

УДК 532.516.5

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНОГО И КОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКОВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ

ГОЛЬДШТИК М. А., ШТЕРН В. Н.

Задача о течении вязкой жидкости, вызванном линейным источником (стоком), в присутствии поперечной стенки представляет интерес в следующих аспектах. Во-первых, она служит полезной моделью для изучения свойств практически важных более сложных течений. В случае струи, бьющей из отверстия в стенке, задача о стоке моделирует внешнее течение, порожденное эжекцией струи [1, 2]. Задача об источнике служит простейшей автомодельной схемой входного участка течения в каналах и позволяет выяснить причины появления немонотонности в профиле скорости [3]. В случае конического источника задача является простейшей одномерной иллюстрацией явления отнесения потока от поверхности посредством вдува [4].

Во-вторых, этот простой пример весьма содержателен в познавательном отношении, поскольку позволяет вскрыть новые нетривиальные свойства динамики вязкой жидкости. Они проявляются принципиально различно как по постановке, так и по результатам в случае отсоса и вдува. Класс конически-симметричных течений вязкой жидкости, к которому принадлежит рассматриваемая задача, вообще богат парадоксальными гидродинамическими эффектами [5], например отсутствием решения при конечных числах Рейнольдса [6]. Физически это богатство объясняется тем, что взаимодействие вязких и конвективных механизмов переноса дает более широкое многообразие эффектов, чем каждый механизм в отдельности. Как правило, известные простые модели гидродинамики отражают один из этих механизмов. В данном же случае они оба сохраняют равноправное значение, хотя задача сводится к сравнительно простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в силу этого допускает детальный анализ.

Физические парадоксы связаны и с необычными математическими свойствами. Последние создавали определенный технический и психологический барьер, который затруднял адекватное решение возникающих в данном классе задач и, в частности, задачу о взаимодействии линейного источника с поперечной плоскостью. Эта задача первоначально была рассмотрена в постановке, когда продольная компонента скорости на линии источников принималась равной нулю [3]. Но, оказывается, в случае стока ограниченных решений при этом не существует. Затем (по-видимому, совершенно независимо) была сформулирована постановка, когда требовалась лишь ограниченность продольной скорости на оси симметрии [7]. Но этого недостаточно для выделения локального единственного решения в случае вдува. Об этом в определенной степени свидетельствуют расчеты [8], по неудачный выбор координат и численного метода не позволил решить задачу до конца.

Далее будет показано, что задача требует различной постановки для случаев отсоса и вдува. При вдуве существуют и имеют физический смысл ограниченные, но не аналитические решения. Можно сказать, что эта ситуация не подпадает под действие принципа минимальной особенности [9]. Но она вполне согласуется с теорией вихревого движения идеальной жидкости.

1. Постановка задачи. Решение уравнений движения для вязкой несжимаемой жидкости разыскивается в классе

$$v_r = -\frac{\nu}{r} y'(x); \quad v_\theta = -\frac{\nu}{r} \frac{y(x)}{\sin \theta}; \quad v_\varphi = 0; \quad x = \cos \theta \quad (1.1)$$

Здесь (r, θ, φ) — сферические координаты, ν — коэффициент кинематической вязкости. Рассматривается осесимметричное течение, вызванное источниками (стоками), расположенными на оси $\theta=0$ и имеющими равномерную обильность расхода Q , приходящегося на единицу длины оси. Течение осуществляется в присутствии плоскости $\theta=\pi/2$, на кото-

рой выполнены условия прилипания. Поскольку задача не содержит характерного масштаба длины, решение обладает обязательной автомодельностью и, если существует, принадлежит классу (1.1) [10].

По заданному расходу может быть построено число Рейнольдса $Re = Q/(2\rho v)$, где ρ — плотность жидкости ($Re > 0$ для источника). Безразмерная функция $y(x)$ связана с функцией тока Стокса ψ соотношением $\psi = vry$. В силу представления (1.1) уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а из уравнений сохранения импульса после исключения давления следует обыкновенное дифференциальное уравнение для $y(x)$, которое допускает интегрирование вплоть до первого порядка [11]

$$(1-x^2)y' + 2xy - 1/2y^2 = C_3 + C_2x - C_1x^2; 0 \leq x \leq 1 \quad (1.2)$$

Для определения константы интегрирования и констант в правой части требуется задать, вообще говоря, четыре граничных условия. Два из них — условия прилипания на плоскости $y(0) = y'(0) = 0$. На оси задана величина $y(1) = -Re$ и требуется по крайней мере ограниченность продольной компоненты скорости, т. е. $y'(1)$.

Полагая $x=0$ в уравнении (1.2), получим $C_3=0$, а подставляя $x=1$, находим соотношение между константами

$$C_1 = C_2 + 2Re + 1/2Re^2$$

Условие ограниченности $y'(1)$ позволяет определить ее величину через оставшуюся произвольной константу C_2 . Для этого достаточно продифференцировать (1.2)

$$(1-x^2)y'' + 2y - yy' = C_2 - 2C_1x$$

и положить $x=1$. Поскольку для ограниченности $y'(1)$ необходимо, чтобы $(1-x^2)y'' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$, то отсюда следует

$$y'(1) = -C - 2 - Re; \quad C = C_2/Re \quad (1.3)$$

Полученные соотношения для констант, казалось бы, позволяют выделить локально единственное решение уравнения (1.2), удовлетворяющее всем граничным условиям. При этом использование (1.3) позволяет осуществить численное интегрирование непосредственно от точки $x=1$, например методом Рунге — Кутты. В работе [7] интегрирование проводилось от значения $x=0,99$, а величина $y(0,99)$ определялась на основе разложения в ряд Тейлора. Естественно, таким путем находится аналитическое решение. Параметр C должен быть подобран так, чтобы удовлетворить одному из условий на конце пути интегрирования, например $y(0)=0$. Тогда второе условие $y'(0)=0$ выполнится автоматически и решение задачи тем самым будет построено. Однако дело осложняется тем, что поскольку на плоскости (x, y) точка $(1, -Re)$ особая, через нее может проходить не одна, а целый пучок траекторий, имеющих ограниченную производную, удовлетворяющую соотношению (1.3). Требование аналитичности решения выделяет, вообще говоря, единственную траекторию. Но в данном случае требуется лишь ограниченность производной. Этому условию могут удовлетворять не только аналитические, но и особые решения, если особенность проявляется лишь в более высоких производных. Покажем, что в рассматриваемой задаче реализуется именно такая ситуация.

2. Ограниченные неаналитические решения. Рассмотрим окрестность точки $x=1$, для чего осуществим замену переменных: $\eta = 1-x$; $u = y + Re$; $u_\eta' = -y_x'$. Вблизи оси $\eta \ll 1$, $u \ll 1$ u_η' остается конечной величиной. После подстановки в уравнение (1.2), сохраняя лишь линейные по η и u члены, получаем

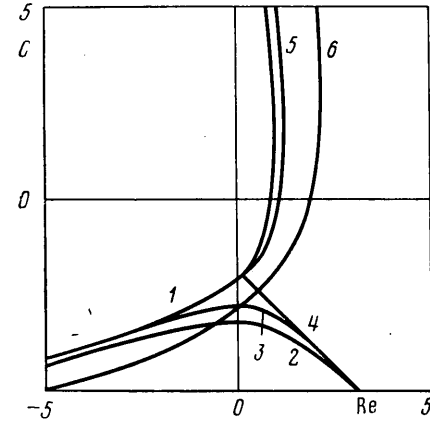
$$\eta u_\eta' = ku + a\eta \quad (2.1)$$

$$k = 1 + 1/2 Re; \quad a = -1/2 Re(C + 2 + Re) = 1/2 Re y'(1)$$

Требуется построить решение, удовлетворяющее условию $u(0)=0$ и имеющее ограниченную производную $u_{\eta}'(0)$. Общее решение (2.1) имеет вид

$$u = a\eta / (1-k) + A\eta^k \quad (2.2)$$

Условия $u(0)=0$ и $|u_{\eta}'(0)| < \infty$ выполняются для всех $k > 1$ при произвольных значениях A , поэтому поставленными требованиями решение однозначно не определено. Более сильное требование аналитичности устраняет произвол (для всех k , кроме целых), поскольку в этом случае должно быть $A=0$. При отсосе, когда $Re < 0$, значение $k < 1$. Тогда из условия ограниченности $u_{\eta}'(0)$ вытекает, что $A=0$. Однако при вдуве $k > 1$ и производная $y'(1)$ ограничена при любых конечных A . При этом в диапазоне $0 < Re < 2$ особенность при $x=1$ имеет $y''(x)$. При $Re > 2$ величина $y''(1)$ становится ограниченной, а сингулярность последовательно перемещается на все более высокие производные. Таким образом, в случае вдува недостаточно поставить условие ограниченности $y'(1)$. Для определенности решения нужно, например, задать величину $y'(1) = -Re$, или, что то же, продольную скорость на оси симметрии в соответствии с (1.1). В случае отсоса условия ограниченности достаточно, а величина продольной скорости вырабатывается автоматически. В этой ситуации для значений $Re > 0$ выражение (1.3) следует трактовать как условие для определения постоянной C



по заданным значениям Re и Re_r . При этом получаем разрешимость поставленной задачи при всех $Re > 0$.

Пусть, например, $y'(1)=0$, тогда $C = -2 - Re$, $C_2 = -2Re - Re^2$, $C_1 = -1/2 Re^2$, а уравнение (1.2) принимает вид

$$(1-x^2)y' + 2xy = 1/2 [y^2 - Re^2 x(2-x)] - 2Re x \quad (2.3)$$

Любая интегральная кривая этого уравнения, в том числе выпущенная из начала координат на плоскости (x, y) , т. е. удовлетворяющая условиям прилипания, проходит через точку $(1, -Re)$ и при этом $y'(1)=0$. При $Re \rightarrow \infty$ имеем асимптотическое представление решения

$$y = -Re \sqrt{x(2-x)} \quad (2.4)$$

которое, удовлетворяя условию $y(0)=0$, имеет неограниченную производную $y'(0)$, т. е. возникает необычный пограничный слой: условие прилипания «стирается» и при сохранении условия непроницаемости скорость на стенке обращается в бесконечность. Численные расчеты показали, что решение уравнения (2.3) действительно стремится к (2.4) с ростом Re . При конечных числах Re профиль радиальной скорости ведет себя немонотонно: вблизи плоскости формируется пристенная струя. Поэтому, несмотря на неблагоприятный градиент давления, отрыва не происходит. Напротив, наличие плоскости ускоряет жидкость! Эти свойства существенно расходятся со стандартными представлениями теории пограничного слоя.

Вывод о разрешимости задачи при всех $Re > 0$, да еще с любым наперед заданным значением $y'(1)$ находится в противоречии с результатами работы [7], где в качестве итога построена вполне определенная кривая разрешимости задачи $Re = Re(C)$. Причина расхождения в том, что в [7] ограничились случаем аналитического решения. Использованный алгоритм — сочетание разложения в ряд Тейлора вблизи $x=1$ и чис-

ленного интегрирования методом Рунге — Кутта — выделяет именно аналитическое решение, что подтверждают и расчеты, выполненные в данной работе. В частности, была воспроизведена построенная в [7] кривая аналитичности (см. линию 1 на фигуре). Линией 4 показана зависимость $C = -\text{Re} - 2$, соответствующая решениям задачи с $y'(1) = 0$, рассмотренной в [3]. Решения задачи с ограниченной величиной $y'(1)$ отвечают каждой точке в полуплоскости $\text{Re} > 0$, в то время как при $\text{Re} < 0$ ограниченность $y'(1)$ достигается только на кривой существования аналитического решения.

3. Случай малых чисел Рейнольдса. При малых числах Рейнольдса можно убедиться в существовании решения, отличного от [7], не прибегая к численному анализу. Полагая $y'(1) = b \text{Re}$, получим $C = -(1 + b) \text{Re} - 2$ и уравнение (1.2) примет вид

$$(1 - x^2)y' + 2xy - \frac{1}{2}y^2 = \text{Re}^2 \left[\left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 - (1 + b)x \right] - 2 \text{Re} x$$

Используя подстановку $y = u - \text{Re} x^2$, приходим к уравнению для u

$$(1 - x^2)u' + x(2 + \text{Re} x)u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2} \text{Re}^2 x^2(x^2 - 1) + (1 + b) \text{Re} x(x - 1)$$

Если $|\text{Re}| \ll 1$, то и $|u| \ll 1$, поэтому можно пренебречь квадратичным членом $\frac{1}{2}u^2$. Линеаризованное уравнение имеет при $b = -1$ решение

$$u = \gamma [x^2 - 1 + (1 - x)^{1+\gamma}(1 + x)^{1-\gamma} \exp(\text{Re} x)]; \quad \gamma = \frac{1}{2} \text{Re}$$

удовлетворяющее всем граничным условиям и имеющее в случае $\text{Re} > 0$ ограниченную производную при $x = 1$. Если $\text{Re} < 0$, это решение непригодно из-за неограниченности производной. В общем случае, когда $b \neq -1$, решение линеаризованного уравнения выписывается в квадратурах

$$u(x) = (1 - x)^{1+\gamma}(1 + x)^{1-\gamma} \text{Re}^2 \exp(\text{Re} x) A(x)$$

$$A(x) = - \int_0^x (1-t)^{-1-\gamma}(1+t)^{\gamma-2} t \left[\frac{1}{2}(t^2+t) + 1 + b \right] \exp(\text{Re} t) dt$$

При $\text{Re} > 0$ вблизи $x = 1$ справедливо представление $A = A_1(1 - x)^{-\gamma} + A_0 + o(1)$ и решение $y(x)$ с ограниченной $y'(1)$ существует при всех значениях b . При $\text{Re} < 0$ функция $A(x)$ ограничена на интервале $[0, 1]$. Но теперь для того, чтобы u имела ограниченную производную, необходимо потребовать, чтобы $A(1) = 0$. Из этого условия однозначно определяется величина b .

Случай $\text{Re} = 0$ — особый. Нетривиальное решение существует, если величина $b \text{Re}^2$ конечна. На оси производная имеет логарифмическую особенность, но коэффициент при логарифме обращается в ноль при $b \text{Re}^2 \approx 15,29$. В силу этого кривая 1 на фиг. 1 асимптотически следует зависимости $C = 15,29/\text{Re} - 2$. При движении вдоль кривой 1 в сторону увеличения C величина продольной скорости на оси асимптотически растет согласно формуле $\text{Re}_r = 15,29/\text{Re}$, поэтому уменьшение расхода Q отнюдь не означает уменьшения интенсивности движения.

4. Задача о коническом источнике. Таким образом, постановка задачи различается принципиально для отсоса и вдува. При отсосе условие ограниченности продольной компоненты скорости однозначно определяет ее величину, а при вдуве значение продольной скорости на оси в рамках класса (1.1) может быть задано по произволу. Но, возможно, существующие в случае вдува ограниченные, но не аналитические решения следует отбросить, исходя из физических соображений? В некоторых случаях, когда постановка не обеспечивает единственности решения, пользуются так называемым принципом минимальной особенности [9]. Примерами его весьма успешных реализаций являются постулат Жуковского — Чаплыгина и принцип Бриллюэна — Вилля, который находит широкое при-

менение в технике сращивания асимптотических разложений. Часто этот принцип интерпретируют как внешнее следствие скрытых предельных переходов. Например, в моделях идеальной жидкости таким скрытым переходом может быть устремление вязкости к нулю. Проверка корректности применения принципа в этих условиях может состоять в том, что скрытый переход заменяется реальным. В рассматриваемой задаче идеализацией является задание источников на оси. Поэтому рассмотрим более реальную постановку, когда жидкость вытекает из конуса с конечным полууглом раствора θ_1 , а затем исследуем, что происходит, когда $\theta_1 \rightarrow 0$.

Итак, область течения заключена между конусом и плоскостью, проходящей через вершину перпендикулярно его оси. Если на каждой из границ скорость задана в согласии с (4.1), то существует решение в классе конически-симметричных. Задача при условии прилипания на плоскости сводится к уравнению (1.2) с краевыми условиями

$$y(0)=0; y(x_1)=-Re; y'(x_1)=-Re,$$

Условие $y'(0)=0$ будет выполнено автоматически, если положить $C_3=0$. Полагая в уравнении $x=x_1$, получаем соотношение

$$C_1 = [1/2 Re^2 + Re(C+2)x_1 + (1-x_1^2)Re] / x_1^2; C_2 = Re C \quad (4.1)$$

Решая задачу Коши для уравнения (1.2) с начальным условием $y(0)=0$, распорядимся величиной параметра C так, чтобы $y(x_1)=-Re$. Тогда в силу (4.1) условие $y'(x_1)=-Re$ будет выполнено автоматически. Таким образом, имеется двухпараметрический класс решений, определенный параметрами Re , Re_r или, согласно (4.1), Re , C . В силу того что $y''(0)=-Re C$, при $C \leq 0$ и $Re > 0$ жидкость растекается от оси во всей области течения, а при $C > 0$, $Re > 0$ около стенки существует зона возвратного движения, в которой жидкость течет около плоскости к началу координат. С ростом C эта зона расширяется и в пределе $C \rightarrow \infty$ охватывает всю область течения. Вблизи конуса формируется сильная струя, которая, несмотря на наличие источников по поверхности конуса, служит стоком для внешнего течения.

Если на конусе поставить условие прилипания, т. е. равенства нулю продольной компоненты скорости $y'(x_1)=0$, то получим однопараметрическое семейство решений. Результаты расчета такого семейства для $x_1=0,99$ и $0,999$ представлены на фигуре 1 кривыми 2 и 3. Как видно из фигуры, если $Re < 0$, то пределом при $x_1 \rightarrow 1$ является аналитическое решение [7], а если $Re > 0$, в пределе $x_1 \rightarrow 1$ получаем неаналитическое решение, отвечающее линии 4. В обоих случаях предельный переход является неравномерным. При $Re < 0$ граничное условие $y'(x_1)=0$ в пределе «стирается» и производная на оси принимает конечные значения, равные соответствующим величинам на кривой 1. При $Re > 0$ по $y'(x_1)$ сходимость равномерна, но $y''(x_1) \rightarrow \infty$ при $x_1 \rightarrow 1$, $Re < 2$. Следовательно, можно заключить, что принцип минимальной особенности работает в случае отсоса, но не работает в случае вдува.

5. Задача об оттеснении. Спрашивается, существуют ли такие граничные условия на конусе, при которых в пределе получится аналитическое решение и при отсосе, и при вдуве? Проведенный численный эксперимент показал, что ответ на этот вопрос положителен. Если на конусе потребовать равенства нулю касательных напряжений, другими словами, положить $y''(x_1)=0$, то получим другое однопараметрическое семейство решений и связанное с ним семейство функций $Re(C)$. Результаты расчетов при $x_1=0,99$; $0,9$ представлены на фигуре кривыми 5 и 6. В пределе $x_1 \rightarrow 1$ получаем при всех значениях аналитическое решение [7]. Предельный переход и тут неравномерный, но уже начиная со второй производной как для вдува, так и для отсоса. В пределе условие скольжения сти-

рается и y'' на оси принимает конечные значения. Эти результаты допускают неоднозначную физическую интерпретацию.

Во-первых, обобщая постановку [7], можно считать, что на конусе задана скорость вдува и именно по ней определяется число Рейнольдса, а касательная компонента скорости подбирается такой, чтобы отсутствовало трение. В рамках данной интерпретации решение задачи существует лишь при числах Рейнольдса вдува, не превышающих некоторый предел $Re_*(x_1)$, причем в области $0 < Re < Re_*$ решений два. На фигуре прямая $Re = \text{const}$ пересекает зависимость $Re(C)$ в двух точках, из них отвечающая большему значению C соответствует двухъядейстому режиму, а меньшему — двухъ- или одноядейстому, в зависимости от знака C . При $Re = Re_*$ эти решения, как и в задаче [7], смыкается в области двухъядейстых режимов. Это классическая бифуркация рождения — уничтожения пары стационарных решений [12]. Теория гласит, что устойчивым может быть лишь одно из возникающих решений. Анализ устойчивости достаточно сложен, но наиболее вероятным «кандидатом» в устойчивые являются решения, отвечающие нижней ветви и переходящие в медленные течения при $Re \rightarrow 0$. На верхней ветви с уменьшением Re касательная компонента скорости возрастает до бесконечности, что свидетельствует о физической неестественности такой постановки.

Во-вторых, задачу можно формулировать совсем по-иному, считая заданной касательную скорость на конусе, а нормальную подбирать из условия отсутствия трения. Такая постановка близка к известной проблеме отеснения потока от поверхности за счет вдува [4]. В этой интерпретации кривая $Re(C)$ на фигуре определяет критическую скорость вдува, решение существует при всех значениях величины C или Re , и никаких бифуркаций и потери устойчивости не происходит. Этот пример показывает, к каким радикальным изменениям математических свойств приводит, казалось бы, небольшое изменение физической постановки задачи. То, что с ростом касательной скорости критическая скорость вдува стремится к нулю, объясняется наличием диффузионного течения с неблагоприятным градиентом давления. Результаты свидетельствуют, что максимальная критическая скорость вдува возрастает вместе с углом раствора конуса, например при $x_1 = 0,5$ $Re_* \approx 7,3$.

6. Обсуждение. Возвращаясь к постановке, когда на конусе задается вектор скорости, отметим, что принципиальная разница между случаями отсоса и вдува, выявленная для линейного источника, сохраняется и для конуса конечного угла раствора. Теперь это различие проявляется при предельном переходе $Re \rightarrow \infty$. При вдуве предельный переход равномерен для вектора скорости на конусе — и касательная и нормальная компоненты сохраняются. При отсосе, наоборот, переход неравномерен, одно из условий «стирается» — касательная компонента скорости в пределе принимает вполне определенное значение, вообще говоря, не совпадающее с допредельной величиной. Это находится в полном согласии с различной постановкой краевых условий на участках втекания и вытекания в теории идеальной жидкости и, более того, может служить обоснованием этих постановок.

Известно, что решения уравнений Эйлера обладают свойством обратимости. Смена направления скорости на противоположное (вообще говоря, и знака времени, но здесь рассматриваются стационарные течения) не выводит нас из класса решений. Однако граничные условия в случае вихревых течений уже не обладают такой симметрией. Для однозначной разрешимости обычно на участках втекания требуется дополнительно к нормальной компоненте скорости задать завихренность [13] или касательные компоненты скорости [14]. Для обращения движения в такой постановке уже необходимо не только изменить знак скорости, но и переформулировать краевую задачу. С формально математической точки зрения дополнительные граничные условия могут быть поставлены на участках как

втекания, так и вытекания. Предпочтение первых основывается на соображениях физического характера и является по сути дополнительным постулатом в рамках теории идеальной жидкости. Рассмотренный пример показывает, что этот постулат может рассматриваться как следствие предельного перехода для течения вязкой жидкости. Хотя в пределе вязкость равна нулю, ее воздействие проявляется в различии краевых условий на участках втекания и вытекания. В задаче о линейном источнике это различие проявляется и при конечных числах Рейнольдса. Это связано с тем, что локальное число Рейнольдса $u_0 r/\nu$ на оси обращается в бесконечность.

Приведенные результаты демонстрируют некоторые необычные свойства решений класса (1.1). Анализ этих и других свойств содержится в препринте [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schneider W.* Flow induced by jets and plumes // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 108. P. 55–65.
2. *Schneider W.* Asymptotic analysis of jet flows // *Fluid Dynamic Trans. (Warszawa)*. 1985. V. 12. P. 113–156.
3. *Щербинин Э. В.* Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1973. 303 с.
4. *Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.* Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия, 1972. 342 с.
5. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
6. *Гольдштик М. А.* Одно парадоксальное решение уравнений Навье – Стокса // *ПММ.* 1960. № 4. С. 610–621.
7. *Голубинский А. А., Сычев В. В.* Об одном автомодельном решении уравнений Навье – Стокса // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1976. Т. 7. № 6. С. 11–17.
8. *Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В.* Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 316 с.
9. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
10. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике: 8-е изд. М.: Наука, 1977. 438 с.
11. *Слезкин Н. А.* Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // *Уч. зап. МГУ.* 1934. Вып. 2. С. 89–90.
12. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
13. *Юдович В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1963. Т. 3. № 6. С. 1032–1066.
14. *Кажихов А. В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // *ПММ.* 1980. Т. 44. № 5. С. 947–950.
15. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Индуцированные струи и критические явления в вязких течениях: Препринт № 159. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1987. 50 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.V.1987