МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1988

УДК 532.51.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЛЫХ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

СТАРКОВ В. Н.

Рассматривается изотермический сферический слой вязкоупругой жидкости, описываемой однопараметрической моделью Максвелла. В случае, когда параметр модели выбирается равным нулю, получается модель чисто вязкой ньютоновской жидкости. Исследуется устойчивость сферического слоя жидкости относительно малых радиальных возмущений скорости и давления для обоих типов жидкостей.

Сферически-симметричное течение в слое максвелловской жидкости описывается следующей системой дифференциальных уравнений и граничных условий на границах слоя $r=a(t)$ и $r=R(t)$ [1, 2]:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}(p-\sigma)+\frac{3\sigma}{r}$$

$$\tau\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma=2\mu\frac{\partial u}{\partial r},\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u)=0 \tag{1}$$

$$(p-\sigma)|_{r=R}=\frac{2\varkappa}{R},\quad (p-\sigma)|_{r=a}=p_g-\frac{2\varkappa}{a}$$

Здесь t – время, r – радиальная координата, ρ – плотность жидкости, u – радиальная составляющая скорости, p – давление, σ – тензор напряжений, τ – время релаксации максвелловской среды, μ – динамическая вязкость, $\varkappa$ – коэффициент поверхностного натяжения, принятый одинаковым для обеих границ, p_g – давление в газовом пузыре, который окружен рассматриваемым жидким слоем. Будем считать параметры газа, кроме радиуса пузыря, неизменными, а давление в газе изменяющимся по адиабатическому закону $p_g=p_{g0}(a_0/a)^{3\gamma}$, где γ – показатель адиабаты, равный для воздуха 4/3, $p_{g0}=2\varkappa(1/a_0+1/R_0)$ – равновесное значение давления в газе, a_0 и R_0 – равновесные значения радиусов. К уравнениям (1) необходимо добавить условие постоянства объема жидкости, связывающее функции a и R, $R^3=a^3+R_l^3$, где R_l – радиус исходного объема жидкости до помещения в нее газового пузыря. Будем использовать условие постоянства объема жидкости в дифференциальной форме $\dot a a^2=\dot R R^2$, где $\dot a$ и $\dot R$ – скорости перемещения границ слоя.

В состоянии равновесия жидкости в слое имеем $u=0$, $\sigma=0$, $p=2\varkappa/R_0$. Малые сферически-симметричные возмущения этих функций, а также радиусов слоя будем рассматривать в виде

$$u=u_1e^{\omega t},\ \sigma=\sigma_1e^{\omega t},\ p=2\varkappa/R_0+p_1e^{\omega t}\ \ a=a_0+a_1e^{\omega t},\ R=R_0+R_1e^{\omega t} \tag{2}$$

где амплитуды возмущений u_1, σ_1, p_1 являются функциями r, а a_1 и R_1 – постоянные.

После подстановки (2) в (1) получим уравнения для нахождения амплитуд возмущений

$$\rho\omega u_1=-\frac{d}{dr}(p_1-\sigma_1)+\frac{3\sigma_1}{r},\quad \tau\omega\sigma_1+\sigma_1=2\mu\frac{du_1}{dr}\quad u_1=\frac{a_0^2}{r^2}\omega a_1,\quad \omega a_0^2a_1=\omega R_0^2R_1$$

Амплитуды возмущений скорости и тензора напряжений можно выразить через амплитуду возмущений радиуса слоя

$$u_1=\frac{a_0^2\omega a_1}{r^2},\quad \sigma_1=\frac{-4\mu}{1+\tau\omega}\frac{a_0^2\omega a_1}{r^3}$$

С помощью этих формул и линеаризованных граничных условий

$$(p_1-\sigma_1)|_{R_0}=-\frac{2\varkappa}{R_0^2}R_1,\quad (p_1-\sigma_1)|_{a_0}=\left(-\frac{4p_{g0}}{a_0}+\frac{2\varkappa}{a_0^2}\right)a_1$$

после интегрирования уравнения движения получаем следующее уравнение для определения характерных частот возмущений ω:

$$\mathrm{De}(1-\varepsilon)\omega^3+(1-\varepsilon)\omega^2+\omega[4(1-\varepsilon^3)+\mathrm{De}\,\mathrm{Lp}]+\mathrm{Lp}=0$$

$$\varepsilon=\frac{a_0}{R_0},\quad \mathrm{De}=\frac{\tau}{t'},\quad t'=\frac{\rho a_0^2}{\mu},\quad \mathrm{Lp}=\frac{2\varkappa\rho a_0}{\mu^2}(3+4\varepsilon-\varepsilon^4)$$

Здесь De – число Деборы [3], t' – характерное время процесса, Lp – число Лапласа, выражающее отношение сил поверхностного натяжения к силам вязкости.

Сначала рассмотрим случай $\mathrm{De}\neq 0$. Согласно критерию Вышнеградского [4], характеристический многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами устойчив (т. е. вещественные части его корней отрицательны) тогда, когда все его коэффициенты положительны и выполняется неравенство

$$(1-\varepsilon)[4(1-\varepsilon^3)+\mathrm{De}\,\mathrm{Lp}]>\mathrm{De}(1-\varepsilon)\mathrm{Lp}$$

которое в окончательном виде $\varepsilon<1$ всегда верно.

Следовательно, в случае максвелловской жидкости малые радиальные возмущения всегда затухают по экспоненте.

Иначе обстоит дело в случае ньютоновской жидкости, когда $\mathrm{De}=0$. В этом случае характеристическое уравнение превращается в квадратное, имеющее корни

$$\omega=\frac{-2(1-\varepsilon^3)\pm\sqrt{4(1-\varepsilon^3)^2-(1-\varepsilon)\mathrm{Lp}}}{1-\varepsilon}$$

Видим, что критическое значение параметра $\mathrm{Lp}_*=4(1-\varepsilon^3)^2/(1-\varepsilon)$ разграничивает различные типы поведения малых колебаний. В случае $\mathrm{Lp}>\mathrm{Lp}_*$ колебания имеют гармонические составляющие и затухают асимптотически, а при $\mathrm{Lp}<\mathrm{Lp}_*$ колебания затухают по экспоненте. Особенно ясно это различие видно на фазовой плоскости: в первом случае имеем устойчивый фокус, во втором – устойчивый узел [5]. Значение критической вязкости вычисляется по формуле

$$\mu_*=\frac{\sqrt{2\varkappa\rho a_0(1-\varepsilon)(3+4\varepsilon-\varepsilon^4)}}{2(1-\varepsilon^3)}$$

Эти формулы можно рекомендовать для выбора материалов, параметры которых будут обеспечивать наиболее предпочтительное на практике экспоненциальное затухание малых колебаний. Вопрос о влиянии толщины слоя, характеризуемой параметром ε, требует особого рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
3. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
4. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949. 141 с.
5. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 15.VII.1986

УДК 532.525.2:533.6.011.5

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СИСТЕМЫ СТРУЙ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ ВСТРЕЧНЫМ ПОТОКОМ

ГУБАНОВА О. И., КАРПМАН И. М., ЛУНЕВ В. В.

Приведены результаты экспериментального исследования встречного взаимодействия со сверхзвуковым потоком системы струй, вытекающих из сопел на лобовой поверхности сферического сегмента [1]. Модель (диаметром D) имела четыре сопла с относительно малым выходным диаметром $d_a=(0{,}1-0{,}05)D$, расположенных сим-