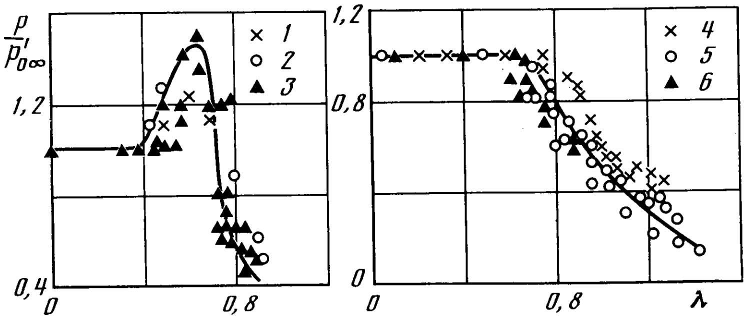
При достаточно больших λ отход и характерный размер R внешней ударной волны перестают зависеть от размеров D и D_c и определяются лишь суммарным импульсом струй, так как из закона сохранения импульса будет следовать $p_{0\infty}'R^2\sim$ $\sim J_a m d_a^2$ или $R\sim J^{0,5}d_*$, где $d_*=\sqrt{m}d_a$, m – число сопел.

Этот предельный случай режима IV можно выделить в отдельный режим V – режим «эквивалентной струи» [3]. В этом случае отход головных внешних ударных волн и течения в их окрестности одинаковы для многосопловой и односопловой моделей при совпадении величин R (формально – при $R\gg D$). Пример такого течения



Фиг. 6

показан на фиг. 1, *д* ($M_\infty=5{,}35$, $M_a=3$, $\lambda=1{,}97$). Точками показана форма ударных волн для эквивалентной одиночной струи. Для рассмотренной компоновки модели этот режим достигается уже при $\lambda\gtrsim1{,}5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губанова О. И., Лунев В. В.* Исследование взаимодействия блока струй с дозвуковым и сверхзвуковым встречным потоком // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1981. М.: Наука, 1983. С. 157.
2. *Губанова О. И., Лунев В. В., Пластинина Л. И.* О центральной срывной зоне при взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи на преграду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 135—138.
3. *Авдуевский В. С., Иванов А. В., Карпман И. М. и др.* Исследование закономерностей развития течения в системе вязких недорасширенных сверхзвуковых струй // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 5. С. 1004—1007.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1987

УДК 532.529.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ УДАРНО-ВОЛНОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СФЕРИЧЕСКИЙ ПУЗЫРЕК В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

АНДРИАНКИН Э. И., РЯЗАНОВ А. И.

Приводится теоретический анализ возможности управления осцилляциями сферического газового пузырька в идеальной несжимаемой жидкости. Действие сил поверхностного натяжения жидкости не учитывается. Рассмотрен процесс оптимизации колебаний, реализующий максимум амплитуды радиуса и максимум давления газа в пузырьке, при заданном импульсном изменении давления на бесконечности. Построена процедура ударно-резонансной раскачки пузырька, задающая ступенькообразные по времени изменения давления в точках экстремума радиуса. Такая задача представляет интерес при исследовании кавитационной эрозии [1], процессов в биологических тканях [2–4].

Пусть в безграничном объеме невязкой несжимаемой жидкости задан одиночный сферически-симметричный газовый пузырек. Рассмотрим его осцилляции под воздействием давления на бесконечности $p(\tau)$, тогда уравнение движения пузырька и начальные условия имеют следующий безразмерный вид:

$$\ddot{\beta}\beta+{}^3/_2\dot{\beta}^2-\beta^{-4}+1+p(\tau)=0$$

$$\beta=1,\ \dot{\beta}=0,\ \tau=0;\ p(\tau)=p_k{}^i,\ \tau_k{}^i<\tau\leqslant\tau_{k+1}{}^i;\ 0,\ \tau_{k+1}{}^i<\tau\leqslant\tau_{k+2}{}^i \tag{1}$$

$$k=0,\ i=1;\ k=0{,}2,\ i=2;\ \tau_0{}^i=0;\ p_k{}^i>0$$

где β, τ, $p(\tau)$ – безразмерные величины радиуса пузырька, времени, амплитуды давления на бесконечности [6].

Газ в пузырьке адиабатический, показатель адиабаты $\gamma={}^4/_3$, что допускает аналитическое построение решения. Будем говорить, что при $k=0$, $i=1$ имеем одиночное воздействие $p(\tau)$ на пузырек (одиночный удар), при $k=0{,}2$, $i=2$ – двойное воздействие (двойной удар).

Для решения задачи оптимизации колебаний газового пузырька определим режим осцилляций, обеспечивающий абсолютный максимум амплитуды радиуса $B(i)$ для одиночного и двойного ударно-волновых воздействий в классе одинаковых импульсов, передаваемых жидкости

$$\int p(\tau)\,d\tau=\text{const}$$

где интегрирование идет по всем допустимым интервалам времени τ. Как будет показано ниже, оптимальный режим колебаний гарантирует также достижение абсолютного максимума давления газа внутри пузырька.

Основное уравнение движения (1) допускает понижение порядка; имеем эквивалентное (1) уравнение колебаний газового пузырька, нелинейное, первого порядка относительно функции $\beta(\tau)$

$$\dot{\beta}^2=-\eta_k{}^i\beta^{-3}-2\beta^{-4}-{}^2/_3(1+p_k{}^i),\ \tau_k{}^i<\tau\leqslant\tau_{k+1}{}^i \tag{2}$$

$$\dot{\beta}^2=-\eta_{k+1}{}^i\beta^{-3}-2\beta^{-4}-{}^2/_3,\ \tau_{k+1}{}^i<\tau\leqslant\tau_{k+2}{}^i \tag{3}$$

$$\eta_k{}^i=-\{({}^2/_3(1+p_k{}^i)+\dot{\beta}^2(\tau_k{}^i)\beta^3(\tau_k{}^i)+2\beta^{-1}(\tau_k{}^i)\}$$

$$\eta_{k+1}{}^i=-\{({}^2/_3+\dot{\beta}^2(\tau_{k+1}{}^i))\beta^3(\tau_{k+1}{}^i)+2\beta^{-1}(\tau_{k+1}{}^i)\}$$

$$i=1,\ k=0;\ i=2,\ k=0{,}2$$

Неизвестное решение $\beta(\tau)$ исходного уравнения (1) получено в результате последовательной непрерывной склейки решения (2) с решением уравнения (3) в точках изменения давления $p(\tau)-\tau_j{}^i$; $i=1$, $j=1$; $i=2$, $j=1, 2, 3$. По построению искомое решение будет класса $C^1(\tau>0)$ в смысле обобщенного решения.

В случае одиночного воздействия на пузырек процесс описывается уравнениями движения (2), (3) при $k=0$, интегрируя которые, получим закон движения сферической полости

$$\tau=J(\beta,\ 1;\ p_0{}^i,\ 0),\ i=1 \tag{4}$$

$$\tau=\tau_1{}^i+J(\min\{\beta(\tau),\ \beta(\tau_1{}^i)\},\ \max\{\beta(\tau),\ \beta(\tau_1{}^i)\};\ 0,\ \dot{\beta}(\tau_1{}^i)) \tag{5}$$

$$J(x,y;p,l)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_x^y\frac{\beta^2\,d\beta}{\sqrt{-{}^1/_3(1+p)\beta^4+\{{}^1/_3(1+p)+{}^1/_2l^2)y^3+y^{-1}\}\beta-1}} \tag{6}$$

где x, y, p, l – величины параметров задачи.

По необходимому условию существования экстремума установлено, что максимум амплитуды радиуса $B(1)=\beta_1{}^1-\beta_0{}^1$ и достигается следующим выбором момента переключения:

$$\tau_1{}^i={}^1/_2T_0{}^i+k_0{}^iT_0{}^i,\ T_0{}^i=2J(\beta_0{}^i,\ 1;\ p_0{}^i,\ 0),\ i=1 \tag{7}$$

Здесь $T_0{}^i$ – период колебаний в случае (4), $k=0$, $k_0{}^i$ – произвольное натуральное число, значения $\beta_0{}^i$, $\beta_1{}^i$ определяются уравнениями

$$(\beta_0{}^i)^3+(\beta_0{}^i)^2+\beta_0{}^i=3/(1+p_0{}^i)\quad \beta_0{}^i(\beta_1{}^i)^3+(\beta_0{}^i)^2(\beta_1{}^i)^2+(\beta_0{}^i)^3\beta_1{}^i=3,\ i=1 \tag{8}$$

В случае двойного воздействия на пузырек движение описывается соотношениями (2), (3) при $k=0{,}2$, $i=2$, полость совершает гармонические колебания с достижением максимума амплитуды радиуса $B(2)=\beta_3{}^2-\beta_2{}^2$ при оптимальном выборе моментов переключения давления $\tau_2{}^i$, $\tau_3{}^i$

$$\tau_2{}^i=\tau_1{}^i+{}^1/_2T_1{}^i+k_1{}^iT_1{}^i,\ T_1{}^i=-2J(\beta_1{}^i,\ \beta_0{}^i;\ 0,\ 0)$$

$$\tau_3{}^i=\tau_2{}^i+{}^1/_2T_2{}^i+k_2{}^iT_2{}^i,\ T_2{}^i=2J(\beta_2{}^i,\ \beta_1{}^i;\ p_2{}^i,\ 0),\ i=2 \tag{9}$$

Здесь $T_1{}^i$ – период колебаний для (5), $k=0$, $T_2{}^i$ – период колебаний в случае (2), $k=2$, $k_1{}^i$, $k_2{}^i$ – произвольные натуральные числа. Величины абсолютных экстремумов

$\beta_2^i = \min\beta(\tau)$, $\beta_3^i = \max\beta(\tau)$ для цикла осцилляций (2), (3) $i=2$, $k=0{,}2$ находятся из уравнений

$$(\beta_1^i)(\beta_2^i)^3 + (\beta_1^i)^2(\beta_2^i)^2 + (\beta_1^i)^3(\beta_2^i) = 3/(1+p_2^i)$$
$$(\beta_2^i)(\beta_3^i)^3 + (\beta_2^i)^2(\beta_3^i)^2 + (\beta_2^i)^3(\beta_3^i) = 3,\ i=2 \qquad (10)$$

Величины периодов колебаний T_0^i, T_1^i, T_2^i вычисляются аналитически через полные эллиптические интегралы первого и второго рода [5].

Экстремальные значения давления на стенке пузырька $p_c(\min\beta)$ и амплитуды давления $\Delta p_c(\min\beta)$ равны

$$p_c(\min\beta) = (\min\beta)^{-4};\ \Delta p_c(\min\beta) = p_c(\min\beta) - (1+p(\tau)) \qquad (11)$$

Итак, по заданной достаточно произвольной ступенькообразной функции $p(\tau)$ в каждом из случаев $i=1$ и $i=2$ построен оптимальный алгоритм наискорейшего достижения абсолютного максимума амплитуды радиуса, который определяется соотношениями выбора моментов переключений (7), (9). Будем называть этот процесс ударно-резонансной раскачкой пузырька. Величины амплитуд $p(\tau)$ выбираются из интегрального условия постоянства импульса, передаваемого жидкости

$$\tau_1^1 = q_0^2\tau_1^2 + q_2^2(\tau_3^2 - \tau_2^2),\ q_0^2 = p_0^2/p_0^1;\ q_2^2 = p_2^2/p_0^1 \qquad (12)$$

где q_0^2, q_2^2 – величины амплитуд давления двойного удара, отнесенные к величине амплитуды давления одиночного удара.

Соотношение (12) равносильно следующему условию:

$$D(1,\beta_0^2;q_0^2,k_0^2) = \frac{d}{dq_0^2}\left\{\frac{1}{q_0^2}\{D(1,\beta_0^1;1,k_0^1) - D(\beta_1^2,\beta_2^2;q_2^2,k_2^2)\}\right\}$$
$$D(x,\ y;\ q,\ k) = A(q,\ k)B(x,\ y)C(x,\ y,\ q) \qquad (13)$$
$$A(q,k) = \frac{(2k+1)q^2}{(1+q)^2};\quad B(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x(3x^2+2xy+y^2)}$$
$$C(x,y,q) = \left[-\frac{1}{3}(1+q)\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}(1+q)y^3 + y^{-1}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) - 1\right]^{-1/2}$$

В случае

$$q_2^2 = f(q_0^2);\ f(q_0^2) = 3[\beta_1^2(\beta_0^1)^3 + (\beta_1^2)^2(\beta_0^1)^2 + (\beta_1^2)^3(\beta_0^1)]^{-1} - 1 \qquad (14)$$

из алгебраического условия (13) определим критические значения q_2^2 в зависимости от q_0^2, обеспечивающие равенство максимальных амплитуд радиуса для $i=1$ и $i=2$: $B(1)=B(2)$. Далее, максимум амплитуды $B(2)$ двойного воздействия превосходит максимум амплитуды $B(1)$ одиночного воздействия, если $q_2^2 > f(q_0^2)$, где q_2^2, q_0^2 удовлетворяют соотношению (13), и в этом смысле дробить удар выгоднее; при возрастании p_k^i максимум амплитуды радиуса увеличивается в несколько раз, значительно возрастают (на порядки) амплитуды давления Δp_c.

Таким образом, получена методика качественного исследования эффективности одиночного и двойного ударно-волновых воздействий на пузырек, определения скачка давления на стенке пузырька Δp_c.

Отметим, что интенсивный рост и сжатие пузырька возможны в зоне устойчивого движения до некоторого критического значения радиуса, начиная с которого происходит потеря устойчивости с дальнейшим образованием кумулятивных струй [7]. В случае перенебрежения действием сил поверхностного натяжения жидкости величины возможных радиусов составляют для воды порядка 10–10^2 Мкм для $p_k^i = 1{,}0$–$10{,}0$ при статическом давлении $P_0 = 101\ 325$ Па.

При этом предложенный алгоритм управления ударно-резонансной раскачки пузырька обобщается и на случай n воздействий, когда повышение давления $p(\tau)$ происходит в точках максимума радиуса, а его ступенькообразное понижение до нуля – в моменты, соответствующие минимальным величинам радиуса. При этом из-за нелинейного характера колебаний газового пузырька интервалы между импульсами и оптимальной длительностью самих импульсов будут возрастать с ростом числа воздействий n. Так как жидкость идеальная, то интервалы между приложениями импульсов, обеспечивающих оптимальное воздействие, могут быть увеличены на время, кратное периоду колебаний пузырька к моменту окончания соответствующего предыдущего воздействия.

Авторы благодарны А. А. Бармину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л.: Судостроение, 1966. С. 15—52.
2. *Shima A., Tsujino T.* The Behavior of Gas Bubbles in the Casson Fluid // J. Appl. Mech., Trans. ASME. 1978. V. 45. № 1. P. 37—42.

3. *Tsujino T., Shima A.* The Behavior of Gas Bubbles in Blood Subjected to an Oscillating Pressure // J. Biomech. 1980. V. 13. № 5. P. 407—416.
4. *Кисляков Ю. А.* Динамика роста газовых пузырей в биологических тканях при декомпрессии (математическое моделирование) // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 4. С. 1012—1015.
5. *Агеев А. Н., Андрианкин Э. И.* Двойной взрыв в воде при малых плотностях энергии // Горение и взрыв в космосе и на земле. М., 1980. С. 109—124.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Изд. 3-е. М.: Наука, 1976. Т. 2. С. 225—239.
7. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники/ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1976. № 10. С. 86—147.

Москва

Поступила в редакцию 28.IX.1987

УДК 532.546

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

ЧЕРНОМАШЕНЦЕВ Г. М.

Построено точное решение задачи Коши для уравнения, описывающего пространственную молекулярную диффузию газа. Полученный результат является естественным обобщением решения аналогичной задачи Буссинеска.

Изотермический процесс фильтрации политропного газа с показателем политропы $n=1$ описывается квазилинейным дифференциальным уравнением [1, 2], которое после нормировки времени принимает вид

$$\frac{\partial^2\rho^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho^2}{\partial z^2}=\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1}$$

Здесь p – абсолютное давление, связанное линейно с плотностью ρ уравнением состояния $\rho=cp$, $c=\text{const}$; x, y, z – пространственные координаты, t – время.

Рассмотрим задачу об эволюции распределения газа в пористой среде, локализованного в начальный момент времени в эллиптической области.

Будем искать решение задачи в виде

$$\rho=\alpha(t)-\beta(t)x^2-\gamma(t)y^2-\delta(t)z^2 \tag{2}$$

Она сводится к интегрированию системы уравнений

$$\begin{gathered}\alpha'=-4\alpha(\beta+\gamma+\delta),\ \beta'=-4\beta(3\beta+\gamma+\delta)\\ \gamma'=-4\gamma(3\gamma+\delta+\beta),\ \delta'=-4\delta(3\delta+\beta+\gamma)\end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим $\beta+\gamma+\delta+\Delta$. Тогда система (3) переписывается в кононической форме

$$\frac{-\alpha'}{\alpha}=\frac{-\beta'-8\beta^2}{\beta}-\frac{-\gamma'-8\gamma^2}{\gamma}=\frac{-\delta'-8\delta^2}{\delta}=4\Delta=\Delta^*$$

Ее интеграл имеет вид

$$\alpha=C_0\exp\left\{-\int_0^t\Delta^*(t)\,dt\right\},\quad C_0>0$$

Аналогично выписываются и другие первые интегралы

$$\begin{gathered}\beta=\frac{\alpha^*(t)}{C_1+\varkappa(t)},\quad \gamma=\frac{\alpha^*(t)}{C_2+\varkappa(t)},\quad \delta=\frac{\alpha^*(t)}{C_3+\varkappa(t)}\\ \alpha^*(t)=C_0^{-1}\exp\left\{-\int_0^t\Delta^*(t)\,dt\right\}=C_0^{-1}\alpha,\quad \varkappa(t)=8\int_0^t\alpha^*(t)\,dt\end{gathered} \tag{4}$$