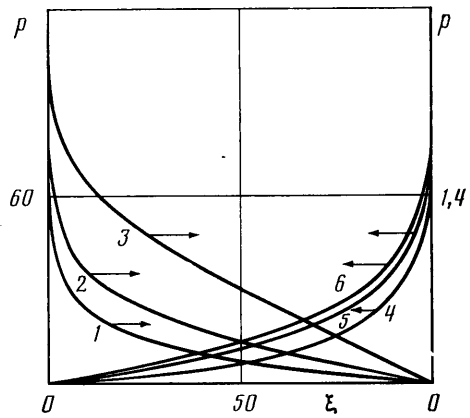
$$p(\xi) = F(\xi) - F(\xi_0), \quad F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dp}{dt} dt, \quad 0 < \epsilon < \xi_0$$

Функцию $F(\xi)$ находим численным интегрированием уравнения (2.6) с учетом асимптотики (2.9).

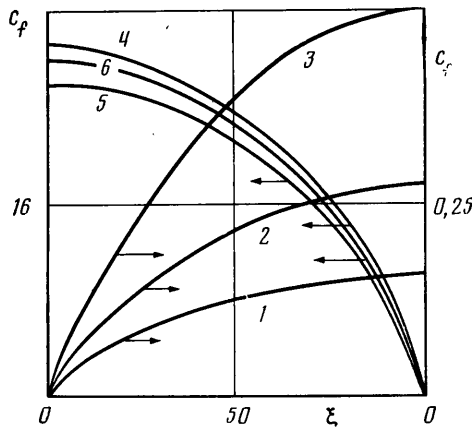
3. Результаты расчетов. Расчеты проводились для железа и парафина со следующими значениями параметров и физических характеристик среды: $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$, $x_0 = 1 \text{ см}$, $\Delta T = 100^\circ \text{ C}$, $U = 100 \text{ см/с}$, $\operatorname{Pr} = 6 \cdot 10^{-2}$, $\operatorname{Ste} = 5,4 \cdot 10^{-2}$, $\operatorname{Ec} = 1,4 \cdot 10^{-3}$, число Рейнольдса $\operatorname{Re} = 10^4$ — для железа; $\rho = 0,88 \text{ г/см}^3$, $x_0 = 1 \text{ см}$, $U = 10 \text{ см/с}$, $\Delta T = 100^\circ \text{ C}$, $\operatorname{Pr} = 2,85$, $\operatorname{Ste} = 1,2$, $\operatorname{Ec} = 2 \cdot 10^2$, $\operatorname{Re} = 4 \cdot 10^3$ — для парафина. Значения угла полураствора клина менялись от 1 до 5° . На фиг. 2 приведены зависимости $\delta(\xi)$ при $\alpha = 5^\circ$. Кривые 1 и 2 соответствуют железу и парафину: штриховые линии отвечают асимптотикам $\delta(\xi)$. Расчеты показали, что с увеличением угла α толщина слоя расплава возрастает. На фиг. 3 приведены графики распределений давления для различных углов α . Кривые 1–3 соответствуют расчетам для же-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

леза, 4–6 — для парафина; кривые 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 отвечают углам $\alpha = 1, 3, 5^\circ$. С ростом угла раствора клина давление на его поверхности растет.

Сила сопротивления F , действующая на клин единичной длины с площадью поперечного сечения $S = 2x_0 \sin \alpha$, складывается из суммы сил сопротивления трения F_τ и сопротивления давления F_d

$$F = F_\tau + F_d$$

$$F_\tau = c_\tau \frac{\rho U^2}{2} S = 2(\cos \alpha) \mu \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

$$F_d = c_d \frac{\rho U^2}{2} S = 2 \sin \alpha \int_0^{x_0} p(x) dx$$

Здесь c_τ и c_d — соответственно коэффициенты сопротивления трения и сопротивления, возникающего из-за неравномерности распределения давления. В безразмерных переменных имеем

$$c_\tau(\xi) = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\text{Re} \sin \alpha} \int_0^\xi \frac{1}{\delta} \left(\frac{3t \text{tg} \alpha}{\delta} + 2 \right) dt \quad c_d(\xi) = \frac{1}{\xi_0} \int_0^\xi p(t) dt$$

Полный коэффициент сопротивления $c_f = c_d + c_r$ для разных углов раствора клина приведен на фиг. 4. Кривые 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 соответствуют углам $\alpha = 1, 3, 5^\circ$; 1-3 — для железа, а 4-6 — для парафина. Расчеты показали, что основной вклад в полное сопротивление F дает сила сопротивления F_d , возникающая из-за неравномерности распределения давления по поверхности клина. Влияние сопротивления трения F_r на полное сопротивление клина сказывается тем больше, чем меньше угол раствора клина.

4. Учет скольжения клина. Метод определения асимптотик и приближенных решений, использованный выше, можно применить к случаю, когда имеется скольжение клина вдоль острой кромки. Пусть скорость движения клина W направлена под углом β к прежней скорости U в плоскости симметрии клина, так что $U = W \cos \beta$. Тогда систему уравнений (1.1) надо дополнить уравнением для составляющей скорости w вдоль острой кромки

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Уравнение энергии системы (1.1) примет вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{c} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

Остальные уравнения останутся без изменений. К граничным условиям (1.2), (1.3), добавятся следующие:

$$w = 0, y = 0; w = \text{tg } \beta, y = \delta(x) \quad (4.3)$$

Поскольку уравнения и граничные условия для составляющих скорости u, v и давления $p(x)$ совпадают с соответствующими уравнениями и условиями для случая без скольжения, то распределения для них будут совпадать с полученными ранее (2.3) и (2.6). При этом всюду надо учитывать, что $U = W \cos \beta$. Таким образом, наличие проскальзывания оказывает влияние на картину течения расплава только через значение функции $\delta(x)$ и дополнительную составляющую скорости w . Соответствующее интегральное соотношение в переменных ξ и η для безразмерной составляющей скорости $w^* = Uw$ имеет вид

$$\delta \int_0^1 \frac{\partial(uw)}{\partial \eta} d\eta = \text{tg } \beta \sin \alpha + \frac{\text{Pr}}{\text{Ste } \delta} \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_0^1 \quad (4.4)$$

Здесь и далее знак звездочка над безразмерными функциями опущен, а все обозначения прежние. Так же как и ранее, распределение w ищется в виде квадратичного многочлена по η с коэффициентами зависящими от ξ : $w = a + b\eta + c\eta^2$. Условия (4.3) дают $a = 0$; $b + c = \text{tg } \beta$. При этом соотношение (4.4) после подстановки в него соответствующих распределений u и w приводится к уравнению для коэффициента $c = c(\xi)$

$$c' + f(\xi)c = g(\xi) \quad (4.5)$$

$$f(\xi) = 12G[(\delta - \delta'\xi) + 10\text{Pr}/\text{Ste} \sin \alpha]$$

$$g(\xi) = -30G \text{tg } \beta (\delta'\xi + \delta)$$

$$G = \text{tg } \alpha \delta^{-1} (11\delta + 12\xi \text{tg } \alpha)^{-1}$$

Уравнение (4.5) определяет $c(\xi)$, а значит, и w при известных значениях функции $\delta(\xi)$.

Общее решение уравнения (4.5) записывается в виде

$$c(\xi) = \frac{1}{M(\xi)} \left[\int g(\xi) M(\xi) d\xi + \text{const} \right], \quad M(\xi) = \exp \left[\int f(\xi) d\xi \right] \quad (4.6)$$

Полагая для малых ξ , как и в случае без проскальзывания, $\delta = A\xi^\beta$, $\beta > 0$, из уравнения (4.6) находим асимптотику $c(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$

$$c(\xi) \rightarrow \text{const}, \beta < 1/2 \quad (4.7)$$

$$c(\xi) \rightarrow 0, \beta \geq 1/2$$

Для отыскания конкретных значений A и β , а также толщины слоя расплава $\delta(\xi)$ выишем интегральное соотношение для температуры в слое

$$\delta \int_0^1 \frac{\partial(uT)}{\partial \xi} d\eta = \sin \alpha \frac{T_m}{\Delta T} + \frac{\text{Pr Ec}}{\text{Ste} \delta} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta + \frac{1}{\delta \text{Ste}} \left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_0^1 \quad (4.8)$$

Подставляя в (4.8) известные распределения для u , w и T , получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\delta(\xi)$, аналогичное уравнению (2.6) для случая без скольжения, с той лишь разницей, что в правую часть (2.6) добавится слагаемое

$$\frac{\text{Pr Ec}}{\delta \text{Ste}} \left(\text{tg}^2 \beta + \frac{c^2}{3\delta} \right) \quad (4.9)$$

Уравнение (2.6) с дополнительными слагаемыми (4.9) в правой части и с учетом асимптотики $c(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ (4.7) позволяет найти значения A и β в асимптотическом разложении для $\delta(\xi)$

$$\beta = 1/2$$

$$A^2 = - \frac{2[7 \text{Ste} + 60 - \sqrt{(60 + 7 \text{Ste})^2 + 660 \text{Ste} (2 + \text{Pr Ec} \cos \alpha (4 + \text{tg}^2 \beta))}]}{11 \text{Ste} \cos \alpha} \quad (4.10)$$

Таким образом, выполняя совместное численное интегрирование уравнений (4.5) и (2.6) с дополнительным слагаемым (4.9) и выходя из критической точки по асимптотике (4.10), можно найти функцию $\delta(\xi)$, а значит, и все остальные искомые функции задачи. Анализируя формулу (4.10), заметим, что при наличии скольжения толщина слоя расплава больше, чем в случае без скольжения, и растет с увеличением угла β .

В заключение автор благодарит Г. Г. Черного за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Испарение движущегося твердого тела при контакте с нагретой пластиной // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 3. С. 35–41.
2. Dowden J., Davis M., Kapadia P. Some aspects of the fluid dynamics of laser welding // J. Fluid Mechn. 1983. V. 126. P. 123–146.
3. Emerman S. H., Turcotte D. L. Stokes's problem with melting // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. V. 26. № 11. P. 1625–1630.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
5. Черный Г. Г. Движение плавящегося твердого тела между двумя упругими полупространствами // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 813–818.
6. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 12. С. 38–67.
7. Григорян С. С. О нагревании и плавлении твердого тела от трения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 5. С. 577–585.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.1987