3. *Tsujino T., Shima A.* The Behavior of Gas Bubbles in Blood Subjected to an Oscillating Pressure // J. Biomech. 1980. V. 13. № 5. P. 407—416.
4. *Кисляков Ю. А.* Динамика роста газовых пузырей в биологических тканях при декомпрессии (математическое моделирование) // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 4. С. 1012—1015.
5. *Агеев А. Н., Андрианкин Э. И.* Двойной взрыв в воде при малых плотностях энергии // Горение и взрыв в космосе и на земле. М., 1980. С. 109—124.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Изд. 3-е. М.: Наука, 1976. Т. 2. С. 225—239.
7. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники/ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1976. № 10. С. 86—147.

Москва

Поступила в редакцию 28.IX.1987

УДК 532.546

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

ЧЕРНОМАШЕНЦЕВ Г. М.

Построено точное решение задачи Коши для уравнения, описывающего пространственную молекулярную диффузию газа. Полученный результат является естественным обобщением решения аналогичной задачи Буссинеска.

Изотермический процесс фильтрации политропного газа с показателем политропы $n=1$ описывается квазилинейным дифференциальным уравнением [1, 2], которое после нормировки времени принимает вид

$$\frac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho^2}{\partial z^2}=\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1}$$

Здесь p – абсолютное давление, связанное линейно с плотностью ρ уравнением состояния $\rho=cp$, $c=\mathrm{const}$; x, y, z – пространственные координаты, t – время.

Рассмотрим задачу об эволюции распределения газа в пористой среде, локализованного в начальный момент времени в эллиптической области.

Будем искать решение задачи в виде

$$\rho=\alpha(t)-\beta(t)x^2-\gamma(t)y^2-\delta(t)z^2 \tag{2}$$

Она сводится к интегрированию системы уравнений

$$\begin{gathered}\alpha'=-4\alpha(\beta+\gamma+\delta),\ \beta'=-4\beta(3\beta+\gamma+\delta)\\ \gamma'=-4\gamma(3\gamma+\delta+\beta),\ \delta'=-4\delta(3\delta+\beta+\gamma)\end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим $\beta+\gamma+\delta+\Delta$. Тогда система (3) переписывается в кононической форме

$$\frac{-\alpha'}{\alpha}=\frac{-\beta'-8\beta^2}{\beta}-\frac{-\gamma'-8\gamma^2}{\gamma}=\frac{-\delta'-8\delta^2}{\delta}=4\Delta=\Delta^*$$

Ее интеграл имеет вид

$$\alpha=C_0\exp\left\{-\int_0^t\Delta^*(t)\,dt\right\},\quad C_0>0$$

Аналогично выписываются и другие первые интегралы

$$\begin{gathered}\beta=\frac{\alpha^*(t)}{C_1+\varkappa(t)},\quad \gamma=\frac{\alpha^*(t)}{C_2+\varkappa(t)},\quad \delta=\frac{\alpha^*(t)}{C_3+\varkappa(t)}\\ \alpha^*(t)=C_0^{-1}\exp\left\{-\int_0^t\Delta^*(t)\,dt\right\}=C_0^{-1}\alpha,\quad \varkappa(t)=8\int_0^t\alpha^*(t)\,dt\end{gathered} \tag{4}$$

Воспользуемся условием постоянства массы газа при условии нормировки его количества

$$\iiint\limits_{(V)} \rho\, dv = A, \quad A = \frac{2}{15}\pi C_0^{5/2} \tag{5}$$

где V – произвольная, расширяющаяся во времени эллиптическая область, фильтрация газа в которой подчиняется (1).

Выполнив интегрирование в (5) с учетом (4), после перехода в двойном интеграле к обобщенным полярным координатам получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = [(C_1+\Phi)(C_2+\Phi)(C_3+\Phi)]^{-1/2} \quad \Phi(t) = 8\int\limits_0^t \alpha^*(t)\,dt \tag{6}$$

где $\Phi(t)$ – монотонно возрастающая функция.

Считая для определенности $C_3 \geqslant C_2 \geqslant C_1 > 0$, из уравнения (6) находим

$$t = 2\int\limits_{\sqrt{C_1}}^{\sqrt{C_1+\Phi}} \frac{z^2(z^2+a^2)(z^2+b^2)}{\sqrt{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}}\,dz$$

$$C_2 - C_1 = a^2, \; C_3 - C_1 = b^2$$

Воспользовавшись рекуррентной формулой [3] и соотношением

$$[z^{2n-3}\sqrt{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,]' = [(2n-1)z^{2n} + (2n-2)(a^2+b^2)z^{2n-2} + (2n-3)a^2b^2z^{2n-4}]\cdot[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]^{-1/2}$$

можно получить

$$\frac{t}{2} = \left\{\frac{z^3}{5}\sqrt{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} + \frac{a^2+b^2}{15}\, z\sqrt{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} + \left[-\frac{2}{15}(a^2+b^2)^2 + \frac{2}{5}a^2b^2\right]\int z^2G(z)\,dz - \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{15}\int G(z)\,dz\right\}\Bigg|_{\sqrt{C_1}}^{\sqrt{C_1+\Phi}}$$

$$G(z) = [(z^2+a^2)(z^2+b^2)]^{-1/2}$$

Так как имеют место равенства [4]

$$\int\limits_0^x G(x)\,dx = \frac{1}{b}\,\mathrm{th}^{-1}\left\{\frac{x}{a}, k\right\} = \frac{1}{b}F(\varphi, k)$$

$$\int\limits_0^x x^2G(x)\,dx = \frac{x\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} - bE(\varphi, k)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \qquad k = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$

где $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ – эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, окончательно будем иметь

$$\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{(C_1+\Phi)(C_2+\Phi)(C_3+\Phi)}}{15}[3(C_1+\Phi)+a^2+b^2] - \frac{\sqrt{C_1C_2C_3}}{15}(3C_1+a^2+b^2) + \left[-\frac{2}{15}(a^2+b^2)^2 + \frac{2}{5}a^2b^2\right]\left[\sqrt{\frac{(C_1+\Phi)(C_3+\Phi)}{C_2+\Phi}} - \sqrt{\frac{C_1C_3}{C_2}} + bE\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C_1}}{a}, k\right) - bE\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C_1+\Phi}}{a}, k\right)\right] - \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{15b}\left[F\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C_1+\Phi}}{a}, k\right) - F\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C_1}}{a}, k\right)\right] \tag{7}$$

Найденное параметрическое решение обращается в нуль на границе области фильтрации в любой момент времени: $\rho=0(p=0)$. Если продолжить его за пределы эллипсоида нулем, то $\rho(x, y, z, t)$ становится непрерывной функцией в пространстве независимых переменных.

В силу того что на фронте фильтрационного потока плотность ρ обращается в нуль, а ее производная по внутренней нормали к границе в силу (2) конечна, на фронте автоматически выполняется условие непрерывности фильтрационного потока.

При вычислении по формуле (7) естественно сначала выбрать произвольную возрастающую последовательность $\{\Phi_n\}$ и найти ей соответствующую последовательность времен $\{t_n\}$. По значению Φ_n $(n=1, 2,\ldots)$ на основании (6) определяется $\alpha^*(t_n)$, что позволяет точно вычислить плотность газа в любой момент времени t_n и в любой точке по формуле (2). Если интересоваться только положением границы области фильтрации, то величины полуосей эллипсоида на момент времени t_n вычисляются по формулам

$$h_1=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{C_0(C_1+\Phi_n)},\quad h_2=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=\sqrt{C_0(C_2+\Phi_n)},\quad h_3=\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}=\sqrt{C_0(C_3+\Phi_n)}$$

При $t_n\to\infty$ имеем $\Phi_n\to\infty$ и значит $h_1/h_2\to1$, $h_1/h_3\to1$. Это свидетельствует о наличии асимптотической автомодельности в рассматриваемой задаче.

Если в начальной форме (в виде эллипсоида) сосредотачиваются разные количества газа m_1 и m_2, а t_1 и t_2 те промежутки времени, за которые осуществляется их переход в произвольное новое положение, то имеем $m_1/m_2=t_2/t_1$.

Произведение mt оказывается инвариантом процесса фильтрации.

Описанный здесь подход осуществим и при решении известного двумерного уравнения Буссинеска [5].

Рассмотрим частные решения, следующие из (3). Если $C_2=C_3$, $C_1<C_2$ $(\gamma=\delta)$, то система (3) редуцирует в

$$\alpha'=-4\alpha(\beta+2\gamma),\ \beta'=-4\beta(3\beta+2\gamma),\ \gamma'=-4\gamma(\beta+4\gamma)$$

что соответствует начальной форме объема газа в виде эллипсоида вращения. Тогда уравнение (6) интегрируется в степенных функциях

$$\frac{d\Phi}{dt}=(C_3+\Phi)^{-1}(C_1+\Phi)^{-1/2}$$

$$\tfrac{1}{2}t=\tfrac{1}{3}(C_3-C_1)[(C_1+\Phi)^{3/2}-C_1^{3/2}]+\tfrac{1}{5}[(C_1+\Phi)^{5/2}-C_1^{5/2}]$$

(далее надо положить $\Delta=\beta+2\gamma$).

В простейшем случае $\beta=\gamma=\delta$ $(C_1=C_2=C_3)$ получаем

$$\alpha'=-12\alpha\beta,\ \beta'=-20\beta^2$$

откуда находим решение

$$\beta=\gamma=\delta=(20t+C_1)^{-1},\ \alpha=C_0C_1^{3/5}(20t+C_1)^{-3/5}$$

Результаты вычисления [6] по формуле (7) представлены ниже $(C_0=C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=5)$:

n	1	2	3	4	5
Φ_n	0	1	2	3	8
t_n	0	4,6	12,2	23,3	138,2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Собр. тр. Т. 2. Подземная гидрогазодинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 544 с.
2. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. 1. Киев: Наук. думка, 1976. 452 с.
3. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983. 172 с.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1966. 800 с.
6. *Черномашенцев Г. М.* О растекании бугра жидкости параболоидной формы по горизонтальному основанию // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 187—189.
7. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. М.: Физматгиз, 1959. 420 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
30.IX.1986