

УДК 532.516.013.4

## ТЕЧЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

СИСОЕВ Г. М., ШКАДОВ В. Я.

Осесимметричные течения свободных пленок встречаются во многих технологических процессах [1], связанных с распыливанием жидкостей. В данной работе рассматривается течение, которое реализуется с помощью распылительного устройства, состоящего из двух соосных, вращающихся с равными угловыми скоростями дисков, образующих кольцевой зазор, и которое обладает поперечной симметрией.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость подается с постоянным расходом  $Q$  вблизи центра зазора и под действием центробежной силы выбрасывается в окружающую среду. Движение жидкости в образующейся пленке описывается системой уравнений Навье — Стокса, движение окружающего газа, который предполагается несжимаемым, — системой уравнений Эйлера; на нижней и верхней границах пленки выполняются кинематические условия для жидкости и газа, условия непрерывности нормальных напряжений с учетом сил поверхностного натяжения, условия отсутствия касательных напряжений для жидкости; предполагается, что вдали от пленки газ покоится [2].

Для описания движения жидкости и газа используется цилиндрическая система координат  $r, \theta, z$ , связанная с осью вращения зазора, причем его середине соответствует значение  $z=0$ . Давление в жидкости или газе  $p_i$  и компоненты скорости  $u_r, u_\theta, u_z$  представляются в виде

$$p_i = \rho \Omega^2 H_c^2 r, \quad u_r = \Omega r u, \quad u_\theta = \Omega r v, \quad u_z = \Omega H_c w$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $\Omega, H_c$  — угловая скорость вращения и толщина зазора. В качестве независимых переменных используются величины  $x = \ln(r/R), \theta, y = z/H_c, s = \Omega t$ , где  $t$  — время,  $R$  — радиус зазора.

Для пленки относительно небольшой толщины задача об определении ее стационарного течения может быть отделена от рассмотрения движения газа. Аналогично течению пленки жидкости по поверхности вращающегося диска [2, 3] для свободной пленки малой толщины уравнения и граничные условия без учета членов порядка  $(H_c/r)^2$  и поверхностного натяжения в случае течения, обладающего осевой симметрией и симметрией относительно плоскости  $y=0$ , имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2u + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 - v^2 = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial y} + 2uv = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

$$y=h(x): u \frac{dh}{dx} = w, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

$$y=0: w = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

где  $h$  — поверхность пленки;  $Re = \Omega H_c^2 / \nu$ ,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. Здесь (1.1) — уравнение неразрывности; (1.2), (1.3) — уравнения движения для радиальной и азимутальной компонент скорости соответственно; (1.4) — кинематическое условие и условия отсутствия касательных напряжений на границе пленки; (1.5) — условия симметрии.

Постановка задачи о движении пленки включает также начальные условия

$$x=0: h=0,5, \quad u=U_0(y), \quad v=V_0(y) \quad (1.6)$$

где  $U_0, V_0$  — заданные функции.

Для численного решения задачи (1.1)–(1.6) применяется метод колокаций [2–4], в котором вводятся поверхности тока  $h_n(x)$ ,  $n=1, \dots, N$ , причем  $h_1=0$ ,  $h_N=h$ , и значения компонент скорости на них  $u_n(x)=u(x, h_n(x))$ ,  $v_n(x)=v(x, h_n(x))$ . Из (1.1)–(1.5) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для  $h_n$ ,  $u_n$ ,  $v_n$ , содержащая значения вторых производных компонент скорости по  $y$  на поверхностях тока. Для их вычисления используется учитывающая граничные условия (1.4), (1.5) аппроксимация компонент скорости полиномами Чебышева.

Из (1.1), (1.4), (1.5) и симметричности течения следует, что

$$q(x) = 2 \int_0^h u \, dy = \frac{Q}{2\pi r^2 \Omega H_c}$$

Результаты расчетов показывают, что независимо от вида начальных профилей компонент скорости с удалением от среза зазора течение переходит к равномерному, не зависящему от  $y$ . Ниже приведены результаты расчетов для начальных профилей вида

$$U_0 = \frac{10}{11} q(0) (30y^4 - 15y^2 + 1,975), \quad V_0 = 1 + a \left( \frac{1}{2} y^2 - y^4 - \frac{1}{16} \right) \quad (1.7)$$

$a$  — параметр. Выбор (1.7) связан с тем, что данные профили, которые являются полиномами наименьшего порядка, удовлетворяющими (1.4), (1.5), качественно соответствуют решению задачи о радиальном течении жидкости во вращающемся кольцевом зазоре [5, 6]; кроме того, для (1.7) возможно изучение параметрических зависимостей.

На фиг. 1 представлены примеры зависимости средних по толщине пленки значений радиальной и азимутальной компонент скорости  $u_m$  (линии 1, 4) и  $v_m$  (2, 5) соответственно и толщины пленки  $h$  (3, 6) на участке перехода течения к равномерному при  $Re=100$ ,  $a=15$  в случаях  $q(0)=1$  (линии 1–3) и 1,8 (4–6). Вид решения, соответствующего  $q(0)=1$ , приводится на фиг. 2, где линии 1–3 относятся к  $U_m=u/u_m$ , 4–6 — к  $V_m=v/v_m$ , причем линиям 1, 4 соответствует  $x=0$ ; 2, 5 —  $x=0,4$ ; 3, 6 —  $x=0,88$ .

Длина участка перехода течения к равномерному  $x_a$  и вид решения на нем зависят от числа  $Re$ , вида функций  $U_0, V_0$ . Для (1.7) в таблице приводятся некоторые результаты вычисления величины  $x_a$ . В качестве критерия при выборе  $x_a$  использовалось условие  $|1 - u_n/u_m| < 0,03$ ,

$q(0)=1, a=15$		$Re=100, a=15$		$Re=100, q(0)=1$	
$Re$	$x_a$	$q(0)$	$x_a$	$a$	$x_a$
100	1,0	2	1,24	0	0,88
200	1,24	4	1,48	10	0,96
400	1,4	6	1,64		

$|1 - v_n/v_m| < 0,03$ ,  $n=1, \dots, N$ , которое проверялось с интервалом  $\Delta x=0,04$ .

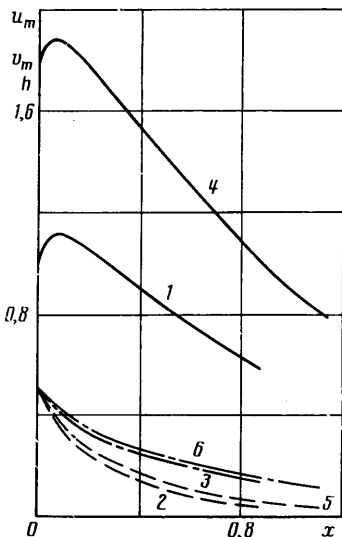
Можно отметить, что в отличие от течения пленки по поверхности вращающегося диска [3] вид начального профиля азимутальной скорости существенно влияет на значение  $x_a$ .

Задача (1.1)–(1.5) имеет точное решение в случае течения с постоянным профилем скорости

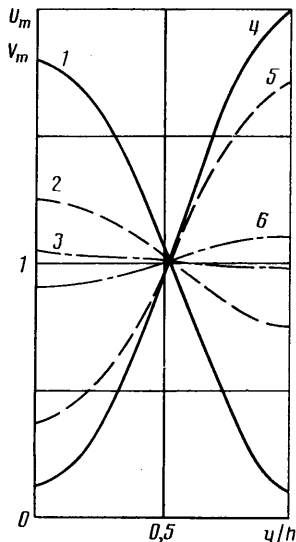
$$u = \exp(x_b - x) \sqrt{u_b^2 + v_b^2 [1 - \exp(2x_b - 2x)]} \quad (18)$$

$$v = v_b \exp(2x_b - 2x), \quad h = \frac{q}{2u}$$

где  $u_b = u(x_b)$ ,  $v_b = v(x_b)$ ; решение (1.8) справедливо при  $x \geq x_b$ . Для тече-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния с непостоянным начальным профилем скорости решение (1.8) асимптотическое при  $x \rightarrow \infty$ .

2. При исследовании невязкой устойчивости стационарного течения используется допущение локальной плоскопараллельности [2], при котором отношение характерного масштаба по координате  $x$  для возмущения к соответствующему масштабу для основного течения предполагается малой величиной.

Пусть  $U_1$ ,  $V_1$ , зависящие от  $x$ ,  $y$  и  $H_1(x)$  — решение задачи (1.1)–(1.6). Нестационарное решение для жидкости представляется в виде

$$u(x, \theta, y, s) = U_1(x_0, y) + u_1(\xi, \theta, \eta, \tau), \quad v = V_1 + v_1, \quad w = \frac{w_1}{\varepsilon_0}$$

$$p = \frac{H_0 p_1}{\varepsilon_0}, \quad h_d = -H_1 + H_0 h_1, \quad h_u = H_1 + H_0 h_2 \quad (2.1)$$

$$H_0 = 2H_1(x_0), \quad \varepsilon_0 = \frac{H_c}{r_0}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon_0 H_0}, \quad \eta = \frac{y + H_1(x_0)}{H_0}, \quad \tau = \frac{s}{\varepsilon_0 H_0}$$

где  $h_d$ ,  $h_u$  — нижняя и верхняя границы пленки. С точностью до членов порядка  $\varepsilon_0$  преобразование независимых переменных соответствует использованию толщины пленки  $H_* = H_0 H_c$  при  $r = r_0 = R \exp x_0$  в качестве характерной длины.

Вид решения для газа аналогичен (2.1) с  $U_1 = V_1 = 0$ .

После подстановки (2.1) в полную систему невязких уравнений для жидкости можно получить

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \varepsilon_* \left( 2u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + (U_1 + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + w_1 \left( U_1' + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) + \\
 & + \varepsilon_* \left[ (V_1 + v_1) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + 2U_1 u_1 + u_1^2 - 2V_1 v_1 - v_1^2 \right] = -\varepsilon_* \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \quad (2.2) \\
 & \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + (U_1 + u_1) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + w_1 \left( V_1' + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) + \\
 & + \varepsilon_* \left[ (V_1 + v_1) \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 2(U_1 v_1 + V_1 u_1 + u_1 v_1) \right] = -\varepsilon_*^2 \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \\
 & \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + (U_1 + u_1) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \varepsilon_* (V_1 + v_1) \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = -\varepsilon_* \frac{\partial p_1}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_* = H_*/r_0$ ; штрихом обозначено дифференцирование по переменной  $\eta$ , зависимость от  $x_0$  имеет параметрический вид.

Систему уравнений для возмущений в газе можно получить из (2.2), положив  $U_1 = V_1 = 0$  и заменив  $p_1$  на  $(p_g)_1/\lambda$ , где  $(p_g)_1$  — возмущение давления в газе,  $\lambda = \rho_g/\rho$ ,  $\rho_g$  — плотность газа.

Граничные условия при  $\eta = j-1 + h_j$ ,  $j=1, 2$ , имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial h_j}{\partial \tau} + (U_1 + u_1) \frac{\partial h_j}{\partial \xi} + \varepsilon_* (V_1 + v_1) \frac{\partial h_j}{\partial \theta} = w_1 \\
 & \frac{\partial h_j}{\partial \tau} + (u_g)_1 \frac{\partial h_j}{\partial \xi} + \varepsilon_* (v_g)_1 \frac{\partial h_j}{\partial \theta} = (w_g)_1 \\
 & p_1 - (p_g)_1 + \frac{(-1)^j A_0}{\varepsilon_*^2 b^3} \left\{ \frac{\partial^2 h_j}{\partial \xi^2} + \varepsilon_* \left( \frac{\partial h_j}{\partial \xi} \right)^3 + \varepsilon_*^2 \left[ \left( \frac{\partial h_j}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 h_j}{\partial \xi^2} + \right. \right. \\
 & + \left. \left( 1 + \left( \frac{\partial h_j}{\partial \xi} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 h_j}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial h_j}{\partial \xi} \frac{\partial h_j}{\partial \theta} \frac{\partial^2 h_j}{\partial \xi \partial \theta} \right] + \varepsilon_*^3 \left( \frac{\partial h_j}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial h_j}{\partial \xi} \right\} = 0 \\
 & A_0 = \frac{\sigma}{\rho \Omega^2 r_0^3}, \quad b^2 = 1 + \left( \frac{\partial h_j}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon_*^2 \left( \frac{\partial h_j}{\partial \theta} \right)^2
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $(u_g)_1$ ,  $(v_g)_1$ ,  $(w_g)_1$  — возмущения компонент скорости в газе.

Возмущения в газе затухают вдали от поверхности пленки, т. е. при  $\eta \rightarrow \pm \infty$   $(u_g)_1 \rightarrow 0$ ,  $(v_g)_1 \rightarrow 0$ .

Для исследования устойчивости задача, включающая (2.2), уравнения для возмущения в газе, (2.3) и условия вдали от поверхности пленки, линеаризуется и рассматриваются решения вида  $f(\eta) \exp i(\alpha \xi + k\theta - \omega \tau)$ ,  $\alpha$ ,  $k$  — действительные волновые числа,  $\omega$  — комплексное собственное значение задачи. После некоторых преобразований можно получить

$$\begin{aligned}
 & \left( B - \frac{\varepsilon_* b_1 d}{b_3} \right) w'' + \varepsilon_* \left[ \frac{\beta V_1'}{E} - \frac{d}{b_3} \left( b_1' + b_2 - \frac{b_1 b_3'}{b_3} \right) - \frac{b_1 d'}{b_3} \right] w' - \\
 & - \left[ U_1'' + \alpha^2 D + \frac{\varepsilon_* d}{b_3} \left( b_2' - \frac{b_2 b_3'}{b_3} \right) - \frac{\varepsilon_* b_2 d'}{b_3} \right] w = 0 \\
 & \eta = j-1, \quad j=1, 2: \quad \left( B - \frac{\varepsilon_* b_1 d}{b_3} \right) w' + \frac{(-1)^j}{D} \left[ \frac{\lambda d c^2}{b_4} - \frac{\alpha^2 A_0 (1 + \varepsilon_*^2 \beta^2)}{\varepsilon_*} \right] w = 0 \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$E=1-\frac{2i\varepsilon_*}{\alpha}, \quad D=U_1+\varepsilon_*\beta V_1-c, \quad B=U_1+\frac{\varepsilon_*\beta V_1-c}{E}, \quad d=2V_1+ikB$$

$$b_1=\frac{2i\varepsilon_*V_1}{\alpha E}+\beta\varepsilon_*B, \quad b_2=V_1'-\beta\varepsilon_*U_1', \quad b_3=i\alpha Eb+\beta\varepsilon_*^2\left(d-\frac{2V_1}{E}\right)$$

$$b_4=E+(\varepsilon_*\beta)^2, \quad \beta=\frac{k}{\alpha}, \quad c=\frac{\omega}{\alpha}, \quad \delta=\alpha\sqrt{b_4}$$

причем  $\delta_r > 0$  (здесь и далее индекс  $r$  обозначает действительную часть соответствующей величины,  $i$  — мнимую); в (2.4) у функции  $w_1$  опущен индекс.

Из симметрии основного течения следует, что задача (2.4) имеет симметричные и антисимметричные решения относительно  $\eta=0,5$ . Симметричным решениям соответствуют возмущения, для которых амплитуды волн на нижней и верхней границах пленки равны и, следовательно, ее середина при возмущенном движении колеблется вблизи  $\eta=0,5$ . Антисимметричным решениям соответствуют движущиеся в противофазе поверхностные волны и неподвижная середина пленки. Для численного решения (2.4) можно понизить порядок задачи с помощью замены  $g=w'/w$  для симметричных решений или  $g=w/w'$  — для антисимметричных; полученная задача решается методом дифференциальной прогонки.

Собственные значения вычисляются параметрическим продолжением величин, полученных в [7, 8] для плоскопараллельного течения пленки с постоянным профилем скорости. Аналогичное [7, 8] решение имеет вид

$$U_1 = \text{const}, \quad V_1 = 0, \quad k = 0, \quad \varepsilon_* = 0, \quad \frac{\varepsilon_*}{A_0} \equiv \text{We} = \frac{\rho U_p^2 H_*}{\sigma}, \quad U_p = \Omega r_0$$

$$a_1 = \text{cth} \frac{\alpha}{2}, \quad a_2 = \text{th} \frac{\alpha}{2}$$
(2.5)

$$c_{j+2(n-1)} = \frac{U_1}{1+\lambda a_n} \left\{ 1 - (-1)^j \sqrt{a_n \left[ \frac{\alpha}{\text{We} U_1^2} (1+\lambda a_n) - \lambda \right]} \right\}, \quad n, j = 1, 2$$

причем значениям  $c_1, c_2$  соответствуют симметричные собственные функции  $w$ ,  $c_3, c_4$  — антисимметричные. В [8] показано, что в экспериментах реализуются соответствующие  $c_1$  волны, обладающие наибольшим коэффициентом усиления. Далее рассматриваются симметричные решения.

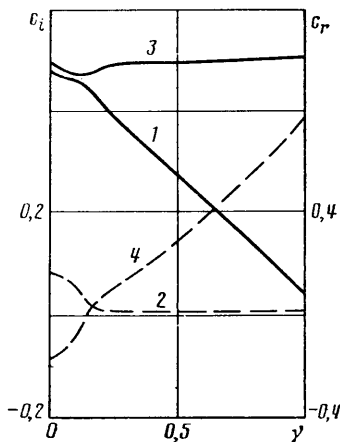
В отличие от [7, 8] в постановку задачи (2.4) входит мнимая единица  $i$ , поэтому функция, сопряженная решению, не является решением; вследствие этого необходимо рассматривать решения двух видов. Результаты расчетов показывают, что наряду с механизмом неустойчивости Гельмгольца [2], связанным с разностью скоростей потоков в жидкости и газе и рассмотренным в [7, 8] применительно к плоскопараллельным течениям свободных пленок, для осесимметричных течений существует другой механизм неустойчивости, обусловленный неоднородностью профиля скорости основного течения.

Рассмотренные ниже примеры относятся к пленке воды в воздухе при  $H_* = 0,002$  м,  $r_0 = 0,1$  м,  $\Omega = 25$  рад/с. В случае равномерного профиля скорости  $U_1 = 1$ ,  $V_1 = 0$  при  $\alpha = 0,1$ ,  $k = 0$  соответствующие (2.5) величины равняются  $c_1 = 0,9614 + 0,08219i$ ,  $c_2 = 1,001 - 0,08920i$ .

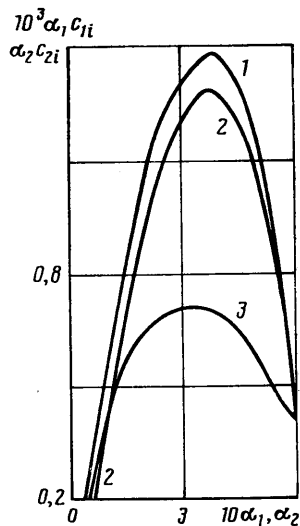
Изменением начальных условий в (1.6) можно получать различные решения задачи о стационарном течении пленки. В данной работе рассматривается устойчивость течений с некоторыми заданными профилями скорости. На фиг. 3 показаны зависимости собственных значений от параметра неоднородности  $\gamma$  для профиля скорости  $U_1 = 1 + \gamma(U_0 - 1)$ ,  $V_1 = \gamma V_0$ , где  $U_0, V_0$  — функции из (1.7) и  $g(0) = 1$ ,  $a = 15$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $k = 0$ , причем линии 1, 2 соответствуют  $c_1, 3, 4 - c_2, 1, 3 -$  действительные части собст-

венных значений, 2, 4 — мнимые. Из фиг. 3 видно, что с увеличением неоднородности основного течения коэффициент усиления неустойчивого возмущения с  $c_1$ , соответствующего решению [7, 8], уменьшается и его скорость имеет порядок скорости жидкости на поверхности пленки; возмущение с  $c_2$  из устойчивого становится неустойчивым с большим, чем у  $c_1$ , коэффициентом усиления, его скорость близка к средней скорости основного течения.

На фиг. 4 для рассмотренного выше профиля скорости с  $\gamma=1$  показаны коэффициенты усиления при  $k=0$  (линии 1, 3) и 20 (2), причем линии 1, 2 соответствуют решениям  $c_2(\alpha=\alpha_2)$ , 3 —  $c_1(\alpha=\alpha_1)$ . Можно отметить,



Фиг. 3



Фиг. 4

что наиболее неустойчиво осесимметричное возмущение, соответствующее  $c_2$ . Примеры функций  $g$  представлены на фиг. 5 при  $\alpha=0,1$ ,  $k=0$ , где линии 1, 2 соответствуют  $c_1=0,08688+0,004193i$ , 3, 4 —  $c_2=1,121+0,3841i$ , причем 1, 3 —  $g_r$ , 2, 4 —  $g_i$ ; можно отметить, что интервал наиболее значительного изменения функции  $g$ , соответствующей  $c_1$ , локализован вблизи поверхности пленки.

Новый механизм неустойчивости, обнаруженный в данной работе, существует и при движении осесимметричной пленки в вакууме, в котором плоскопараллельное течение, рассмотренное в [7, 8], устойчиво. Проведенные расчеты показывают, что и для осесимметричных течений возмущения с  $c_1$  в вакууме являются затухающими, но для течения с неоднородным профилем скорости существуют неустойчивые возмущения с  $c_2$ . Ниже даются примеры собственных значений для рассмотренного выше течения пленки воды при  $\lambda=0$ ,  $k=10$ , причем первое собственное значение соответствует  $V_1=V_0$ , второе —  $V_1=0$ :

$\alpha$	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
$c_r$	1,237	1,115	1,074	1,052	1,026	1,007	0,984
$c_i$	0,3856	0,4753	0,4880	0,4767	0,4186	0,3305	0,2173
$c_r$	1,023	1,010	1,004	1,000	0,991	0,980	0,962
$c_i$	0,5411	0,5484	0,5345	0,5098	0,4377	0,3419	0,2236

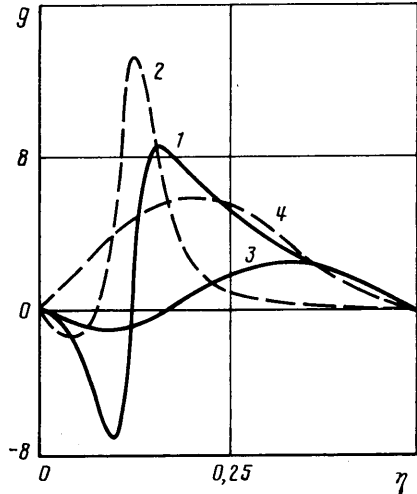
Из приведенных данных следует, что наличие закрученности основного течения оказывает стабилизирующее влияние. Надо отметить, что в экспериментах [9], в которых рассматривалось движение свободных плоскопараллельных и конических пленок в вакууме, волнообразование не наблюдалось, однако приводимые данные не позволяют определить

количественные характеристики течений, в частности размер участка неоднородности.

На основании полученных результатов линейной теории можно оценить длину участка разбиения пленки и проверить справедливость предположения о локальной плоскопараллельности. Например, для рассмотренного выше течения в вакууме с  $V_1=V_0$  наиболее неустойчиво осесимметричное возмущение с  $\alpha=3,8$ ,  $\alpha c_i=1,38$ ,  $c_r=0,98$ , для которого за промежуток времени  $\Delta\tau=2,55$  граница пленки с начальной амплитудой  $h_1=0,005 \exp$  пересечет плоскость симметрии невозмущенной пленки, что можно принять в качестве критерия разбиения; при этом длина участка разбиения, равная пути, пройденному возмущением за  $\Delta\tau$ , составляет  $\Delta x=0,05$ ; эта величина мала по сравнению с характерным масштабом основного течения при  $Re=100$ , равным  $x_a=1$ .

Расчеты показывают, что с увеличением  $A_0$  течение становится более устойчивым, т. е. поверхностное натяжение оказывает стабилизирующее влияние. Можно отметить слабую зависимость с от параметра  $k$ ; в проведенных расчетах наиболее неустойчивые осесимметричные возмущения.

Таким образом, приведенные результаты позволяют дать качественный анализ волнообразования для осесимметричных течений свободных пленок. После истечения жидкости из зазора наиболее неустойчивы возмущения с длиной волны порядка толщины пленки, связанные с неоднородностью основного течения. При течении пленки в газе с увеличением радиуса происходит выравнивание профиля скорости основного течения, увеличение относительной длины волн по сравнению с локальной толщиной пленки; при течении в вакууме переход к равномерному профилю скорости основного течения сопровождается исчезновением волн на поверхности пленки.



Фиг. 5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977. 207 с.
2. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1973. 192 с.
3. Сисоев Г. М., Тальдрик А. Ф., Шкадов В. Я. Течение пленки вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 51. № 4. С. 571–575.
4. Gottlieb D., Orszag S. A. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Philadelphia, 1977. 172 с.
5. Савьков П. И., Смирнов Е. М. Асимптотическое решение уравнений Навье – Стокса для задачи о радиальном течении жидкости в зазоре, образованном двумя вращающимися дисками // ПМТФ. 1983. № 1. С. 10–15.
6. Szeri A. Z., Schneider S. J., Labbe F., Kaufman H. N. Flow between rotating disk. Pt 1. Basic flow // J. Fluid Mech. 1983. V. 134. P. 103–131.
7. Squire H. B. Investigation of the instability of a moving liquid film // Brit. J. Appl. Phys. 1953. V. 4. № 6. P. 161–169.
8. Hagerty W. W., Shea J. F. A study of the stability of plane fluid sheets // J. Appl. Mechanics. 1955. V. 22. № 4. P. 509–514.
9. Dombrowski N., Hooper P. C. The effect of ambient density on drop formation in sprays // Chem. Engng Sci. 1962. V. 17. № 4. P. 291–305.

Москва

Поступила в редакцию  
7.VII.1987