

УДК 532.517.2-2

**ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ  
С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ (ДВУМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)**

ВАСИЛЬЕВ С. А., СМИРНОВ Е. М.

Изучается ламинарное течение во вращающемся прямоугольном канале с отсосом жидкости через одну или несколько проницаемых стенок. Обсуждаются условия, для которых возможна двумерная постановка расчета ядра течения: формулируется соответствующая задача. Для канала с заглушенным концом приводятся результаты вычислений, иллюстрирующие совместное влияние отсоса и вращения канала вокруг поперечной оси.

1. Рассмотрим установившееся во времени течение несжимаемой вязкой жидкости в канале прямоугольного поперечного сечения ( $2b \times 2h$ ), который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг поперечной оси (фиг. 1). Стенки канала будем полагать попарно перпендикулярными или параллельными оси вращения. Одна или несколько стенок проницаемы и через них осуществляется отсос жидкости. Исследование поставленной задачи имеет важное значение для совершенствования конвективных систем охлаждения вращающихся частей высокотемпературных газовых турбин.

В течении выделим три области: два относительно тонких трехмерных слоя вблизи стенок, перпендикулярных к оси вращения, и приближенно двумерное ядро со слабым изменением скорости по направлению данной оси. Условия, при которых возможен такой подход, обсуждаются ниже. Введем декартову систему координат  $x, y, z$ , жестко связанную с каналом и ориентированную так, чтобы ось  $y$  была направлена по оси вращения, ось  $z$  — параллельно ограничивающим стенкам в сторону течения; начало координат расположим в центре входного сечения. Уравнения движения в ядре потока запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} - 2\omega w + \nu \Delta u \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + 2\omega u + \nu \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= F, \quad p^* = p - \rho \omega^2 \frac{r^2}{2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $p^*$  — модифицированное давление,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $r$  — расстояние до оси вращения;  $F$  — величина, определяющая перенос массы в направлении оси вращения.

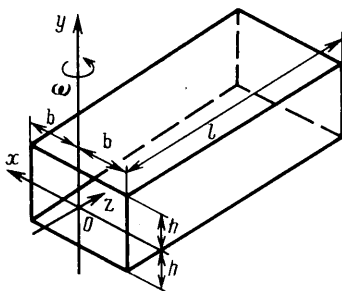
Для численного интегрирования системы уравнений (1.1) использовался метод установления в сочетании с методом искусственной сжимаемости. Левые части уравнений движения записывались в консервативной форме. Пространственные производные аппроксимировались симметричными разностями на сетке метода маркеров и ячеек со смещенными узлами. Уравнения расщеплялись по пространственным переменным. Выбранная неявная численная схема, сходная с предложенной в [2, 3], обеспечивала для установившегося решения аппроксимацию  $O(h_x^2 + h_z^2)$  ( $h_x, h_z$  —

пространственные шаги по координатам  $x$  и  $z$ ) и реализовывалась последовательными прогонками на дробных шагах вдоль направлений  $x$  и  $z$ .

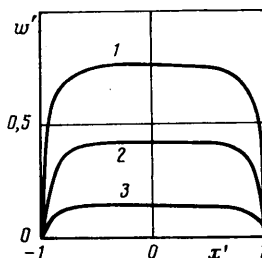
2. Разберем сначала случай  $h/b \gg 1$ , когда выделение плоского течения в ядре потока представляется очевидным. Отсос производится через стенки  $x = \pm b$ , величина  $F = 0$ . В данном случае вращение не влияет на поле скорости, если сохраняется устойчивость основного ламинарного течения и, разумеется, условия на ограничивающих поверхностях, в том числе на входе и выходе из канала. В справедливости этого утверждения убедимся, вводя новое модифицированное давление [4]  $p_{**} = p_* + 2\rho\omega\psi$ , где  $\psi$  — функция тока. Подстановка этого выражения в (1.1) дает уравнения движения в неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{**}}{\partial x} + \nu \Delta u \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{**}}{\partial z} + \nu \Delta w, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Плоское течение в неподвижных каналах с равномерно распределенным отсосом жидкости через одну или обе стенки изучалось многими



Фиг. 1



Фиг. 2

авторами, важнейшие результаты обобщены в монографии [5]. Согласно изложенному выше, эти результаты могут быть непосредственно приложены и к случаю течения во вращающемся канале с  $h/b \gg 1$ . Вместе с тем данные, полученные для плоских течений, могут быть использованы в целях оценки условий, при которых правомерно разделение потока на ядро и трехмерные пристенные слои в случае  $h/b = O(1)$ . Действительно, решение автомодельной задачи о плоском течении при двухстороннем равномерном отсосе показывает, что при достаточно большом безразмерном параметре  $R_s = u_s b / \nu$  ( $u_s$  — скорость отсоса) в профиле продольной скорости выделяется однородное ядро и пристенные сдвиговые слои. Отчетливое разделение потока на ядро и слои наблюдается при  $R_s \gg 30$ . Численные расчеты [6, 7] по уравнениям Навье — Стокса, проведенные для значений  $R_s$  от 15 до 60, показывают, что в сечениях  $z = \text{const}$  распределение составляющей  $w$  поперек канала сохраняет сходство с входным профилем вплоть до полного отсоса входящей в канал жидкости.

В ходе отладки программы для решения системы (1.1) были выполнены расчеты по уравнениям (2.1) в интервале изменения  $R_s$  от 10 до 30; результаты согласуются с данными [6, 7]. Было установлено, в частности, что для однородного входного профиля уже при  $R_s = 15$  на 75% толщины потока скорость в различных точках различается не более чем на 11%. В качестве примера на фиг. 2 представлены профили составляющей  $w' = w/W_m$  в канале длиной  $l = 6b$  с заглушенным концом ( $x' = x/b$ ); цифры 1–3 соответствуют значениям  $z/l = 0,3; 0,6; 0,9$ . Число Рейнольдса  $Re = W_m b / \nu = 175$  ( $W_m$  — среднерасходная скорость на входе в канал), этому соответствует  $R_s = 175/6$ . Приведенные данные показывают, что в большей части канала поле скорости  $w$  по поперечной координате практически однородно.

3. Рассмотрим более интересный случай течения в канале с  $h/b = O(1)$ . При достаточно быстром вращении канала с непроницаемыми стенками, когда число Экмана  $Ek = v/\omega h^2 \ll 1$ , действие силы Кориолиса приводит к выделению двумерного ядра с полем скорости, однородным вдоль оси вращения, и двух относительно тонких трехмерных слоев. Экмана толщиной порядка  $\sqrt{v/\omega}$  [8]. В свою очередь двусторонний отсос через стенки  $y = \pm h$ , как и в рассмотренном выше случае плоского течения, будет способствовать однородности поля скорости вдоль оси вращения, по крайней мере для входного профиля, равномерного в этом направлении.

В общем случае задание величины  $F$  наталкивается на серьезные трудности в определении того вклада, который обусловлен перетеканием массы в слоях Экмана. Поэтому в настоящей работе ограничимся случаем сильного отсоса, когда этим вкладом можно пренебречь и задать величину  $F$  формулой

$$F = (v_2 - v_1)/2h \quad (3.1)$$

где  $v_1, v_2$  — скорости отсоса на стенках  $y = \pm h$ .

Воспользовавшись результатами анализа развитого течения вдоль пластины с равномерным отсосом во вращающейся системе отсчета [9], можно заключить, что перетекание массы в слоях Экмана будет пренебрежимо мало при условии  $Re_s \gg Re/Ek$ .

В рассматриваемой задаче граничными условиями к уравнениям (1.1) могут служить условия равенства нулю компоненты  $w$  на стенках  $x = \pm b$  и, в наиболее общем случае, задание скорости отсоса для составляющей  $u$ ; при этом в исходной постановке отсос на стенках  $x = \pm b$  должен быть равномерным по координате  $y$ . Задача доопределяется формулировкой условий на входе и выходе из канала (или на заглушенном торце).

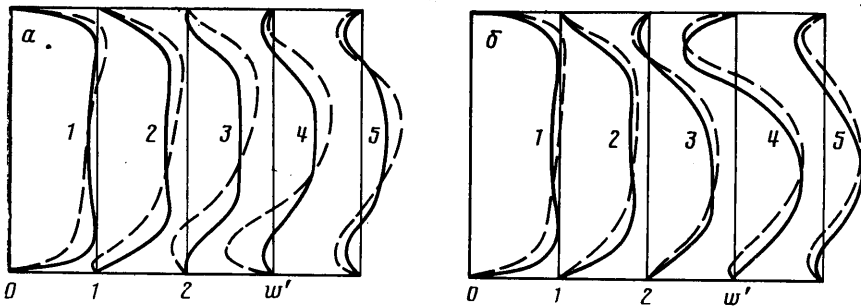
Предлагаемая методика иллюстрируется расчетами течения в заглушенном канале квадратного сечения длиной  $l = 6b$ . Число  $Re$  изменялось от 100 до 175, а безразмерный параметр  $K = \omega b/W_m$ , характеризующий интенсивность вращения, — от 0 до 0,1. Боковые стенки  $x = \pm b$  полагались непроницаемыми, а на стенках  $y = \pm h$  задавался равномерно распределенный двусторонний отсос:  $v_1 = |v_2| = W_m/6$ . Выбранные параметры задачи отвечают случаю сильного отсоса ( $100/6 \leq Re_s \leq 175/6$ ); что позволяет положить, согласно (3.1),  $F = -W_m/6h$ . В качестве граничных условий задавались некоторое распределение скорости жидкости на входе в канал и условие обращения в ноль скорости на ограничивающих боковых и торцевой стенках.

На фиг. 3, а приведены профили составляющей скорости  $w' = w/W_m$  в невращающемся канале для  $Re = 175$  и  $z/l = 1/9; 1/3; 5/9; 7/9; 8/9$  (кривые 1–5). Сплошные линии соответствуют варианту с однородным распределением скорости на входе:  $z=0, u=0, w=W_m$ , а штриховые — течению при линейном входном профиле:  $z=0, u=0,$

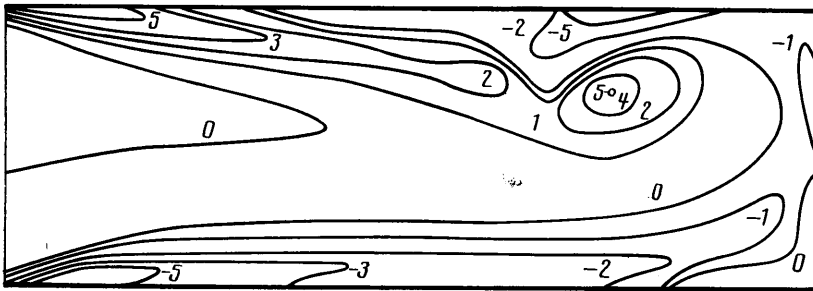
$$w = W_m(1 + 0,2x/h).$$

Расчет указывает на образование двух зон обратного течения по мере продвижения жидкости к заглушенному торцу, при этом во втором варианте отрыв сначала развивается на стороне с меньшей входной скоростью.

На фиг. 3, б приведены профили  $w'$  во вращающемся канале; расчет проведен для того же числа Рейнольдса при  $K = 0,1$ . Здесь по-прежнему сплошные линии соответствуют однородному распределению скорости на входе в канал, а цифры 1–5 — указанным выше значениям  $z/l$ . В другой интерпретации этот вариант можно характеризовать как течение с относительной завихренностью  $\zeta$ , близкой к нулю во входной области, следовательно, с абсолютной завихренностью  $\Omega \approx 2\omega$  в той же области. Штри-



Фиг. 3



Фиг. 4

ховые линии получены при условии, что на входе в канал

$$w = W_m(1 + 2Kx/h), \quad K = 0,1 \quad (3.2)$$

Для данного случая во входной области близка к нулю абсолютная завихренность:  $\Omega = \xi + 2\omega \approx 0$ . Изменения в картине течения, вызванные вращением, весьма значительны. В первую очередь обращает на себя внимание резкое сокращение отрывной области у стенки  $x = -b$  и, напротив, сильное увеличение размеров области отрыва у противоположной стенки  $x = +b$ , при этом уровень скоростей в увеличенной отрывной области также существенно возрастает. Максимальная по сечению скорость прямого течения почти вдоль всего канала изменяется слабо, несмотря на то, что темп падения среднерасходной скорости одинаков для всех  $z$ .

На фиг. 4 для тех же чисел  $Re$ ,  $K$  приведены линии постоянного значения безразмерной относительной завихренности  $\xi' = h(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x) / W_m$  во вращающемся канале при однородном входном профиле  $w$ . Эти линии наглядно демонстрируют образование «концевого вихря», смещенного к стенке  $x = +b$ ; в конечном вихре направление вращения частиц жидкости совпадает с направлением вращения канала. Формирование этой специфической для вращающегося канала области с сильно завихренным относительным движением обусловлено растяжением вихревых трубок посредством наложенного отсоса.

Аналогичные расчеты были проведены для входного профиля  $w$ , задаваемого формулой (3.2). Локальный максимум завихренности в конечном вихре уменьшился приблизительно в 1,5 раза относительно значения, указанного на фиг. 4. Уменьшение интенсивности концевого вихря не является неожиданным. Хорошо известно, что в каждой точке потока скорость роста завихренности, связанная с растяжением вихревых трубок, пропорциональна местному значению абсолютной завихренности. Следовательно, задание  $\Omega \approx 0$  на входе в канал «выключает» рассматриваемый источник завихренности для весьма протяженной центральной области потока. По мере накопления завихренности (за счет вязкого тор-

можения жидкости у стенок) роль растяжения возрастает, что опять-таки приводит к формированию концевой вихря, но с меньшей интенсивностью.

Отметим в заключение, что все приведенные выше результаты получены на расчетной сетке с  $22 \times 62$  узлами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат. 1975. 304 с.
2. Колешко С. Б. Разностная схема для решения уравнений стационарных течений вязкой жидкости // Численные методы механики сплошной среды. 1979. Т. 10. № 3. С. 100–104.
3. Егоров Ю. Э., Колешко С. Б. Применение метода дробных шагов для численного решения уравнений несжимаемой вязкой жидкости в естественных переменных // Газодинамика и теплообмен. Л., 1984. Вып. 8. Динамика неоднородных и сжимаемых сред. С. 80–92.
4. Бэтчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973. 758 с.
5. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука. 1984. 274 с.
6. Raithby G. D., Knudsen D. C. Hydrodynamic development in a duct with suction and blowing // J. Appl. Mech. 1974. V. 41. № 4. P. 896–902.
7. Chow L. C., Campo A., Tien C. L. Heat transfer characteristics for laminar flow between parallel plates with suction // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1980. V. 23. № 5. P. 740–743.
8. Смирнов Е. М., Юркин С. В. О течении жидкости по вращающемуся каналу квадратного поперечного сечения // Изв. АН СССР. МЖТ. 1983. № 6. С. 24–30.
9. Gupta A. S. Ekman layer on a porous plate // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 5. P. 930–931.

Ленинград

Поступила в редакцию  
1.VII.1987