МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1988

УДК 532.546

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

ГАЙФУТДИНОВ А. Н., ЯКИМОВ Н. Д.

Формулируются ограничения на закон фильтрации, позволяющие установить теоремы сравнения (аналоги теорем работ [1, 2]) для нелинейных течений в анизотропной неоднородной среде. В полученных теоремах устанавливаются изменения значений напора, а также расхода, скорости фильтрации и градиентов напора при таких возмущениях задачи, как вдавливание отдельных поверхностей, изменение заданных граничных значений напора и т. п. Показывается также строгая монотонность связи расхода и перепада напора в области типа укрупненной трубки тока и необязательность уменьшения расхода с ростом фильтрационного сопротивления. Обсуждается вопрос о соответствии введенным ограничениям некоторых распространенных моделей пористых сред.

1. Условия применимости теорем. Теоремы сравнения предполагают сравнение решений двух различающихся чем-то задач. Считается, что решения как исходной, так и измененной задач существуют и удовлетворяют перечисленным ниже условиям.

Фильтрационное течение предполагается пространственным, установившимся, жидкость и среда — несжимаемыми. Связь между скоростью фильтрации $\mathbf{v}(x, y, z)$ и градиентом напора $\mathbf{J}=\nabla h(x, y, z)$ представляется однозначной зависимостью (законом фильтрации) $\mathbf{v}=\mathbf{R}(\mathbf{J}, x, y, z)$. Начальный градиент отсутствует, т. е. v и J обращаются в нуль только одновременно.

Функция напора $h(x, y, z)$ считается непрерывной, имеющей обобщенные производные в области течения Ω и принадлежащей в зависимости от свойств векторной функции $\mathbf{R}$ некоторому пространству функций P (такому, как W_2^1, W_m^1 и т. п. (см., например, [3])).

Ясно, что приведенное описание закона фильтрации является слишком неопределенным и недостаточным для формулировки содержательных выводов о свойствах решений задач. Наибольший интерес, разумеется, представляют законы, обеспечивающие в определенном смысле практичность модели, когда она соответствует общим физическим предпосылкам и представлениям и обладает естественными свойствами. Как показано ниже, для этого достаточно ввести следующие ограничения, которым во всех точках должна удовлетворять зависимость между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{J}$.

Для некоторых двух пар векторов $\mathbf{J}^{**}$, $\mathbf{v}^{**}$ и $\mathbf{J}^{*}$, $\mathbf{v}^{*}$ в данной точке рассмотрим разности $\mathbf{v}_0=\mathbf{v}^{**}-\mathbf{v}^{*}$, $\mathbf{J}_0=\mathbf{J}^{**}-\mathbf{J}^{*}$ и будем требовать, чтобы или величины v_0 и J_0 одновременно равнялись нулю, или имело место неравенство

$$\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{J}_0<0 \tag{1.1}$$

Смысл условия (1.1) с физической точки зрения понятен: добавление дополнительной скорости $\mathbf{v}_0$ должно вызывать противодействие среды (изменение градиента напора $\mathbf{J}_0$) с составляющей, направленной против $\mathbf{v}_0$ (или, наоборот, добавочный градиент напора должен вызывать аналогичное изменение скорости). Вместе с тем обязательность ограничения (1.1) вряд ли можно считать интуитивно очевидной и физически безусловно ясной. Поэтому представляется целесообразным обсудить правомерность его введения.

Сначала покажем, что в отдельных наиболее распространенных моделях фильтрации условие (1.1) выполняется.

Линейная анизотропная фильтрация описывается законом $\mathbf{v}=-\mathbf{K}\cdot\nabla h$, где $\mathbf{K}$ — симметричный тензор второго ранга, коэффициенты которого образуют положительно определенную матрицу. В этом случае $\mathbf{v}_0=-\mathbf{K}\cdot\nabla h_0$ и выполнение условия (1.1) очевидно.

В случае нелинейной изотропной фильтрации без начального градиента закон фильтрации может быть представлен в форме [4, 5]

$$\mathbf{v}=-\Psi(J, x, y, z)\mathbf{J}/J \tag{1.2}$$

где функция Ψ удовлетворяет условиям

$$\Psi(0, x, y, z)=0; \quad \Psi(J^{**}, x, y, z)>\Psi(J^{*}, x, y, z), \quad J^{**}>J^{*} \tag{1.3}$$

Пусть в данной точке $J^{**}>J^{*}$. В силу (1.2) векторы $\mathbf{v}^{*}$, $\mathbf{J}^{*}$ и $\mathbf{v}^{**}$, $\mathbf{J}^{**}$ попарно коллинеарны (противоположно направлены) и вместе с двумя векторами $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{J}_0$ лежат в одной плоскости. Введем в ней вспомогательную систему координат (u_1, u_2) так, что $\mathbf{J}^{**}=(u_1^{**}, 0)$, $\mathbf{J}^{*}=(u_1^{*}, u_2^{*})$, $u_1^{**}>0$. Соответственно обозначим (в тех же координатах) $\mathbf{v}^{**}=(w_1^{**}, 0)$, $\mathbf{v}^{*}=(w_1^{*}, w_2^{*})$. Тогда вследствие $J^{**}>J^{*}$ очевидно, что $u_1^{**}>u_1^{*}$ и, по (1.2), (1.3), $w_1^{**}<w_1^{*}$, $w_1^{**}<0$, а в силу противоположности направлений $\mathbf{v}^{*}$ и $\mathbf{J}^{*}$ составляющие u_2^{*} и w_2^{*} имеют разные знаки. Поэтому в скалярном произведении $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{J}_0=(w_1^{**}-w_1^{*})(u_1^{**}-u_1^{*})+u_2^{*}w_2^{*}$ первое слагаемое правой части отрицательно, а второе — неположительно, откуда следует (1.1).

В качестве следующего примера рассмотрим мелкослоистый грунт, состоящий из чередующихся слоев двух типов I и II, в каждом из которых выполняется (1.1) (в частности, это справедливо, если слои изотропны). Выделим элементарный объем G, содержащий достаточно много слоев грунта. После макроосреднения для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{J}$ всей системы будем иметь

$$\mathbf{v}=(G_1\mathbf{v}_1+G_2\mathbf{v}_2)/G, \qquad \mathbf{J}=(G_1\mathbf{J}_1+G_2\mathbf{J}_2)/G \tag{1.4}$$

где индексы 1, 2 относятся к величинам соответственно в слоях I и II типа, $G=G_1+G_2$. На линиях раздела грунтов вследствие неразрывности течения и непрерывности напора выполняются условия

$$v_z=v_{1z}=v_{2z}, \quad J_x=J_{1x}=J_{2x}, \quad J_y=J_{1y}=J_{2y} \tag{1.5}$$

Тогда для произвольных векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{J}$, удовлетворяющих (1.4), (1.5), имеет место

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}=(G_1\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{v}_1+G_2\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{v}_2)/G$$

Ясно, что соотношения (1.4), (1.5) справедливы и для векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{J}_0$, поэтому

$$\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{J}_0=(G_1\mathbf{J}_{01}\cdot\mathbf{v}_{01}+G_2\mathbf{J}_{02}\cdot\mathbf{v}_{02})/G<0$$

т. е. для осредненных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{J}$ имеет место (1.1).

Таким образом, условие (1.1) справедливо для характерных законов фильтрации, в том числе для построенной по физически ясным предпосылкам анизотропной нелинейной модели мелкослоистой среды. Последующие разделы работы показывают, что при выполнении (1.1) в типичных задачах с заданными областями решение единственно и обладает достаточно естественными свойствами (представленными теоремами сравнения). С другой стороны, при законах, не удовлетворяющих (1.1) (даже если считать их физически возможными), следует с осторожностью относиться к математической модели течения в целом, поскольку тогда возможно появление разрывов скорости в течении, неединственности решения и других нежелательных свойств. Это видно уже в случае изотропной нелинейной фильтрации, где, как показано выше, невыполнение

(1.1) соответствует немонотонности зависимости $v(J)$ или $J(v)$. Обсуждая связь основных свойств моделей с выполнением условия (1.1), можно также указать, что для модели, предложенной в [6], от него зависит эллиптичность уравнения для напора в плоскости годографа скорости.

Следует отметить, что используемые во многих работах нелинейные законы для анизотропных случаев, записанные путем формального обобщения изотропных, могут не удовлетворять (1.1). Так, для простого закона вида [7] $\mathbf{J}=-(F(v)/v)\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}$, где тензор $\mathbf{K}$ характеризует анизотропию грунта, $F(v)$ — скалярная функция, можно привести примеры с монотонной функцией $F(v)$, не удовлетворяющие (1.1).

2. Теоремы сравнения. Теоремы сформулированы для области фильтрации Ω, ограниченной поверхностями равного напора S_k, где $h=H_k$, поверхностями L_m, где $v_n=q(x, y, z)$ (v_n — проекция скорости на внутреннюю нормаль $\mathbf{n}$), и поверхностями высачивания L_z, где $h=z$, $z\leqslant\max H_k$ и ось z направлена вертикально вверх. Здесь и всюду далее $k=1, 2, \ldots, j$; $m=1, 2, \ldots, i$. На поверхностях высачивания выполняется условие $v_n<<0$. Все поверхности предполагаются кусочно-гладкими.

В тех точках граничных поверхностей, где скорость $\mathbf{v}$ входная (направлена внутрь области: $v_n>0$), градиент напора $\mathbf{J}$ будем считать также входным ($J_n<0$).

Утверждения теорем об изменении градиентов напора и нормальных составляющих скоростей на границе относятся, естественно, лишь к случаю, когда эти величины определены.

В дальнейшем разность значений какой-либо величины для измененного (помеченной двумя звездочками) и исходного (помеченной одной звездочкой) решений обозначается индексом 0 (например, $h_0=h^{**}-h^*$), а объединение поверхностей S_k и L_z — через S.

Теорема 1. Если в постановке задачи изменяются лишь значения H_k, то: а) значения напора в Ω и на L_m изменяются так, что выполняются неравенства

$$\min\{0, \min_k H_{0k}\}\leqslant h_0\leqslant\max\{0, \max_k H_{0k}\}$$

б) на тех поверхностях S_k, где значение h_0 минимально (максимально) для S, выходные градиенты напора и нормальные составляющие выходных скоростей по величине не уменьшаются (не увеличиваются или меняют направление), а входные градиенты напора и нормальные составляющие входных скоростей по величине не увеличиваются или меняют направление (по величине не уменьшаются).

Доказательство. Так как $v_{0n}=0$ на L_m, то при выполнении условия (1.1) для функции h_0 справедлив принцип максимума: функция h_0 в Ω и на L_m не может принимать значений больших (меньших), чем на S.

В самом деле, в соответствии с теорией обобщенных решений, учитывая неразрывность течения в Ω, имеем для всех $\varphi\in P$, таких, что $\varphi=0$ на S [3]

$$\int_\Omega \mathbf{v}_0\cdot\nabla\varphi\, d\Omega=0 \tag{2.1}$$

Обозначим $M=\max h_0$, $(x, y, z)\in S$. Пусть в Ω или на L_m имеется точка, где $h_0>M$. Тогда, так как h_0 — непрерывная функция, существует некоторая область Ω_M, где $h_0>M$, причем граница Ω_M может состоять лишь из поверхностей $h_0=M$ или L_m. Нетрудно видеть, что при функции φ, определенной как $\varphi=h_0-M$ в $\bar\Omega_M$ и $\varphi=0$ в $\bar\Omega/\bar\Omega_M$, равенство (2.1) должно выполняться. Однако по условию (1.1)

$$\int_\Omega \mathbf{v}_0\cdot\nabla\varphi\, d\Omega=\int_{\Omega_M}\mathbf{v}_0\cdot\nabla(h_0-M)\, d\Omega=\int_{\Omega_M}\mathbf{v}_0\cdot\nabla h_0\, d\Omega<0$$

Полученное противоречие доказывает первую часть принципа максимума. Аналогично рассматривается и случай минимума. Тогда утверждение *а*) теоремы следует из неравенств, которые можно записать для значений h_0 в Ω и на L_m

$$\min_{s} h_0 \leqslant h_0 \leqslant \max_{s} h_0$$

На тех поверхностях S_k, где достигается минимум функции h_0 на S (т. е. и в $\bar{\Omega}$), имеем $\partial h_0/\partial n \geqslant 0$. Так как $\mathbf{J}=(\partial h/\partial n)\mathbf{n}$ на поверхностях S_k, то в тех точках, где $\mathbf{J}^*$ является выходным, имеет место $\partial h^*/\partial n>0$. Тогда $\partial h^{**}/\partial n \geqslant \partial h^*/\partial n>0$, т. е. градиент напора остается выходным и для измененного решения, а его величина не уменьшается. Так как на S_k выполняется неравенство $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{J}_0=v_{0n}(\partial h_0/\partial n)\leqslant 0$, справедливо утверждение о выходных скоростях на указанных поверхностях S_k. Такими же рассуждениями доказываются и другие утверждения теоремы. Теорема 1 доказана.

Заметим, что из доказательства теоремы следует единственность решения задачи.

Аналогичную теорему можно доказать и в случае, когда сравниваемые задачи различаются лишь значениями $q(x, y, z)$.

При наличии дополнительных данных в постановке задачи можно сделать и другие выводы. Например, пусть максимум функции h_0 в $\bar{\Omega}$ равняется H_p, т. е. поверхность S_p является поверхностью наибольшего напора. Можно показать, что для этого достаточно выполнения условий $H_p \geqslant H_k$ $(k \neq p)$ и $q \leqslant 0$. Таким же образом определяется и поверхность наименьшего напора.

Теорема 2. При вдавливании поверхности наибольшего напора, а также при замене части поверхностей L_m, L_z или S_k поверхностью наибольшего напора: а) значения напора в Ω^{**} и на L_m^{**} не уменьшаются; б) на неизменных частях поверхностей S_k выходные (входные) градиенты напора и нормальные составляющие выходных (входных) скоростей по величине не уменьшаются (не увеличиваются или меняют направление); в) на поверхностях L_z^{**} величины нормальных составляющих скоростей не уменьшаются.

Аналогичные утверждения получаются и при изменении поверхности наименьшего напора.

3. Случай укрупненной трубки тока. Если область фильтрации ограничена только поверхностями наибольшего напора S_1 $(h=H_1)$, наименьшего напора S_2 $(h=H_2)$ и непроницаемыми поверхностями L_N $(v_n=0)$, в частности в случае укрупненной трубки тока, то можно получить некоторые дополнительные свойства.

Теорема 3. При увеличении перепада напора $H=H_1-H_2$: а) изменение напора в Ω и на L_N такое, что справедливы неравенства $H_{02} \leqslant h_0 \leqslant H_{01}$; б) величины градиентов напора и нормальных составляющих скоростей на поверхностях наибольшего и наименьшего напора не уменьшаются; в) расход Q строго увеличивается.

Утверждения а), б) теоремы доказываются аналогично предыдущим теоремам. Заметим, что из утверждения б) следует вывод о неуменьшении расхода Q. Однако здесь можно доказать более сильное утверждение. В самом деле, для расхода имеет место соотношение

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{J}\, d\Omega = -QH \tag{3.1}$$

Докажем следующее равенство:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^{**}\cdot\mathbf{J}_0\, d\Omega = -Q^{**}H_0 \tag{3.2}$$

Для этого с учетом (3.1) достаточно показать, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{v}^{**}\cdot\mathbf{J}^{*}\, d\Omega = -Q^{**}H^{*}$$

С этой целью представим левую часть в виде

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{v}^{**}\cdot\mathbf{J}^{*}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mathbf{v}^{**}\cdot\nabla\varphi\, d\Omega + (H^{*}/H^{**}) \int\limits_{\Omega} \mathbf{v}^{**}\cdot\mathbf{J}^{**}\, d\Omega$$

$$\varphi = h^{*} - (h^{**}H^{*} - H_2^{**}H_1^{*} + H_2^{*}H_1^{**})/H^{**}$$

Для данной области Ω функция φ и вектор $\mathbf{v}^{**}$ удовлетворяют аналогичному (2.1) равенству, поэтому первый интеграл в правой части равен нулю, а из (3.1) второй интеграл равен $-(H^{*}/H^{**})Q^{**}H^{**}$, что доказывает (3.2).

Таким же образом получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{v}^{*}\cdot\mathbf{J}_0\, d\Omega = -Q^{*}H_0 \tag{3.3}$$

Вычитая (3.3) из (3.2) и учитывая условие (1.1), имеем

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{J}_0\, d\Omega = -Q_0H_0 < 0$$

Это доказывает утверждение в) теоремы 3.

Замечание 1. Последнее неравенство показывает, что при решении задачи в случае, когда задан Q, а H определяется, увеличение Q также влечет строгое увеличение H.

Следующая теорема относится к плоской укрупненной трубке тока, причем задача рассматривается в постановке, приведенной в замечании 1.

Теорема 4. При вдавливании непроницаемой границы: а) значения функции тока $\psi(x, y)$ в Ω^{**}, на S_1 и S_2 не увеличиваются, если вдавливается линия с условием $\psi=0$ и не уменьшаются при вдавливании линии $\psi=Q$; б) перепад напора H не уменьшается; в) значения скорости не уменьшаются на неизменной линии тока и не увеличиваются на неизменных частях вдавливаемой линии.

Для доказательства теоремы введем векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{I}$, равные по абсолютной величине J и v соответственно, но повернутые относительно их на угол $\pi/2$. Тогда имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{w}=0,\quad \mathbf{I}=-\nabla\psi=\nabla\eta$$

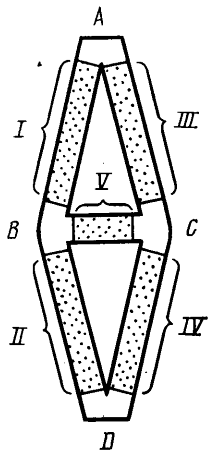
Как следствие условия (1.1) в точках, где $w_0\neq 0$, выполняется $\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{I}_0 < 0$. Эти соотношения определяют некоторый фильтрационный поток с функцией тока $\xi=h$ и напором $\eta=-\psi$, причем для функции η_0 (или ψ_0) справедлив принцип максимума, что позволяет доказать теорему аналогично предыдущим теоремам.

Замечание 2. Из теорем 3, 4 следует, что в случае плоской трубки тока вдавливание линии тока при неизменном перепаде H может привести лишь к уменьшению расхода Q.

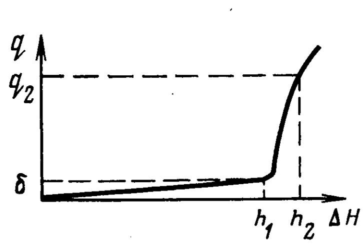
Для линейного и степенного законов фильтрации В. М. Ентовым [2] было показано, что увеличение фильтрационного сопротивления в любой части трубки тока (в частности, вдавливание непроницаемой границы) ведет к уменьшению расхода, причем в [2] ставится вопрос о характере этой зависимости при произвольном законе фильтрации.

Цель последующих рассуждений — показать, что такая, как в линейном случае, связь не обязательна для произвольных законов и можно подобрать область течения, значение перепада напоров и законы фильтрации, при которых увеличение в определенном месте фильтрационного сопротивления вызывает не уменьшение, а увеличение расхода. В примере должно рассматриваться течение в укрупненной трубке тока. Фильтрация должна удовлетворять закону вида (1.2) и условиям (1.3). Таким образом, показывается возможность построения примера, когда $Q^{**}>Q^*$ при $\Psi^{**}(J, x, y, z) \leqslant \Psi^*(J, x, y, z)$ в Ω (при определенном значении H).

Для выяснения основного принципа построения рассмотрим сначала вспомогательный упрощенный случай: фильтрационную систему, составленную из отдельных участков — трубочек, каждая из которых заполнена однородной пористой средой подобно прибору Дарси. Трубочки соединя-



Фиг. 1



Фиг. 2

ются свободными концами. Так как в соединении напор жидкости постоянен, то течение в каждой трубочке будет одномерным, легко поддающимся расчету. Рассматриваемая ниже система включает пять таких трубочек (фиг. 1). Будем считать, что их размеры и характеристики заполняющих сред можно подобрать так, чтобы для каждой из трубочек имела место определенная зависимость расхода q через трубочку от перепада ΔH напора на ее концах. В трубочках I и IV зависимость примем линейной $q=\Delta H$ (в выбранных единицах измерения), в трубочках II и III зависимость должна быть нелинейной, такой, что ее график проходит через две отмеченные точки с координатами (h_1, δ) и (h_2, q_2), $h_1={}^1/_2+\varepsilon$, $h_2={}^1/_2+2\varepsilon$, $q_2={}^1/_2-2\varepsilon-\delta$ (фиг. 2). О значениях δ и ε будет сказано ниже. Пока заметим, что для выполнения второго из условий (1.3) должно быть

$$\delta>0, \ \varepsilon>0, \ {}^1/_2-2\varepsilon-\delta>\delta \tag{3.4}$$

Характеристики трубочек I—IV одинаковы в обеих системах — исходной и измененной. Пусть трубочка V в исходной системе имеет такую характеристику, что $q={}^1/_2-\varepsilon-\delta$ при $\Delta H=2\varepsilon$ (например, линейную).

Если задать $h=1$ в соединении A, $h=0$ в D, то в соединении B при этом будет $h={}^1/_2+\varepsilon$, в C соответственно $h={}^1/_2-\varepsilon$, расход через трубочки I и IV равен ${}^1/_2-\varepsilon$, через II и III равен δ, а через V равен ${}^1/_2-\varepsilon-\delta$. Общий расход Q^* между A и D равен $Q^*={}^1/_2-\varepsilon+\delta$.

Пусть теперь сопротивление трубочки V возросло так, что даже при $\Delta H=4\varepsilon$ имеет место лишь $q=\delta$. Тогда окажется $h={}^1/_2+2\varepsilon$ в B, $h={}^1/_2-2\varepsilon$ в C, расход через участки I и IV равен ${}^1/_2-2\varepsilon$, через II и III — ${}^1/_2-2\varepsilon-\delta$ при расходе δ через участок V. Поэтому для общего расхода между A и D теперь имеем $Q^{**}=1-4\varepsilon-\delta$, т. е. $Q^{**}>Q^*$ при

$$3\varepsilon+2\delta<{}^1/_2, \ \varepsilon>0, \ \delta>0 \tag{3.5}$$

Выполнение (3.4) следует из (3.5). Следовательно, можно подобрать такие δ и ε, что в построенной системе при увеличении фильтрационного сопротивления в определенном месте общий расход растет, причем законы фильтрации в примененных пористых средах являются допустимыми и, видимо, физически возможными.

Перейдем от вспомогательной системы к трубке тока. Для такого перехода в построенной системе из трубочек надо, например, «замазать» места соединений достаточно сильно проницаемой средой, а промежутки между трубочками — достаточно слабо проницаемой, убрав, конечно, сами непроницаемые трубочки и окружив полученную область непроницаемой стенкой. Такая неоднородная область, будучи обычной трубкой тока, должна работать качественно так же, как и вспомогательная система из трубочек.

Используя вспомогательную систему, можно также построить пространственную однородную область, являющуюся простой трубкой тока, в которой вдавливание непроницаемой поверхности приводит к увеличению расхода.

Можно отметить, что предложенный принцип при требовании однородности грунта реализуется лишь в пространственной трубке тока, а в плоском случае необходима уже неодносвязная область (или соответствующая неоднородность грунта). Аналогично пример вдавливания непроницаемой границы в случае простой трубки тока носит подчеркнуто пространственный характер. В плоском случае тоже потребуется неодносвязность области. Это, конечно, закономерно — невозможность такого примера для плоской трубки тока была доказана В. М. Ентовым [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и p, q-аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
2. *Ентов В. М.* Некоторые проблемы математической теории нелинейной фильтрации // Зап. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 96. С. 30–38.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 576 с.
4. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 200 с.
5. *Шешуков Е. Г.* Нелинейная фильтрация в анизотропном грунте // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. Вып. 12. С. 198–203.
6. *Костерин А. В.* Об уравнениях нелинейной анизотропной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 158–160.
7. *Голубева О. В.* Уравнения фильтрации, отнесенные к главным направлениям анизотропии // Проблемы теоретической гидродинамики. Тула, 1977. Вып. 4. С. 3–9.

Казань

Поступила в редакцию
25.V.1987