

УДК 532.68:536.25

**О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ
ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

ГУПАЛО Ю. П., РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

В условиях пониженной гравитации роль различных составляющих в балансе действующих в жидкости сил существенно изменяется. Заметную, а во многих случаях определяющую роль начинают играть капиллярные силы, связанные с существованием поверхностного натяжения на границах раздела двух жидкостей или жидкой и газообразной фаз. Влиянию капиллярных сил на равновесие и движение жидкости в условиях, близких к состоянию невесомости, посвящено большое число работ. Активность в этой области связана прежде всего с исследованиями в области космической технологии. Следует отметить, что и при нормальной гравитации в условиях, когда удельная поверхность жидкости велика или сила тяжести скомпенсирована, капиллярные силы могут стать определяющими. Этот класс явлений в последнее время привлекает все большее внимание химиков-технологов, исследующих массообмен на границах раздела фаз.

Многообразие капиллярных явлений в значительной мере обусловлено зависимостью величины поверхностного натяжения от концентрации поверхностно-активных веществ и температуры. Теоретический анализ термокапиллярных явлений до последнего времени ограничивался случаями линейной, в большинстве случаев падающей зависимости поверхностного натяжения от температуры. Экспериментальные данные, свидетельствующие о существовании жидкостей, имеющих нелинейную связь поверхностного натяжения с температурой, позволяют значительно расширить класс возможных термокапиллярных явлений.

В данной заметке рассмотрены две задачи о вызванном наличием градиента температуры термокапиллярном движении невесомой жидкости с параболической зависимостью поверхностного натяжения от температуры, допускающие автономные (в обобщенном смысле) решения в рамках уравнений Навье – Стокса. Отмечена возможность неединственности решения.

1. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в слое постоянной толщины H на плоской твердой поверхности в случае, когда на свободной поверхности слоя действует касательное термокапиллярное напряжение, обусловленное неравномерным распределением температуры, от которой, по предположению, коэффициент поверхностного натяжения σ зависит по закону

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{2} \alpha (T - T_0)^2, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const} \quad (1.1)$$

Здесь T_0 — значение температуры, соответствующее экстремальной величине коэффициента поверхностного натяжения.

Для ряда жидкостей, таких как водные растворы высокомолекулярных спиртов, некоторые бинарные металлические сплавы и нематические жидкие кристаллы, экспериментально установлено, что зависимость $\sigma = \sigma(T)$ значительно отличается от линейной и может иметь немонотонный характер (например, [1–3]). На фиг. 1 представлены экспериментальные данные [3], согласно которым зависимость $\sigma = \sigma(T)$ имеет четко выраженный минимум и хорошо соответствует параболическому закону (1.1). (Цифры у кривых на фигуре соответствуют числу атомов углерода в молекуле спирта; опыты проводились при низких концентрациях раствора, поскольку высокомолекулярные спирты плохо растворимы в воде.)

Предположим, что на дне слоя жидкости поддерживается постоянное линейное распределение температуры, а свободная поверхность слоя теплоизолирована. Вследствие теплопроводности жидкости распределение температуры на свободной поверхности будет неравномерным, что приведет к возникновению касательного термокапиллярного напряжения и вызовет движение жидкости в слое. Рассмотрим установившийся режим такого движения, когда касательное термокапиллярное напряжение на поверхности слоя уравновешено действием вязких сил.

Введем декартову систему координат X, Y , поместив ее начало на твердой поверхности, в точку, где достигается значение температуры T_0 . Направим ось X вдоль заданного градиента температуры, а ось Y — внутрь слоя жидкости (фиг. 2).

При стандартных упрощающих предположениях поля скоростей и температуры в слое могут быть описаны следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\rho^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \quad \text{div}\mathbf{v} = 0 \\ (\mathbf{v}\nabla)T &= \chi\nabla^2 T \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (u, v), \quad \nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y) \\ Y=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad T &= T_0 + AX, \\ A &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} Y=H, \quad v=0, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} &= 0, \\ \nu\rho \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial \sigma}{\partial X} = \alpha(T-T_0) \frac{\partial T}{\partial X} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь ρ , p , \mathbf{v} — плотность, давление и вектор скорости, u , v — компоненты скорости по осям X и Y , ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — теплопроводность, обозначения дифференциальных операторов стандартные.

Согласно граничным условиям (1.3), на твердой поверхности выполнены условия прилипания и непротекания и поддерживается постоянное линейное распределение температуры. В соответствии с граничными условиями (1.4) на свободной поверхности выполнены условия непротекания, баланса касательных термокапиллярных и вязких напряжений и отсутствия потока тепла через свободную поверхность. Предполагается, что движение в слое плоское и свободная поверхность остается плоской. Последнее условие может приближенно выполняться, например, при действии достаточно большого капиллярного давления (величина σ_0 достаточно велика).

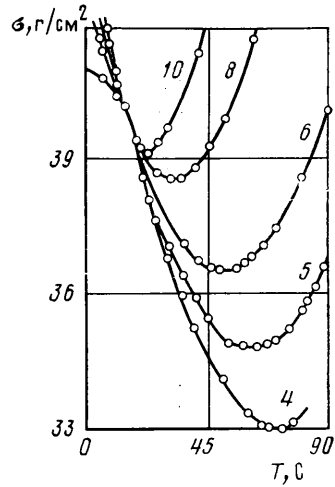
Введем безразмерные переменные и параметры

$$x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad m_H = \frac{\alpha A^2 H^3}{\rho \nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь m_H — число Марангони для слоя толщины H , Pr — число Прандтля.

Будем искать решение задачи (1.2) — (1.4) в виде

$$u = \frac{\nu}{H} x \psi'(y), \quad v = -\frac{\nu}{H} \psi(y), \quad T = T_0 + AHx\Theta(y) \quad (1.5)$$



Фиг. 1

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{v}{H} \right)^2 [\lambda x^2 + f(y)]$$

где $p_0 = \text{const}$ — давление в критической точке на твердой поверхности, $vH^{-1}x\psi(y)$ — функция тока.

Для определения новых неизвестных функций $\psi(y)$, $\Theta(y)$, $f(y)$ и постоянной λ , которая является собственным значением задачи, получаем из (1.2)–(1.4) следующую двухточечную краевую задачу для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\psi''' + \psi\psi'' - \psi'^2 + \lambda = 0, \quad f = \psi^2 + 2\psi' \quad (1.6)$$

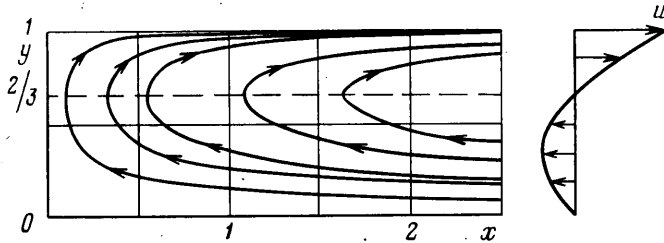
$$\Theta'' - \text{Pr}(\psi'\Theta - \psi\Theta') = 0 \quad (1.7)$$

$$y=0, \quad \psi=0, \quad \psi'=0, \quad \Theta=1 \quad (1.8)$$

$$y=1, \quad \psi=0, \quad \psi'' = m_H \Theta^2, \quad \Theta'=0 \quad (1.9)$$

Второе уравнение (1.6) получено в результате подстановки (1.5) в проекцию первого уравнения (1.2) на ось Y и интегрирования по Y с учетом условия в критической точке.

Для выяснения особенностей рассматриваемого термокапиллярного течения получим приближенное аналитическое решение задачи при малых



Фиг. 2

значениях числа Марагони, полагая, что число Прандтля порядка единицы.

При $m_H = 0$ задача имеет решение

$$\psi = 0, \quad f = 0, \quad \lambda = 0, \quad \Theta = 1 \quad (1.10)$$

которое соответствует покоящейся жидкости при однородном распределении температуры поперек слоя.

При $|m_H| < 1$ будем строить решение методом малых возмущений в виде

$$\psi = m_H \psi_1, \quad \Theta = 1 + m_H \Theta_1, \quad f = m_H f_1, \quad \lambda = m_H \lambda_1 \quad (1.11)$$

где порядок величин с индексом единица равен единице. После подстановки (1.11) в (1.6)–(1.9) в пренебрежении квадратичными по m_H членами получим следующую линейную краевую задачу (уравнения движения соответствуют стоксову приближению):

$$\psi_1''' + \lambda_1 = 0, \quad f_1 = 2\psi_1', \quad \Theta_1'' = \text{Pr} \psi_1' \quad (1.12)$$

$$y=0, \quad \psi_1=0, \quad \psi_1'=0, \quad \Theta_1=0$$

$$y=1, \quad \psi_1=0, \quad \psi_1''=1, \quad \Theta_1'=0$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\psi_1(y) = \frac{y^2}{4} (y-1), \quad f_1(y) = y \left(\frac{3}{2} y - 1 \right) \quad (1.13)$$

$$\Theta_1(y) = -\text{Pr} \frac{y^3}{16} \left(\frac{4}{3} - y \right), \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2}$$

Таким образом, с точностью до членов $O(m_H^2)$ для поля скоростей, давления и температуры из (1.6), (1.11), (1.13) получим

$$\begin{aligned} u &= m_H \frac{v}{H} x \frac{y}{2} \left(\frac{3}{2} y - 1 \right), & v &= m_H \frac{v}{H} \frac{y^2}{4} (1-y) \\ T &= T_0 + AHx \left[1 - m_H \text{Pr} \frac{y^3}{16} \left(\frac{4}{3} - y \right) \right] \\ p &= p_0 + \frac{1}{2} m_H \rho \left(\frac{v}{H} \right)^2 \left[\frac{3}{2} (y^2 - x^2) - y \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

На фиг. 2 представлены линии тока термокапиллярного течения (1.14), соответствующие следующим значениям функции тока, нормированной на величину $-m_H v H^{-1} \cdot 10^{-2}$: 0,4; 1,2; 2; 4; 6; приведен также профиль продольной составляющей скорости потока. Направления, показанные стрелками, соответствуют случаю $m_H > 0$ ($\sigma = \sigma_0$ — минимальное значение коэффициента поверхностного натяжения). В противном случае направления меняются на противоположные.

Полученные результаты показывают, что термокапиллярные силы порождают сложное циркуляционное движение жидкости в слое, причем поток меняет направление на глубине, равной $1/3$ толщины слоя. Как и следовало ожидать из физических соображений, поток симметричен относительно плоскости $X=0$ с температурой T_0 ; вдоль этой плоскости происходит истечение жидкости на поверхность из придонного слоя.

В рассматриваемом приближении поле скоростей не зависит от числа Прандтля. Продолжив процесс построения решения в виде ряда по степеням малого числа Марангони, можно найти поправку к полю скоростей (1.14), имеющую порядок m_H^2 и пропорциональную числу Прандтля.

Полный анализ сформулированной нелинейной задачи (1.6) — (1.9) может быть выполнен только численными методами.

При некоторых значениях фигурирующих в задаче параметров m_H , Pr ее решение, по-видимому, может оказаться не единственным. Предположение о возможности неединственности решения основывается на сходстве данной задачи с задачей, рассмотренной в [4]. В работе [4] исследовалось движение вязкой жидкости в слое, заключенной между двумя параллельными плоскими поверхностями, испытывающими линейное растяжение с постоянной скоростью. Анализ поля течения в зазоре сводился к решению краевой задачи для уравнений (1.6) с отличными от (1.8), (1.9) граничными условиями. Авторы [4] установили, что рассмотренная ими задача в зависимости от значений определяющих параметров может иметь от одного до трех решений.

2. Представляет интерес также автомодельная задача о термокапиллярном торможении (разгоне) занимающей полупространство жидкости, притекающей из бесконечности к свободной поверхности и растекающейся вдоль нее. Будем считать, что скорость жидкости на больших расстояниях от свободной поверхности имеет постоянное значение и направлена по нормали к ней; свободная поверхность жидкости плоская и на ней поддерживается линейное распределение температуры. Как и прежде, на поверхности жидкости действует сила поверхностного натяжения, зависящая от температуры по закону (1.1). В системе координат, связанной со свободной поверхностью, математическая формулировка задачи о поле скорости и температуры в жидкости в этом случае сведется к уравнениям (1.2) и следующим граничным условиям:

$$Y=0, \quad v=0, \quad T=T_0+AX, \quad A=\text{const} \quad (2.1)$$

$$-\rho v \frac{\partial u}{\partial Y} = \alpha A^2 X$$

$$Y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow aX, \quad v \rightarrow -aY, \quad T \rightarrow T_0$$

$$p \rightarrow p_0 - \frac{1}{2} \rho a^2 (X^2 + Y^2) \quad (2.2)$$

Аналогичным образом формулируется задача в случае, когда на свободной поверхности задано линейное распределение потока тепла.

Отметим, что хотя с математической точки зрения сформулированная задача является, так же как и задача разд. 1, вполне корректной, для более полного физического обоснования рассмотренной постановки задач следует дополнить исходные предположения допущением, обосновывающим предположение о плоской форме свободной поверхности. Действительно, в рассматриваемых задачах нормальные напряжения на поверхности жидкости не сохраняют постоянного значения, и это должно приводить к ее искривлению. Указанная трудность может быть снята, если предположить, что искривление поверхности устраняется благодаря большой величине σ_0 или что жидкость несжимаемая, имеет постоянную плотность и большая величина силы тяжести обеспечивает постоянство плоской формы поверхности. Наконец, можно рассмотреть симметричную конфигурацию двух одинаковых встречных потоков несмешивающихся жидкостей с одинаковыми характеристиками, растекание которых будет происходить вдоль плоскости, в любой точке которой давление с обеих сторон будет одинаковым.

Произведя следующую замену неизвестных функций и независимых переменных:

$$u = \sqrt{av} \xi \varphi'(\eta), \quad v = -\sqrt{av} \varphi(\eta)$$

$$T = T_0 + A \sqrt{\frac{v}{a}} \xi \Phi(\eta)$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho av [\xi^2 + F(\eta)]$$

$$\xi = X \sqrt{\frac{a}{v}}, \quad \eta = Y \sqrt{\frac{a}{v}}, \quad m_\infty = \frac{\alpha A^2}{\rho a \sqrt{av}}, \quad \text{Pr} = \frac{v}{\chi}$$

можно записать уравнения (1.2) и граничные условия (2.1), (2.2) в виде

$$\varphi''' + \varphi \varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0, \quad \frac{1}{2} F' = \varphi'' + \varphi \varphi' \quad (2.3)$$

$$\Phi'' - \text{Pr}(\varphi' \Phi - \varphi \Phi') = 0 \quad (2.4)$$

$$\eta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi'' = -m_\infty, \quad \Phi = 1 \quad (2.5)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \varphi' \rightarrow 1, \quad \Phi \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Система уравнений и граничных условий (2.3)–(2.6) дает возможность определить функции $\varphi(\eta)$, $F(\eta)$, $\Phi(\eta)$, т. е. найти распределение скорости, температуры и давления в жидкости. Фигурирующая в задаче безразмерная константа m_∞ определяет интенсивность термокапиллярных сил, действующих на поверхности и направленных вдоль нее. Движение жидкости является результатом совместного действия сил давления и сил Марангони.

При $m_\infty = 0$, т. е. когда эффект Марангони отсутствует, задача имеет нетривиальное решение, описывающее течение идеальной и вязкой жидкости одновременно. Распределение скорости, давления и температуры в таком потоке представляется в форме

$$u = aX, \quad v = -aY, \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \rho a^2 (X^2 + Y^2) \quad (2.7)$$

$$T = T_0 + AX \left\{ \exp\left(-\frac{a}{2\chi} Y^2\right) - \sqrt{\frac{\pi a}{2\chi}} Y \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2\chi}} Y\right) \right] \right\} \quad (2.8)$$

Решение (2.7) удовлетворяет как уравнениям Эйлера, так и уравнениям Навье – Стокса.

Если же параметр m_∞ не равен нулю, то в зависимости от знака этой величины поток жидкости будет либо тормозиться ($m_\infty < 0$), либо ускоряться ($m_\infty > 0$) силами Марангони. Полное решение задачи (2.3)–(2.6) может быть получено численно при различных значениях параметров m_∞ , Pr . Укажем здесь лишь один интересный частный случай решения, соответствующий значению $m_\infty = m_\infty^* = -1,232\dots$, когда скорость жидкости на свободной поверхности становится равной нулю. Заметим, что в этом случае зависимость $\sigma(T)$ в отличие от приведенной на фиг. 1 должна иметь максимум.

При $m_\infty = m_\infty^*$ свободная поверхность благодаря наличию термокапиллярных сил с математической точки зрения оказывается полностью эквивалентной твердой поверхности (оба компонента скорости на этой поверхности равны нулю), и задача о движении жидкости становится полностью аналогичной задаче о плоском течении вязкой жидкости в случае, когда однонаправленный поток набегаёт из бесконечности на плоскую стенку, поставленную поперек потока, и далее, раздвоившись, растекается вдоль нее в противоположные стороны от критической линии (см., например, [5]).

В заключение отметим, что в связи с исследованием термокапиллярной конвекции в жидкостях с параболической зависимостью поверхностного натяжения от температуры рассмотренные в разд. 1, 2 задачи могут быть использованы в качестве тестовых при численных расчетах, а также при моделировании реальных ситуаций, встречающихся в приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vochten R., Petre G., Defay R.* Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. I. Thermodynamical calculation of the heat of reversible adsorption of nonionic surfactants // *J. Colloid Interface Sci.* 1973. V. 42. № 2. P. 310–319.
2. *Vochten R., Petre G.* Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. II. Experimental determination of the heat of reversible adsorption of some alcohols // *J. Colloid Interface Sci.* 1973. V. 42. № 2. P. 320–327.
3. *Legros J. C., Limbourg M. C., Petre G.* Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection // *Acta Astronautica.* 1984. V. 11. № 2. P. 143–147.
4. *Brady J. F., Acrivos A.* Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier – Stokes equations with reverse flow // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 112. P. 127–150.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.IX.1987