МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1988

УДК 533.722.011

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ ГАЗА, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ

ВОЛКОВ И. В.

Исследуются вторичные течения, которые возникают в пограничных слоях на полубесконечной пластине и на бесконечном конусе (сверхзвуковой режим) при наличии эффекта поперечного скольжения. Определяются автомодельные профили скорости, а также вычисляется сила отдачи, действующая в районе передней кромки пластины, и распределение вдоль образующей конуса плотности осевого крутящего момента.

1. Некоторые оценки. Эффект поперечного скольжения [1, 2] определяется наличием на поверхности обтекаемого тела анизотропной микрошероховатости. Коллективное взаимодействие микронеровностей со сдвиговым вязким течением приводит в конечном итоге к появлению в пограничном слое медленного упорядоченного движения газа в поперечном направлении.

Рассмотрим шероховатую поверхность, у которой характерный размер микродефектов a в $\mathrm{Re}^{1/4}$ раз меньше толщины пограничного слоя δ: $a/\delta \leqslant \mathrm{Re}^{-1/4}$. Столь малые неровности порождают мелкомасштабные возмущения течения, релаксирующие в пределах асимптотически тонкой зоны с характерной толщиной $l \sim \max(a, \delta\,\mathrm{Re}^{-1/4}) \ll \delta$.

На расстояниях от поверхности тела, больших l, но меньших δ, по-прежнему справедливы параболические уравнения Прандтля. В процессе их решения поверхность тела следует считать гладкой (в масштабе δ), а учет ее реальной микрогеометрии производить путем модификации граничного условия на дне пограничного слоя. Вид этого условия определяется в результате решения задачи о течении в пристеночной возмущенной зоне и последующего асимптотического сращивания с решением в основной области. Удается показать [3], что на фиктивной границе W, за которую удобно принять средний уровень профиля шероховатой поверхности, решение уравнений Прандтля должно удовлетворять условию скольжения

$$\mathbf{u}_W = l_W |\zeta_{ij}| (d\mathbf{u}/dn)_W$$

Здесь $\mathbf{u}_W$ – скорость газа, $(d\mathbf{u}/dn)_W$ – ее производная по нормали к W, а $l_W = [\mu\rho^{-1}(2/RT)^{1/2}]_W$ – длина свободного пробега молекул газа у стенки; μ, ρ, T – соответственно коэффициент вязкости, плотность и температура газа. Симметричная матрица $|\zeta_{ij}|$ называется матрицей коэффициентов скольжения [1], Зависимость её собственных чисел от размеров и формы неровностей исследовалась в [2–4].

В простейшем случае, когда поверхность тела представляет собой изотропно рассеивающую плоскость (при этом ее профиль совпадает с фиктивным профилем W), матрица коэффициентов скольжения имеет вид

$$|\zeta_{ij}| = \zeta_0 |\delta_{ij}| \tag{1.1}$$

Если рассеяние на поверхности близко к диффузному, то $\zeta_0 \approx 1$.

При обтекании изотропно рассеивающей плоской поверхности скорость газа непосредственно у тела (скорость скольжения) параллельна направлению основного сдвигового течения, а ее модуль является величиной порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$.

Матрица коэффициентов скольжения сохраняет структуру (1.1) и в случае, когда поверхность тела имеет микродефекты, форма которых изотропна. Влияние шероховатости сказывается лишь на величине коэффициента скольжения ζ. Можно показать, что в зависимости от размеров и формы неровностей величина ζ варьируется в диапазоне $-\mathrm{Re}^{1/4}\leqslant\zeta\leqslant\zeta_0$. Нижнему пределу отвечает случай «крупных» микродефектов: $a\sim\delta\,\mathrm{Re}^{-1/4}$. При этом для трения на поверхности эффект скольжения по порядку величины составляет $\mathrm{Re}^{-3/4}$, что существенно больше, нежели те эффекты, которые обычно рассматриваются в теории пограничного слоя второго порядка.

В случае произвольной шероховатой поверхности, когда нет оснований предполагать полную изотропность ее свойств по направлениям, собственные числа матрицы коэффициентов скольжения могут различаться: $\zeta_1\neq\zeta_2$. Вследствие этого создается возможность появления составляющей скорости скольжения, перпендикулярной направлению основного сдвигового течения (поперечное скольжение). Пусть $(du/dn)_W\cos(\alpha)$ и $(du/dn)_W\sin(\alpha)$ — компоненты вектора $(d\mathbf{u}/dn)_W$ вдоль главных осей матрицы коэффициентов скольжения. Тогда для величины поперечного скольжения имеет место следующее соотношение:

$$w_{SL}=(^1/_2)l_W|\sin(2\alpha)(\zeta_1-\zeta_2)|(du/dn)_W$$

При обтекании анизотропной поверхности ($\zeta_1\neq\zeta_2$) эффект поперечного скольжения отсутствует лишь тогда, когда сдвиговое течение направлено вдоль одной из главных осей матрицы коэффициентов скольжения ($\alpha=0$ или $\pi/2$).

В пограничном слое Прандтля поперечное скольжение порождает медленное вторичное течение с характерной скоростью w, причем $w\sim|\zeta_1-\zeta_2|\,\mathrm{Re}^{-1/2}\leqslant\mathrm{Re}^{-1/4}$. Ниже приведены два простых примера таких течений — на полубесконечной пластине и на конусе, расположенных под нулевым углом атаки к набегающему потоку. В целях упрощения анализа предполагается, что вязкость газа линейно зависит от его температуры, и что рассматриваемые вторичные течения могут быть описаны как малые возмущения на фоне основных автомодельных течений.

2. Поперечное скольжение на пластине. Расположим трехмерную декартову систему координат таким образом, чтобы полуплоскость $Y=0$, $X\geqslant0$ совпадала с поверхностью пластины (фиг. 1, a). Будем считать, что скорость невязкого течения на внешней границе пограничного слоя U направлена вдоль оси X. Тогда скорость поперечного скольжения w_{SL} параллельна оси Z, а ее величина определяется соотношением

$$w_{SL}=l_W\zeta_{ZX}(dU_X/dy)_{Y=0} \tag{2.1}$$

где U_X — X-составляющая скорости основного автомодельного течения.

Пусть далее $w(x, y)$ — скорость вторичного течения, индуцированного поперечным скольжением. Чтобы определить конкретный вид этой функции, следует решить уравнение переноса для Z-компоненты импульса с граничными условиями, определяющими поперечное скольжение на поверхности пластины и отсутствие поперечного движения во внешнем невязком потоке

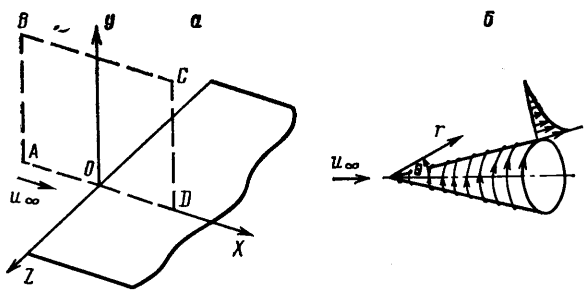
$$\rho U_x\frac{dw}{dx}+\rho U_y\frac{dw}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{dw}{dy}\right)\quad w|_{Y=0}=w_{SL},\qquad w|_\infty=0$$

Нормируем w на w_{SL}: $\varphi=w/w_{SL}$, и перейдем к автомодельной переменной $t=\eta\xi^{-1/2}$, где ξ и η — переменные Дородницина. Тогда сформулированная выше граничная задача приобретает следующий вид:

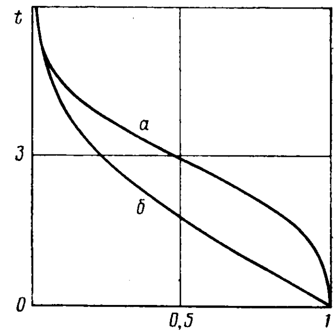
$$2\varphi''+(\varphi f)'=0,\quad \varphi(0)=1,\quad \varphi(\infty)=0 \tag{2.2}$$

Решением (2.2) является выражение $f''(t)/f''(0)$, (кривая *а* на фиг. 2), где функция f — решение Блазиуса.

Непосредственной проверкой устанавливается, что рассматриваемое вторичное течение характеризуется отсутствием трения на поверхности пластины. Оставаясь в рамках теории пограничного слоя Прандтля, невозможно разрешить возникающий при этом парадокс: в набегающем невозмущенном потоке поперечное движение газа отсутствует и, следовательно, должна существовать сила, которая бы принуждала его двигаться в направлении оси Z. Чтобы устранить противоречие, следует рассмотреть короткий разгонный участок вблизи передней кромки пластины. Здесь формируется автомодельный профиль поперечного течения и здесь к поверхности пластины приложена конечная сила отдачи в направлении оси Z. Ее величину F_Z вычислим, применив теорему импульсов [5] к показанному на фиг. 1, *а* контуру $ABCD$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$F_Z=-l_W\zeta_{ZX}\rho_W U^2$$

3. Поперечное скольжение на конусе. В этом случае эффект поперечного скольжения приводит к возникновению медленного кругового движения газа в плоскости, перпендикулярной оси симметрии конуса (см. фиг. 1, *б*). Данное вторичное течение создает на всей поверхности тела вязкие напряжения трения. Появляется распределенный осевой крутящий момент, плотность которого вычисляется ниже.

Введем сферические координаты r, θ, φ, поместив полюс в вершине конуса. Полярный угол θ будем отсчитывать от оси симметрии.

Пусть далее $w(r, \theta)$ — скорость циркуляционного течения, обусловленного поперечным скольжением. Для ее определения решим следующую граничную задачу:

$$U_R\left(\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}\right)+\frac{U_\theta}{r}\frac{dw}{d\theta}=\frac{1}{\rho r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mu}{r}\frac{dw}{d\theta}\right) \tag{3.1}$$

$$w(\infty)=0, \qquad w|_W=w_{SL}=l_W\zeta_{R\varphi}r^{-1}(dU_R/d\theta)_W$$

Здесь, как и выше, $U=(U_R, U_\theta)$ — скорость основного автомодельного течения.

Перейдем в (3.1) к автомодельной переменной $t=\eta(3/\xi)^{1/2}$, где ξ, η — переменные Дородницына, и отнесем величину скорости рассматриваемого вторичного течения к величине скорости скольжения w_{SL} : $\psi=w/w_{SL}$. Тогда для ψ получаем следующую граничную задачу:

$$2\varphi''+f\psi'-f'\psi/3=0, \ \psi(\infty)=0, \ \psi(0)=1$$

Ее решение, полученное прямым численным расчетом, представлено на фиг. 2 (кривая *б*). При этом плотность осевого крутящего момента m_φ

определяется выражением следующего вида: $m_\varphi \approx -1{,}385 \rho_W U^2 \zeta_{R\varphi} \sin^2(\theta_W) r$, где θ_W — угол полураствора конуса.

Наличие трения на конусе, при отсутствии такового почти на всей поверхности пластины, находится в противоречии с известной аналогией между соответствующими течениями в теории пограничного слоя основного порядка. Причиной различия между вторичными течениями является специфическое взаимодействие между радиальным и азимутальным движениями газа в пограничном слое на конусе. В этом случае траектория жидкой частицы представляет собой винтовую линию. Для организации такого движения к элементарному объему газа в числе прочих необходимо приложить силу $\rho U_R w/r$, обеспечивающую поворот вектора радиальной скорости при вращении в азимутальном направлении. Это достигается за счет обмена импульсом между верхними и нижними слоями газа. В результате возникает поток соответствующей компоненты импульса на границе раздела газ — поверхность тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Freedlander O. G.* Relations of symmetry and reciprocity in linear kinetic theory of gases // Rarefied Gas Dynamics/Ed. by Belotserkovskii O. M. N. Y.; L.: Plenum Press, 1985. V. 1. P. 91–98.
2. *Волков И. В.* Условия газодинамического скольжения на шероховатой поверхности // Тр. ЦАГИ. 1985. Вып. 2269. С. 39–46.
3. *Волков И. В.* Газодинамические граничные условия скольжения на неровной поверхности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 1. С. 80–89.
4. *Волков И. В.* Газодинамические условия скольжения на неровной поверхности // Тр. VIII Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов. М., 1986. С. 38–42.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М. 5 Л.: Гостехиздат, ОГИЗ, 1947. 928 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.VII.1987