МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1988

УДК 532.517.2.013.4

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ

ТРЕПАЛИНА Е. П.

Неустойчивость в плоском слое смешения, обусловленная наличием точки перегиба в профиле скорости, изучалась довольно широко (см., например, [1]). Меньшее внимание уделялось исследованию возможности возникновения неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в цилиндрическом слое смешения. Экспериментальные исследования развития неустойчивости на границах первоначально осесимметричных вихрей [2,3] показывают, что основной вихрь может распадаться на систему мелких регулярных вихрей, движущуюся вокруг общего центра. Количество возникающих в процессе распада вихрей может быть различным, а сам характер распада достаточно сложен. При этом движение вдоль оси основного вихря практически отсутствует, и всю картину течения можно рассматривать как плоскую, а образование мелких вихрей – как развитие двумерных возмущений в цилиндрическом слое смешения между ядром основного вихря, вращающимся почти твердотельно, и периферией. В настоящей работе исследуется линейная задача устойчивости цилиндрического слоя смешения по отношению к малым возмущениям.

1. Рассмотрим плоский осесимметричный вихрь в вязкой однородной несжимаемой жидкости. Для описания течения введем полярную систему координат $(r, \varphi)$, центр которой совпадает с центром вихря. Представим движение в виде суммы основного осесимметричного вращения (величины с нулевым индексом) и малых возмущений (величины со штрихом)

$$u_r=\varepsilon u_r'(r,\varphi,t),\quad u_\varphi=u_{\varphi 0}(r,t)+\varepsilon u_\varphi'(r,\varphi,t)\qquad p=p_0+\varepsilon p' \tag{1.1}$$

Здесь $u_r'$, $u_\varphi'$, $u_{\varphi 0}$ – компоненты скорости, $p'$ и $p_0$ – давление, $\varepsilon$ – параметр, равный отношению амплитуды скорости возмущения к амплитуде скорости основного течения. В предположении малости возмущения параметр $\varepsilon$ также считается малым.

Возмущенное движение удовлетворяет уравнениям Навье – Стокса в полярной системе координат и уравнению неразрывности. Подставляя соотношения (1.1) в эти уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых отношениях $\varepsilon$, получим следующие системы уравнений для основного течения и для возмущений:

$$\frac{u_{\varphi 0}}{r^2}=\frac{\partial p_0}{\partial r},\qquad \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_{\varphi 0}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial r}-\frac{u_{\varphi 0}}{r^2}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_r'}{\partial t}+\frac{u_{\varphi 0}}{r}\frac{\partial u_r'}{\partial\varphi}-2\frac{u_{\varphi 0}u_\varphi'}{r}=-\frac{\partial p'}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\Delta u_r'-\frac{u_r'}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi'}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial u_\varphi'}{\partial t}+u_r'\frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial r}+\frac{u_{\varphi 0}}{r}\frac{\partial u_\varphi'}{\partial\varphi}+\frac{u_r'u_{\varphi 0}}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial\varphi}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\Delta u_\varphi'-\frac{u_\varphi'}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r'}{\partial\varphi}\right) \tag{1.3}$$

Членами при $\varepsilon^2$ пренебрегаем. Здесь $\mathrm{Re}=R_0\Omega_0{}^2/\nu$ – число Рейнольдса, $R_0$ и $\Omega_0{}^{-1}$ – соответственно масштабы длины и времени, масштаб скорости равен $R_0\Omega_0$. В качестве начальных условий для основного течения возьмем следующие:

$$u_{\varphi 0}(r,0)={}^1/_2 r,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\quad u_{\varphi 0}=0,\quad r>1 \tag{1.4}$$

В качестве граничных условий для возмущений, исходя из физического смысла, следовало бы потребовать затухания возмущений на бесконечности и ограниченности их в центре. Учитывая, однако, что задача решается численно, приходится ставить условия на конечных границах. В работе принято, что возмущения сосредоточены в кольце с границами $R_1<1$, $R_2>1$. На этих границах отсутствует радиальная составляющая возмущенной скорости и касательное напряжение

$$r=R_1,\ R_2,\ u_r'=0,\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_r'}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r'}{r}\right)=0 \tag{1.5}$$

2. Решим полученные системы уравнений. Первое уравнение (1.2) представляет собой уравнение баланса давления и в дальнейшем рассматриваться не будет. Во втором уравнении сделаем замену переменных $\tau=t/\mathrm{Re}$ и введем завихренность $\omega$. В результате получим уравнение диффузии завихренности с начальными условиями из (1.4.)

$$\omega=r\frac{\partial}{\partial r}(ru_{\varphi_0}),\qquad u_{\varphi_0}=\frac{1}{r}\int\limits_0^r\omega r\,dr \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} \tag{2.2}$$

$$\omega(r,\ 0)={}^1/{}_2\delta(r-1),\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ \omega=0,\ r>1 \tag{2.3}$$

Здесь $\delta(r-1)$ — $\delta$-функция Дирака. Используя результаты [4], найдем решение задачи (2.1)—(2.3)

$$\omega(r,\alpha)=1-e^{-{}^1/{}_2\alpha(r^2+1)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}r^kI_k(\alpha r)+\frac{\alpha}{2}I_0(\alpha r)\right],\ 0\leqslant r\leqslant 1 \tag{2.4}$$

$$\omega(r,\alpha)=e^{-{}^1/{}_2\alpha(r^2+1)}\left[\sum_{k=+1}^{\infty}r^{-k}I_k(\alpha r)-\frac{\alpha}{2}I_0(\alpha r)\right],\ r>1$$

где $I_k(\alpha r)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода, $\alpha=1/(2\tau)$. **Отметим, что** характерное время эволюции основного движения больше времени развития возмущения, определяемого масштабом времени, в Re/2 раз (см. замены переменных). Поэтому основное течение можно считать квазистационарным. Это позволяет исследовать его устойчивость обычными методами теории гидродинамической устойчивости. В этом случае $\alpha$ выступает как параметр.

Решим систему уравнений для возмущений (1.3). Уравнение неразрывности позволяет ввести функцию тока $\psi(r,\ \varphi,\ t)$. Переходя в уравнения к функции тока и исключая давление, получаем систему уравнений с граничными условиями

$$\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{u_{\varphi_0}}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\left(\Delta u_{\varphi_0}-\frac{u_{\varphi_0}}{r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta g,\qquad g=\Delta\psi$$

$$u_r'=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\qquad u_\varphi'=\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.5}$$

$$r=R_1R_2,\ \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=0 \tag{2.6}$$

Ищем возмущения в виде нормальных мод

$$\psi=\psi(r)e^{-\lambda t+in\varphi},\quad g=g(r)e^{-\lambda t+in\varphi}$$

Здесь $\lambda=c_r+ic_i$ — собственное значение задачи, волновое число $n$ принимает целые значения. Подставив эти разложения в (2.5) и (2.6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\lambda g=\frac{1}{\mathrm{Re}}Lg+i\frac{n}{r}\left[u_{\varphi 0}g-\left(\Delta u_{\varphi 0}-\frac{u_{\varphi 0}}{r^2}\right)\psi\right],\quad g=L\psi$$

$$L=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2} \tag{2.7}$$

$$r=R_1, R_2,\quad \psi=0,\quad \frac{d^2\psi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}=0 \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.7) с граничными условиями (2.8) определяет задачу на собственные значения. Для решения этой задачи используем метод Годунова, описанный в [5]. Для реализации этого метода необходимо достаточно точно знать начальное приближение собственного значения $\lambda$. Для его вычисления воспользуемся методом, предложенным в [6]. Введем перед вторым членом в правой части первого уравнения (2.7) параметр $\mu$, значения которого будем изменять от 0 до 1 с некоторым малым шагом. При $\mu=0$ имеем систему уравнений

$$-\lambda g=\frac{1}{\mathrm{Re}}Lg,\quad g=L\psi$$

с граничными условиями (2.8). Эта система имеет аналитическое решение [7]

$$g=C_1J_n(\lambda\,\mathrm{Re}\,r)+C_2N_n(\lambda\,\mathrm{Re}\,r)$$

$$\psi=\frac{r^n}{2n}\int\limits_{R_1}^{r}r^{-n}gr\,dr-\frac{r^{-n}}{2n}\int\limits_{R_1}^{r}r^n gr\,dr+C_3r^n+C_4r^{-n}$$

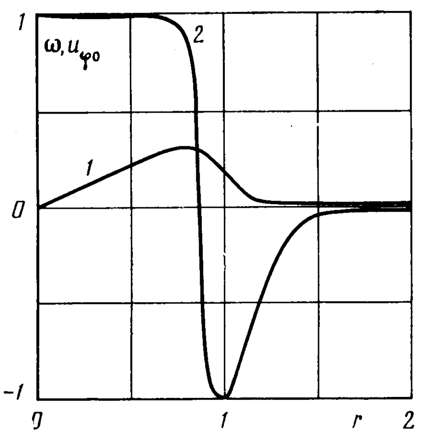
где $J_n(\lambda\,\mathrm{Re}\,r)$ и $N_n(\lambda\,\mathrm{Re}\,r)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно. Для определения неизвестных констант $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ подставим решение в граничные условия. В результате получим однородную систему уравнений. Решение ее будет нетривиальным в случае равенства нулю детерминанта этой системы, который зависит от собственного значения. Приравняв детерминант к нулю, получим спектр собственных значений при $\mu=0$. Зная собственное значение при $\mu=0$ и беря его в качестве начального приближения, полагаем $\mu=\mu_1$, где $\mu_1$ достаточно мало, и решаем систему (2.7) методом Годунова. В результате получим собственное значение при $\mu_1$. Повторяя эту процедуру, дойдем до $\mu=1$ и получим искомое значение $\lambda$ и соответствующие ему собственные функции $\psi$ и $g$.

3. Профили скорости основного течения $u_{\varphi 0}$ и его завихренности $\omega$ вычислялись методом численного интегрирования таблично заданных функций. Параметр $\alpha$ брался равным 50. Графики $u_{\varphi 0}$ и $\omega$ представлены на фиг. 1 (кривые *1* и *2* соответственно). Определим ширину зоны смешения следующим образом: проведем в точке максимума скорости касательную к графику и назовем ее уровнем максимальной скорости. Уровнем минимальной скорости будем считать $u_{\varphi 0}=0$. В точке перегиба профиля проведем касательную к графику. Эта прямая пересечет оба уровня при некоторых значениях радиуса. Модуль разности этих значений назовем шириной зоны смешения. В данной работе она равнялась $\approx 0{,}3$. Точка перегиба профиля скорости находится вблизи $r=1$. Волновое число $n$ принимало целые значения от 2 до 6. Число Рейнольдса менялось от 50 до 500. В зависимости от этих параметров исследовалась устойчивость основного течения для различных значений границ $R_1$ и $R_2$.

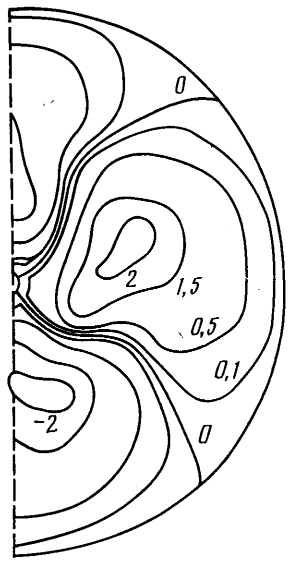
Значения, которые принимали внешняя и внутренняя границы, зависимость от них числа Рейнольдса Re и волнового числа $n$ неустойчивых возмущений представлены ниже:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| $R_2$ | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 2,1 | 2,1 | 2,1 | 2,5 | 2,5 | 2,5 |
| $n$ | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 |
| Re | 151 | 189 | 379 | 121 | 171 | 363 | 66 | 121 | 260 | 62 | 117 | 256 |

Видно, что при увеличении значения внешней границы и уменьшении внутренней границы число Рейнольдса уменьшается. Волновое число наиболее неустойчивого возмущения в данной задаче равнялось двум. Неустойчивость при меньших числах Рейнольдса возникала в случаях,




Фиг. 1




Фиг. 2

когда внутренняя граница выбиралась достаточно близко от центра вихря (область твердотельного вращения), а внешняя — на достаточном удалении от точки перегиба.

На фиг. 2 изображено поле скоростей неустойчивого возмущения при $R_1=0{,}1$, $R_2=3{,}0$, $\mathrm{Re}\approx 60$, $n=2$ (представлена половина рисунка). При этих параметрах возмущение захватывает область, значительно превышающую зону перегиба профиля скорости основного течения. Максимум скорости возмущения приходится на зону перегиба.

В заключение автор благодарит А. Е. Ордановича за полезное обсуждение результатов и замечания по содержанию работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
2. *Rabaund M., Couder J.* A shear-flow instability in a circular geometry // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. B. 291–319.
3. *Ахметов Д. Г., Тарасов В. Ф.* О структуре и эволюции вихревых ядер // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1986. № 5. С. 68–73.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2. 727 с.
5. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3.
6. *Михайлова Л. А., Орданович А. Е.* Физико-математическое моделирование упорядоченных структур в пограничном слое атмосферы // Отчет ин-та механики МГУ. 1985. № 3139.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.



Москва

Поступила в редакцию
31.VII.1987